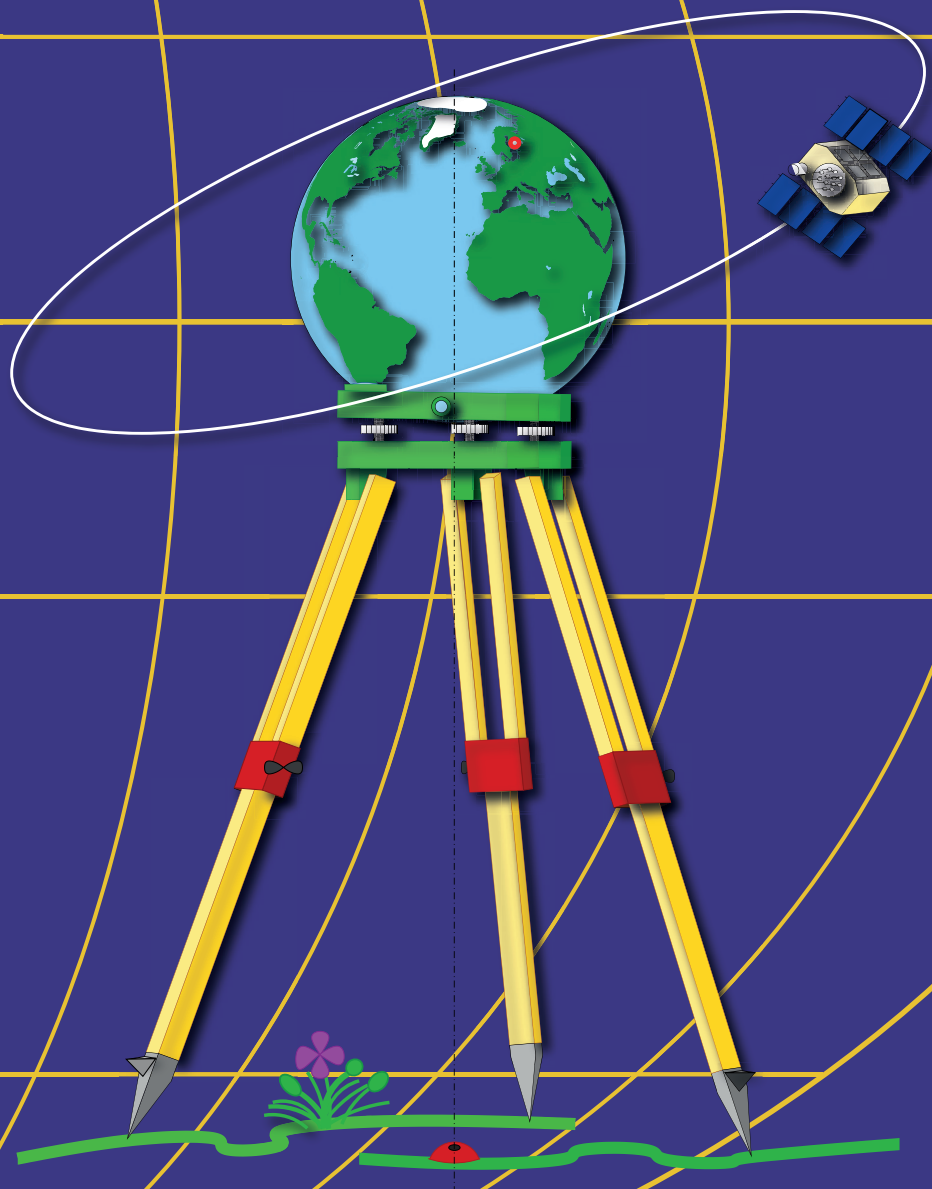


Martin Vermeer

# GEODESIA

Kaiken perusta



A?

Aalto-yliopisto



# Geodesia

Kaiken perusta

**Martin Vermeer**

Aalto-yliopiston julkaisusarja  
**TIEDE + TEKNOLOGIA** 3/2019

© 2019 Martin Vermeer

ISBN (pdf) 978-952-60-8873-0  
ISSN 1799-4888 (pdf)  
<http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-60-8873-0>

Graafinen suunnittelu: Kansi: Tarja Paalanen

Helsinki 2019



**Tekijä**

Martin Vermeer

**Julkaisun nimi**

Geodesia: Kaiken perusta

**Julkaisija** Insinööritieteiden korkeakoulu**Yksikkö** Rakennetun ympäristön laitos**Sarja** Aalto-yliopiston julkaisusarja TIEDE + TEKNOLOGIA 3/2019**Tutkimusala** Maanmittausoppi**Kieli** suomi**Tiivistelmä**

Geodesia on tiede, joka mittaa ja kartoittaa tarkasti Maan pintaa ja sen päällä olevia kohteita, Maan muotoa ja painovoimakenttää, sekä niiden kaikkien ajallisia muutoksia. Geodesia on vanha tiede, joka oli olemassa jo muinoin kun maanviljely alkoi ja peltoja piti kartoittaa. Se on myös moderni tiede, joka palvelee modernin, kehittyvän globaalin teknologisen yhteiskuntamme olennaisia infrastruktuuritarpeita.

Tämä kirja esittää sekä perinteisen että modernin geodesian perusteet. Perinteinen geodesia kartoittaa Maata ihmisen elintilan puitteissa ja sen ehdolla, kun moderni geodesia käyttää avaruusteknologiaa koko maaplaneetamme kartoittamiseksi ja seuraamiseksi yhtenäisellä kolmiulotteisella tavalla. Tavoitteena on auttaa Maan mittaamiseen ja kartoittamiseen liittyvien sekä tieteellis-matemaattisten että teknologisten käsitteiden ymmärtämistä. Geodesian historiaa ei unohdeta, ja kirjoitelman näkökulma on avoimesti suomalainen.

**Avainsanat** geodesia, maanmittaus, kartoitus, geodeettiset mittaukset, verkot, koordinaatit, korkeus, pienimmän neliösumman estimaatio, rakennettu ympäristö, Maan muoto, GPS, avaruusgeodesia, painovoima, geodynamiikka, geofysiikka

**ISBN (pdf)** 978-952-60-8873-0**ISSN (PDF)** 1799-490X**Julkaisupaikka** Helsinki**Painopaikka** Helsinki**Vuosi** 2019**Sivumäärä** 600**urn** <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-60-8873-0>



# Esipuhe

VAIKKA SUOMI ON, ja on ollut itsenäisyydestään asti, suurvalta geodesian alalla, Suomen kielialueella ei näytä olevan modernia geodesian oppikirjaa. Suomenkielisiä oppikirjoja, ja populaarikirjojakin, löytyy, mutta ne ovat joko jo pahasti vanhentuneita tai käsittelevät vain geodesian yhtä osa-aluetta. Alan teoksista voi mainita mittaus- ja laitetekniikan sekä geodeettisen laskennan saralla Martti Tikan tuotannon (Tikka, 1991, 1985), joka on jo osin selvästi vanhentunut, ja Salmenperän tuotannon (1998). Satelliittipaikannuksesta kertova Poutanen (1998) on nyt päivitetty (2017) ja varsin käyttökelpoinen. Geodesiassa käytettävien pienimmän neliösumman tilastollisista laskentamenetelmistä kertoo Kallio (1998). Kaikista lähteistä on ollut hyötyä tämän kirjan laatimisessa.

Maailmalta löytyy selvästi enemmän geodesian oppikirjoja, ja avuksi ovat olleet Torge (2001), Vaníček ja Krakiwsky (1986), mittaus- ja laitetekniikassa Kahmen ja Faig (1988), fysikaalisen geodesian saralla Heiskanen ja Moritz (1967), ja satelliittigeodesiassa Hofmann-Wellenhof ym. (2001).

Tämä kirja jakautuu luonnollisella tavalla kahteen osaan: klassiseen geodesiaan ja moderniin geodesiaan. Kumpikin osa voi toimia erikseen yhden kurssin oppikirjana, jolloin kumpikin osa olisi kolmen ECTS-opintopisteen mittainen.

*Klassisen geodesian* (luvut 1–10) käsittelemät aiheet ovat geodesian historia, Maan muoto ja painovoima, vertausellipsoidi, koordinaatit ja korkeudet, vertausjärjestelmien ja karttaprojektioiden alkeet, geodeettisten mittausten alkeet, mittayksiköt, mittauksen epävarmuus, Helmertin muunnokset, geodeettinen pää- ja käänteistehtävä, vaaituskojeet ja -menetelmät, korkeusjärjestelmät, geoidi, teodoliitit ja takymetrit, kulmamittaukset, etäisyysmittaus sähkömagneettisella säteilyllä ja mittaussäteen kulku ilmakehässä, geodeettiset verkot, mittausluokat, verkkohierarkia,

runko- ja kartoitusmittauksen menetelmät, pinta-ala- ja massalaskenta.

*Modernissa geodesiassa* (luvut 11–18) sen sijaan keskitytään viime vuosisadan aikana tapahtuneeseen kehitykseen tiivistä Maan pintaan sidonneesta geodesiasta aidosti kolmiulotteeseen geodesiaan. Aiheina ovat avaruus- ja satelliittigeodesia ja aidosti kolmiulotteiset, sähkömagnetismiin perustuvat paikannusmenetelmät. Osassa käsitellään myös kolmiulotteiset vertausjärjestelmät, hyperboliset paikannusjärjestelmät ja globaali paikannusjärjestelmä GPS: GPS-satelliitit, radat, signaalit ja vastaanottimet, pseudoetäisyys- ja kantoaaltovaihemittaus, mittausgeometria, havaintojen erotukset, kokonaislukutuntemattomat ja niiden kiinnitys, GPS-havaintojen käsittely, relatiivinen paikanmääritys, differentiaalipaikannus ja tosiaikainen paikannus. Osassa sukelletaan myös syvemmin geodesian tilastollisiin perusteisiin, kuten pienimmän neliösumman menetelmä, jäännösvirheet, tilastollinen testaus, karkeiden virheiden etsintä, luotettavuus ja mittausverkkojen suunnittelu. Lopuksi tutkitaan geodesian ja geofysiikan rajamaastoa, aiheina Maan painovoimakenttä, painovoiman mittaus, painovoima-anomaliat, gravimetrinen geoidi, avaruusgeodesia, Maan pyörähdys- ja rataliikkeet sekä deformaatiot, satelliittiradat ja geodesian rooli geofysiikan tutkimuksessa.

Olemme tehneet tässä tekstissä tietoisesti valinnan keskittyä käsitteisiin ja perusteisiin. Tämä merkitsee myös, että kuvaamme eri kojeiden ja prosessien sisäiset toiminnot, vaikka ne olisivat nykyjärjestelmissä älykkäiden ohjelmistojen vastuulla.

Helsingissä 9. joulukuuta 2020

Martin Vermeer

## Toinen laitos

Toinen, laajasti korjattu ja parannettu laitos julkaistiin 25. syyskuuta 2022. Asiasisältöä ei lisätty. Alkuperäisteksti [arkistoitiin](#).



## Kiitokset

Käsikirjoituksen eri versioiden laatimisessa professorien Teuvo Parmin ja Martti Martikaisen laatimat luentokalvot ja muut materiaalit olivat suureksi avuksi. Yliassistentti Jaakko Santalalle, assistentit Mauri Väisäselle, Panu Salolle ja Henri Turtolle, tutkijatohtori Octavian Andreille, professori Markku Poutaselle, Maanmittauslaitoksen asiantuntija Marko Ollikaiselle, sekä monen lukuvuoden opiskelijoille olen kiitollinen hyödyllisistä kommenteista, tiedonjyvistä ja korjausehdotuksista. Liisa Vermeer auttoi objektivirheiden korjailussa.

Kiitoksia Nicolàs de Hilsterille kuvasta 9.8.

Muutama karttakuva piirrettiin Generic Mapping Toolsin avulla (Wessel ym., 2013).






















Kielentarkistuksesta vastasi pätevästi Sanna Karppinen, Skarppi Kirjoituspalvelut. Liisa Vermeer antoi myös arvokkaita kielihuomautuksia. Tarja Paalanen suunnitteli kannen. Laura Mure ja Matti Yrjölä auttoivat julkaisemistyössä.

Tämä sisältö lisensoidaan lisenssillä *Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen* (CC BY 4.0), lukuunottamatta tekstissä mainitut tai muuten ilmeiset poikkeukset.



# Sisältö

## Luvut

	1. Geodesian historia ja yhteiskunnallinen asema . . . . .	1
	2. Geodeettiset mittaukset ja koordinaatit . . . . .	23
	3. Karttaprojektiot, datumit ja muunnokset . . . . .	53
	4. Korkeuden mittaus ja vaaituskoje . . . . .	87
	5. Teodoliitti . . . . .	117
	6. Kulmamittaus . . . . .	153
	7. Etäisyysmittaus . . . . .	181
	8. Runko- ja kartoitusmittaus . . . . .	205
	9. Rakentamisen mittaus . . . . .	229
	10. Numeeriset maastomallit ja määrälaskenta . . . . .	245
	11. Kolmas ulottuvuus . . . . .	259
	12. Global Positioning System (GPS) . . . . .	277
	13. GPS-havaintojen käsittely . . . . .	327
	14. Tasoituslasku geodesiassa . . . . .	349
	15. Tilastolliset menetelmät geodesiassa . . . . .	387
	16. Painovoima geodesiassa . . . . .	417
	17. Avaruusgeodesia . . . . .	447
	18. Geodesia ja geofysiikka . . . . .	469
	A. Matriisien ominaisuudet . . . . .	503
	B. Magnetohydrodynamiikkaa lyhyesti . . . . .	511
	C. Keplerin rata-alkiot satelliitteille . . . . .	515

<b>Esipuhe</b>	<b>i</b>
----------------	----------

<b>Taulukot</b>	<b>xii</b>
-----------------	------------

<b>Kuvat</b>	<b>xiii</b>
<b>Lyhenteet</b>	<b>xxiii</b>
<b>1. Geodesian historia ja yhteiskunnallinen asema</b>	<b>1</b>
1.1 Maan muoto: varhaiset käsitykset . . . . .	1
1.2 Newtonin lait ja Maan muoto . . . . .	5
1.3 Maan matemaattinen muoto eli <i>geoidi</i> . . . . .	8
1.4 Geodeettinen viiva . . . . .	11
1.5 Maan litistyneisyys ja painovoima . . . . .	13
1.6 Vertauspinnat ja vertausjärjestelmät . . . . .	13
1.7 Geodesian osa-alueet . . . . .	14
1.8 Maastomittaus: maastosta kartaksi . . . . .	16
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	20
<b>2. Geodeettiset mittaukset ja koordinaatit</b>	<b>23</b>
2.1 Mittayksiköt . . . . .	23
2.2 Mittausvirheet ja epävarmuus . . . . .	27
2.3 Stokastiset suureet . . . . .	30
2.4 Tilastolliset jakaumat . . . . .	32
2.5 Geodeettisia mittasuureita . . . . .	41
2.6 Koordinaateista . . . . .	45
2.7 Miksi tasokoordinaatteja käytetään . . . . .	46
2.8 Kolmiulotteiset paikkakoordinaatit . . . . .	47
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	50
Harjoitus 2–1: Koordinaatit ja katuosoite . . . . .	51
<b>3. Karttaprojektiot, datumit ja muunnokset</b>	<b>53</b>
3.1 Karttaprojektiot . . . . .	53
3.2 Suomen eri koordinaattiratkaisut . . . . .	55
3.3 Karttaprojektiot Suomessa . . . . .	58
3.4 Lisää tasokoordinaateista . . . . .	65
3.5 Geodeettinen pää- ja käänteistehtävä . . . . .	67
3.6 Koordinaattien yhdenmuotoisuusmuunnos . . . . .	71
3.7 Muunnosparametrien määrittäminen . . . . .	73
3.8 Datumit ja datumimuunnokset . . . . .	77
3.9 Karttaprojektiot ja korkeusjärjestelmät... . . . .	82
3.10 Aikakoordinaatti . . . . .	84
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	84
Harjoitus 3–1: Etäisyyksiä . . . . .	85





<b>4. Korkeuden mittaus ja vaaituskoje</b>	<b>87</b>
4.1 Korkeus, geopotentiaali ja geoidi . . . . .	87
4.2 Ortometrinen korkeus . . . . .	89
4.3 Korkeuden määrittäminen ja vaaitus . . . . .	91
4.4 Vaaituskoje . . . . .	95
4.5 Mittauskaukoputki . . . . .	96
4.6 Putkitasain . . . . .	98
4.7 Vaaituskojeen tarkistus ja säätö . . . . .	100
4.8 Itsetasaava koje . . . . .	103
4.9 Digitaalivaaituskoje . . . . .	104
4.10 Vaaituslatta . . . . .	105
4.11 Vaaitusmenetelmät . . . . .	108
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	113
Harjoitus 4–1: Korkeuksia . . . . .	114
<b>5. Teodoliitti</b>	<b>117</b>
5.1 Vaakakulmat ja zenittikulmat . . . . .	117
5.2 Teodoliitin akselit . . . . .	119
5.3 Teodoliitin rakenne . . . . .	119
5.4 Teodoliitin käsittely maastossa . . . . .	122
5.5 Havaintojen lukeminen . . . . .	134
5.6 Teodoliitin kojevirheet . . . . .	139
5.7 Elektroniset teodoliitit . . . . .	146
5.8 Case: Leican robottitakymetri TCA2003 . . . . .	150
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	152
<b>6. Kulmamittaus</b>	<b>153</b>
6.1 Vaakakulmamittaus . . . . .	153
6.2 Eteen- ja taaksepäin leikkaus . . . . .	154
6.3 Sarjahavaintomenetelmä . . . . .	157
6.4 Vaakakulmien asematasoitus . . . . .	158
6.5 Monikulmiojonon mittaus ja laskenta . . . . .	166
6.6 Avoin monikulmiojono . . . . .	167
6.7 Suljettu monikulmiojono . . . . .	170
6.8 Zenittikulmat ja refraktio . . . . .	175
6.9 Kojeen ja tähyksen korkeus . . . . .	178
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	179



<b>7. Etäisyysmittaus</b>	<b>181</b>
7.1 Mekaaninen etäisyysmittaus . . . . .	181
7.2 Sähkömagneettinen säteily . . . . .	184
7.3 Väisälän interferenssimenetelmä . . . . .	187
7.4 Elektroninen etäisyysmittaus . . . . .	190
7.5 Säteen kulku ilmakehässä . . . . .	197
7.6 ”Kaarevuuskorjaukset” . . . . .	199
7.7 Geometriset reduktiot . . . . .	201
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	203
<b>8. Runko- ja kartoitusmittaus</b>	<b>205</b>
8.1 Runkomittauksen tehtävä ja suunnittelu . . . . .	205
8.2 Ohjeistus ja standardit . . . . .	207
8.3 Verkkohierarkia ja -luokitus . . . . .	208
8.4 Maastosta, ellipsoidista ja karttatasosta . . . . .	212
8.5 Kartoitusmittaus . . . . .	216
8.6 Kartoitusmittauksen suorittaminen . . . . .	222
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	228
<b>9. Rakentamisen mittaus</b>	<b>229</b>
9.1 Kaavoitus ja maastoon merkintä . . . . .	229
9.2 Maastoon merkintä ja infrastruktuuri . . . . .	230
9.3 Suorat, ympyrän kaaret, kulmien pyöristys . . . . .	233
9.4 Siirtymäkaari . . . . .	236
9.5 Tien- ja kadunmittaus . . . . .	238
9.6 Rakennusmittaukset . . . . .	239
9.7 Muut mittaukset . . . . .	240
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	242
<b>10. Numeeriset maastomallit ja määrälaskenta</b>	<b>245</b>
10.1 Maastomallien mittaus, muodostaminen, esitystapa . . .	247
10.2 Maastomallien käyttö . . . . .	249
10.3 Pinta-alojen laskenta . . . . .	250
10.4 Tilavuuksien laskenta . . . . .	253
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	257
<b>11. Kolmas ulottuvuus</b>	<b>259</b>
11.1 Geosentriset koordinaattijärjestelmät . . . . .	259
11.2 Toposentriset koordinaatit . . . . .	262
11.3 Kolmiulotteiset muunnokset . . . . .	264



11.4	Muunnos pienten kiertokulmien tapauksessa . . . . .	265
11.5	Muunnos kahden vertausellipsoidin välillä . . . . .	266
11.6	Laplacen atsimuuttimittaus . . . . .	269
11.7	Perinteiset ”2D+1D” -koordinaatit . . . . .	271
11.8	Case: ED50:n ja EUREF89:n välinen muunnos . . . . .	273
11.9	Case: ITRF:n ja ETRF:n välinen muunnos . . . . .	274
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	275
	Harjoitus 11–1: Greenwich: selitä tämä . . . . .	275
<b>12.</b>	<b>Global Positioning System (GPS)</b>	<b>277</b>
12.1	Radionavigointi ja hyperbolisia järjestelmiä . . . . .	278
12.2	GPS-satelliitti . . . . .	281
12.3	GPS-lohkot . . . . .	283
12.4	GPS-konstellatio . . . . .	284
12.5	GPS-signaalin sisältämät koodit . . . . .	285
12.6	GPS-vastaanottimia . . . . .	291
12.7	GPS:n havaintosuureita . . . . .	294
12.8	GPS:n mittausgeometria . . . . .	301
12.9	Mittausgeometria ja havaintojen herkkyys . . . . .	303
12.10	GPS-satelliittien radat . . . . .	317
12.11	International GNSS Service IGS . . . . .	324
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	324
	Harjoitus 12–1: DOP-suureiden laskenta . . . . .	326
<b>13.</b>	<b>GPS-havaintojen käsittely</b>	<b>327</b>
13.1	Erotushavaintojen muodostus . . . . .	327
13.2	Relatiivinen (staattinen) GPS . . . . .	332
13.3	Kokonaislukutuntemattomien kiinnitys . . . . .	334
13.4	Tosiaikainen paikannus . . . . .	336
13.5	SBAS-järjestelmät . . . . .	343
13.6	Tosiaikaisia tukipalveluja Suomessa . . . . .	344
13.7	GDGPS-järjestelmä . . . . .	345
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	346
	Harjoitus 13–1: Geodeettinen GPS-paikanmäärittäminen . . . . .	346
<b>14.</b>	<b>Tasointuslasku geodesiassa</b>	<b>349</b>
14.1	Miksi tasointus? . . . . .	349
14.2	Keskiarvo . . . . .	352
14.3	Lineaarinen regressio . . . . .	353
14.4	Pienimmän neliösumman tasoinnuksen teoria . . . . .	354



14.5	Pienimmän neliösumman menetelmän esimerkkejä . . . .	358
14.6	Geodeettisten mallien linearisointi . . . . .	363
14.7	Varianssien kasautumislaki . . . . .	368
14.8	Esimerkki: geodeettinen päätehtävä . . . . .	370
14.9	Käytännön havaintosuureet ja havaintoyhtälöt . . . . .	374
14.10	Takymetrimittaus . . . . .	380
14.11	Helmertin muunnos tasossa . . . . .	381
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	384
	Harjoitus 14–1: Helmertin muunnosparametrien estimointi . .	384
<b>15.</b>	<b>Tilastolliset menetelmät geodesiassa</b>	<b>387</b>
15.1	Pienimmän neliösumman menetelmä . . . . .	387
15.2	Tasoituksen jäännösvirheet . . . . .	389
15.3	Testaus, testaushypoteesit . . . . .	392
15.4	Kokonaisvalidointi . . . . .	393
15.5	Karkeiden virheiden paikantaminen . . . . .	396
15.6	Laskuesimerkki: lineaarinen regressio . . . . .	398
15.7	Karkean virheen lisäys . . . . .	400
15.8	Testin merkitsevyystaso . . . . .	401
15.9	Luotettavuus . . . . .	404
15.10	Muodonmuutosten analyysi . . . . .	409
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	415
<b>16.</b>	<b>Painovoima geodesiassa</b>	<b>417</b>
16.1	Painovoiman mittaus . . . . .	417
16.2	Painovoima ja geopotentiaali . . . . .	420
16.3	Painovoima-anomaliat . . . . .	425
16.4	Gravimetrinen geoidi . . . . .	427
16.5	Painovoimakenttä ja korkeudet . . . . .	431
16.6	Bouguer-anomaliat . . . . .	439
16.7	Tähtitieteellinen paikanmäärittäminen . . . . .	440
16.8	Painovoimagradientin mittaus . . . . .	442
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	445
	Harjoitus 16–1: Gravimetrisen geoidin laskenta . . . . .	446
<b>17.</b>	<b>Avaruusgeodesia</b>	<b>447</b>
17.1	Maan pyörähdysliike, rataliike ja tähtiaika . . . . .	447
17.2	Taivaan ja Maan koordinaatit . . . . .	449
17.3	Väisälän tähtikolmiomittaus . . . . .	452
17.4	Maan pyörähdysliikkeen vaihtelu . . . . .	455



17.5	Maan prekessio ja nutaatio . . . . .	459
17.6	Avaruussää . . . . .	460
17.7	Satelliitin rataliike . . . . .	463
17.8	Satelliittiradan valinta . . . . .	465
17.9	Satelliittiradan prekessio ja aurinkosynkrooni rata . . . . .	466
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	468
<b>18.</b>	<b>Geodesia ja geofysiikka</b>	<b>469</b>
18.1	Geodynamiikka . . . . .	469
18.2	Laattatektoniikka . . . . .	473
18.3	Postglasiaalinen palautusliike (GIA) . . . . .	478
18.4	Paikallinen geodynamiikka . . . . .	482
18.5	Deformaatioseuranta . . . . .	483
18.6	Maan painovoimakentän tutkimus kiertoradalta . . . . .	485
18.7	Ilmakehän tutkimus ja GNSS . . . . .	488
18.8	Maan pyörähdysakselin ja rataliikkeen pitkäaikaiset vaihtelut . . . . .	493
18.9	Mannerjään tutkimus ja ilmastomuutos . . . . .	495
18.10	Geodeettinen merentutkimus . . . . .	496
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	502
<b>A.</b>	<b>Matriisien ominaisuudet</b>	<b>503</b>
A.1	Matriisien yhteen- ja vähennyslasku . . . . .	503
A.2	Matriiseja ja vektoreita . . . . .	504
A.3	Yksikkömatriisi . . . . .	504
A.4	Matriisien kertolasku . . . . .	505
A.5	Transpoosi . . . . .	506
A.6	Käänteismatriisi . . . . .	506
A.7	Matriisin determinantti . . . . .	508
A.8	Vektorien tulot . . . . .	509
<b>B.</b>	<b>Magnetohydrodynamiikkaa lyhyesti</b>	<b>511</b>
B.1	Plasma . . . . .	511
B.2	Maxwellin yhtälöt . . . . .	511
B.3	"Frozen-in"-magneettikenttä . . . . .	512
B.4	Alan historia . . . . .	513
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	513
<b>C.</b>	<b>Keplerin rata-alkiot satelliitteille</b>	<b>515</b>
C.1	Radan <i>orientaatiota</i> avaruudessa kuvaavat kulma-alkiot . . . . .	515



C.2	Radan <i>kokoa ja muotoa</i> kuvaavat alkio . . . . .	515
C.3	Satelliitin <i>paikkaa radallaan</i> kuvaava rata-alkio, ”aika-taulu” . . . . .	515
	Olenko ymmärtänyt tämän? . . . . .	516
<b>Kirjallisuutta</b>		<b>517</b>
<b>Hakemisto</b>		<b>539</b>

## Taulukot

1.1	Maastomittaus . . . . .	21
2.1	Mittasuureet, yksiköt ja niiden symbolit . . . . .	24
2.2	SI-järjestelmän suuruusluokkaa ilmaisevat etuliitteet . . .	25
2.3	SI-järjestelmän kanssa käytetyt lisäyksiköt . . . . .	25
2.4	Nopanheiton tilastotiedettä . . . . .	31
2.5	Korrelaatiosta . . . . .	39
3.1	Vaihtoehtoisia korkeusdatumeita <i>A</i> ja <i>B</i> . . . . .	80
4.1	Vaaituskojeiden luokitus . . . . .	96
4.2	Vaaituslattojen luokitus . . . . .	107
6.1	Asematasoituksen laskentapohja . . . . .	165
6.2	Monikulmiojonon laskentataulukko . . . . .	174
7.1	Etäisyysmittarin vakio- ja taajuusvirheen laskenta lineaari-regressiolla . . . . .	195
7.2	Etäisyysreduktion esimerkkejä . . . . .	202
8.1	Runkomittauksen menetelmät . . . . .	208
8.2	Vertausellipsoidin approksimaation hyvyys . . . . .	214
8.3	Maastotiedon luokitus . . . . .	227
11.1	Muunnosparametrit EUREF89:n ja ED50:n välillä . . . . .	274
11.2	Muunnosparametrit ITRF2005:n ja ETRF2005:n välillä . .	275
12.1	GPS-signaalin sisältämät koodit . . . . .	286
12.2	Miten dendrokronologia toimii . . . . .	288
12.3	RINEX-tiedoston alku . . . . .	294
12.4	Kantotaaltojen ominaisuudet . . . . .	298



12.5	Vaikutuskaavan johtaminen linearisoinnin avulla . . . . .	305
12.6	DOP-suureen eri variantit . . . . .	307
12.7	<i>Precise ephemeris</i> alkuperäisessä SP3-formaatissa . . . . .	322
12.8	DOP-laskentaskripti . . . . .	325
13.1	Erotushavaintojen muodostumisen vaikutus eri virheiden suuruuteen . . . . .	330
13.2	GPS:n havainto- ja erotussuureet, yhteenveto . . . . .	332
13.3	Ratavirheen, vektorin pituuden ja paikannusvirheen väli- nen yhteys . . . . .	333
14.1	Mittaustulokset lineaarista regressiota varten . . . . .	361
14.2	Pistejoukko kahdessa eri koordinaatistossa . . . . .	384
14.3	Laskentaskripti Helmertin muunnosta varten . . . . .	386
15.1	Suunnittelu- ja mittausprosessi . . . . .	393
15.2	Merkitsevyystasojen hylkäysrajat standardi normaalijakau- maan perustuvassa kaksipuolisessa testissä . . . . .	397
15.3	Lineaarisen regression esimerkki . . . . .	398
15.4	Khii-toiseen -jakauman arvot . . . . .	399
15.5	Lineaarisen regression laskennan esimerkki . . . . .	400
15.6	Lineaarisen regression esimerkki jos on simuloitu karkea virhe . . . . .	401
15.7	Hylkäysraja ja merkitsevyystaso, normaalijakauma . . . . .	403
15.8	Karkean virheen koko ja testin vastaava erotuskyky . . . . .	403
15.9	Deformaatioanalyysi tasossa, koordinaatit . . . . .	414
16.1	Normaalipotentiaali ja -painovoima GRS80-järjestelmän mukaan . . . . .	423
16.2	Eri korkeustyyppien ominaisuudet . . . . .	438
17.1	Keplerin kolmas laki Maan satelliiteille . . . . .	466

## Kuvat

1.1	Kuunpimennys . . . . .	2
1.2	Eratostheneen astemittaus . . . . .	2
1.3	Snelliuksen astemittaus . . . . .	4
1.4	Luotiviivojen suuntaeron määrittäminen tähtitieteellisesti . . . . .	5
1.5	Maapallon eri massajakautumamallit . . . . .	6
1.6	Pyörähdysellipsoidin parametrit . . . . .	7



1.7	Lapin astemittaus . . . . .	9
1.8	Struven ketjun pohjoisin piste . . . . .	10
1.9	Luotiviivan poikkeamia ja geoidin muoto . . . . .	11
1.10	Geodeettinen viiva tasossa, pallolla ja ellipsoidilla . . . . .	12
1.11	Yhdyskuntasuunnittelu . . . . .	19
2.1	Julkinen standardimetri Pariisissa . . . . .	24
2.2	Esimerkkejä erityyppisistä virheistä . . . . .	30
2.3	Jatkuvan 2-D-arvojoukon stokastinen suure . . . . .	33
2.4	Todennäköisyystiheysjakauma histogrammien limiittinä . . . . .	33
2.5	Normaalijakauman ominaisuudet . . . . .	34
2.6	Normaalijakauman todennäköisyysarvoja . . . . .	35
2.7	Eri korrelaatioiden esimerkkejä . . . . .	37
2.8	Kaksiulotteinen todennäköisyystiheysjakauma . . . . .	39
2.9	Kolmiomittaus mittapöydän ja kiikariviivaimen avulla . . . . .	42
2.10	Stereomallin muodostaminen fotogrammetriassa . . . . .	44
2.11	Greenwichin meridiaani turisteille . . . . .	48
2.12	Suorakulmaiset ja geodeettiset koordinaatit . . . . .	49
2.13	Geodeettiset koordinaatit . . . . .	50
3.1	Maan kaarevan pinnan kuvaaminen karttatasolle eri pro- jektioiden avulla . . . . .	55
3.2	Systemaattinen siirtymä tieverkon ja ilmakuvapohjan välil- lä . . . . .	56
3.3	Maan pinnan kuvaaminen kapeana kaistana tasolla . . . . .	58
3.4	KKJ:n Gauss-Krüger-karttaprojektion kaistanjako . . . . .	59
3.5	KKJ:n yhden kaistan geometria . . . . .	60
3.6	Gauss-Krüger-projektion ja UTM-projektion mittakaavavää- ristymä . . . . .	62
3.7	Maanmittauslaitoksen kolmioittain affiinin muunnos . . . . .	64
3.8	Geodeettiset tasokoordinaatit ja tason kvadrantit . . . . .	65
3.9	Paikallinen koordinaatisto . . . . .	66
3.10	Tilapäiset koordinaatit . . . . .	67
3.11	Geodeettinen päätehtävä tasokoordinaateissa . . . . .	68
3.12	Arctangentin puolikulmakaava . . . . .	70
3.13	Friedrich Robert Helmert . . . . .	71
3.14	Yhdenmuotoisuus- eli Helmertin muunnos tasossa . . . . .	72
3.15	Helmertin tasomuunnoksen vaiheet . . . . .	73



3.16	Metsähovin tutkimusasemalla sijaitseva N2000-korkeus-	
	datumin pääkiintopiste PP2000 . . . . .	78
3.17	Vaihtoehtoisia korkeusdatumeita . . . . .	79
3.18	Tasoverkon kaksi eri datumia . . . . .	81
4.1	Eri korkeustyytit kuvaavat geopotentialilukuja eri tavalla	
	metrisiksi korkeuksiksi . . . . .	89
4.2	Ortometriset korkeudet ovat metrisiä etäisyyksiä geoidista	90
4.3	Keskeiset vertauspinnat ja korkeuskäsitteet . . . . .	91
4.4	Suomen geoidimalli FIN2000 . . . . .	92
4.5	Vaaituksen geometria . . . . .	94
4.6	Vaaituskoje . . . . .	95
4.7	Kaukoputki . . . . .	97
4.8	Mittauskaukoputki . . . . .	98
4.9	Mittauskaukoputken parallaksi . . . . .	99
4.10	Putkitasain . . . . .	99
4.11	Kenttätarkistuksen geometria . . . . .	100
4.12	Vaaituskojeen horisontin säätö . . . . .	102
4.13	Vanha itsetasaava vaaituskoje . . . . .	103
4.14	Nykyaikainen itsetasaava vaaituskoje . . . . .	104
4.15	Heilurikompensoattorin toimintaperiaate . . . . .	104
4.16	Vaaituslatat ja lehvistö . . . . .	105
4.17	Latta-asteikon jaotusvaihtoehtoja . . . . .	107
4.18	Vaaituksen väliaikaisia latanalustoja . . . . .	108
4.19	Linjavaaitus . . . . .	109
4.20	Pintavaaitus . . . . .	110
4.21	Itselaskeva vaaituslatta . . . . .	110
4.22	Lasertason toimintaperiaate . . . . .	112
4.23	Profili ja poikkileikkauksia . . . . .	112
4.24	Metsähovin tutkimusasema ilmasta . . . . .	114
5.1	Vanhanaikainen teodoliitti . . . . .	118
5.2	Vaakakulma ja zenittikulma . . . . .	119
5.3	Teodoliitin akselit ja kehät . . . . .	120
5.4	Teodoliitin rakenne . . . . .	121
5.5	Pakkokeskistyslaite eli -alusta . . . . .	123
5.6	Eri maastomerkkityyppejä . . . . .	123
5.7	Teodoliitin akselit . . . . .	124
5.8	Teodoliitin tarkka tasaus alhidaditasaimen avulla . . . . .	126

5.9	Riippuluoti ja sauvaluoti . . . . .	127
5.10	Optinen luoti . . . . .	128
5.11	Kiintopiste nähtynä optisen luodin kautta . . . . .	129
5.12	Optista luotia ja rasiatasainta käytetään yhdessä . . . . .	129
5.13	Ongelmatilanne . . . . .	130
5.14	Pakkokeskistuksen periaate . . . . .	131
5.15	Verkon mittaus pakkokeskistystä käyttäen . . . . .	131
5.16	Optisen luodin tarkistus . . . . .	133
5.17	Hyviä tähyksiä vaakakulmien mittauksessa . . . . .	134
5.18	Kohdistus . . . . .	134
5.19	Lukemamikroskoopin eri tyypit . . . . .	136
5.20	Optinen mikrometri ja sen lukeminen . . . . .	137
5.21	Jakokehän lukeminen. Yksi kehäpaikka . . . . .	138
5.22	Jakokehän lukeminen. Kaksi vastakkaista kehäpaikkaa . .	138
5.23	Tähtäysakselin kääntäminen hiusviivaristikon siirtämisellä	140
5.24	Tappikaltevuus . . . . .	142
5.25	Zeniittikulman havaitseminen . . . . .	143
5.26	Indeksivirhe . . . . .	144
5.27	Gray-koodi . . . . .	146
5.28	Absoluuttinen ja inkrementaalinen koodauskehä . . . . .	147
5.29	Elektroninen vaakakehän lukeminen . . . . .	148
5.30	Pyörivä kehä muuntaa kulmamittauksen aikaeron mittauk- seksi . . . . .	149
5.31	Leica TCA2003-robottitakymetrin ohjauspaneeli . . . . .	150
5.32	Leica TCA2003 -robottitakymetri . . . . .	151
6.1	Eri vaakakulmamittauksen käyttötilanteita . . . . .	154
6.2	Eteen- ja taaksepäin leikkaus . . . . .	155
6.3	Sarjahavaintomenetelmä . . . . .	158
6.4	Avoin ja suljettu monikulmiojono . . . . .	167
6.5	Avoin monikulmiojono . . . . .	168
6.6	Suljetun monikulmiojonon kuvio . . . . .	170
6.7	Refraktion ja Maan kaarevuuden vaikutus zeniittikulman mittauksessa . . . . .	176
6.8	Trigonometrinen vaaitusjono . . . . .	178
6.9	Kojeen ja tähyksen korkeus . . . . .	179
7.1	Mittanauhan painumakorjaus . . . . .	182
7.2	Vinoetäisyyden kaltevuusreduktio . . . . .	183



7.3	Aaltoliikkeen vaihe . . . . .	184
7.4	Sähkömagneettinen säteilyspektri . . . . .	186
7.5	Sähkömagneettisen säteilyn polarisaatio . . . . .	187
7.6	Väisälän interferenssimenetelmä . . . . .	189
7.7	Dendrokronologia . . . . .	189
7.8	Fizeaun menetelmä valon nopeuden mittaamiseksi . . . . .	191
7.9	Elektronisen vaihemittauksen eräs menetelmä . . . . .	192
7.10	Ambiguiteetit eli kokonaislukutuntemattomat ratkaistaan käyttämällä useita eri aallonpituuksia . . . . .	193
7.11	Kuutioprisma . . . . .	194
7.12	Prismojen patteri pitkille mittausetäisyyksille . . . . .	194
7.13	Kuutioprisamalla varustetun tähtyksen kohdistus . . . . .	195
7.14	Toinen nopeuskorjaus . . . . .	200
7.15	Etäisyysmittauksen maastokorjaus . . . . .	201
7.16	Etäisyysmittauksen reduktio vertaustasolle . . . . .	202
8.1	Verkkohierarkian merkitys ja usein tehdyt virheet . . . . .	209
8.2	Suomen jatkuvasti toimiva GNSS-verkko FinnRef . . . . .	210
8.3	EUREF-FIN ensimmäisen vaiheen tihennysverkko . . . . .	211
8.4	Kolmiomittausverkko ja monikulmiojono avaruudessa . . . . .	212
8.5	Vertausellipsoidin ja karttaprojektiotason käyttö Maan kar- toituksessa . . . . .	213
8.6	Pienen verkon tasoituksen geometrian siirtäminen kartta- projektiotasolle . . . . .	216
8.7	Suorakulmaisen kartoitusmenetelmän apuvälineet . . . . .	217
8.8	Suorakulmainen kartoitus . . . . .	218
8.9	Sidoslinjamittaus . . . . .	219
8.10	Säteittäinen kartoitus . . . . .	220
8.11	Vapaan asemapisteen kartoitus . . . . .	221
8.12	Kartoitusmittauksen työskentelykaavio . . . . .	224
8.13	Maastotietojen koodausprosessi . . . . .	225
8.14	Kohteiden ominaisuustiedot eri kerroksina . . . . .	226
9.1	Maastoon merkintä eli ”paalutus”, prosessikuvaus. . . . .	231
9.2	Kaavan laskenta — esimerkki . . . . .	232
9.3	Maastoon merkintä säteittäisellä kartoitusmenetelmällä . . . . .	232
9.4	Suora merkitsemistapa . . . . .	233
9.5	Kulmien pyöristys ympyrän kaarella . . . . .	234
9.6	Kulmien pyöristys korikäyrällä . . . . .	235

9.7	Klotoidin periaate . . . . .	237
9.8	Työkoneohjaus, tapaus Itä-Schelde . . . . .	241
10.1	Globaali maastomalli ETOPO2 versio 2 Suomen alueella . .	247
10.2	Maastomallien esitystapoja: kolmiointi vai pistehila . . . .	248
10.3	Merkitsemissmittojen käyttö pinta-alojen laskennassa . . . .	251
10.4	Pinta-alan laskenta . . . . .	252
10.5	Napaplanimetri vuodesta 1908 . . . . .	253
10.6	Planimetriyhtälön graafinen todistus . . . . .	254
10.7	Simpsonin integrointisääntö tilavuuslaskennassa . . . . .	255
10.8	Neliöinnin vaihtoehdot . . . . .	256
10.9	Tilavuuslaskenta digitaalisista maastomalleista . . . . .	257
11.1	Inertiaalinen ja terrestrinen koordinaattijärjestelmä . . . .	260
11.2	Oikeakätinen koordinaatisto . . . . .	261
11.3	Geosentrinen ja geodeettinen leveysaste sekä poikittaiskaarevuussäde . . . . .	262
11.4	Toposentrinen ja geosentrinen koordinaatisto . . . . .	263
11.5	Differentiaalinen yhteys suorakulmaisten ja geodeettisten koordinaattien välillä . . . . .	268
11.6	Datumimuunnoksen vaikutus eri geodeettisiin suureisiin .	269
11.7	Paikallisen luotiviivan poikkeama vertausellipsoidin pinnan normaalista . . . . .	270
11.8	Laplace-ilmio: luotiviivan poikkeaman vaikutus atsimuuttiin . . . . .	272
11.9	Greenwichin geometria: pituusaste on <i>suunta</i> eikä <i>paikkaa</i>	276
12.1	Decca-järjestelmä . . . . .	279
12.2	Decca-vastaanotin . . . . .	279
12.3	NNSS Transit-järjestelmä . . . . .	281
12.4	Paikannussatelliitteja . . . . .	282
12.5	GPS-järjestelmän kolme segmenttiä eli lohkoa . . . . .	284
12.6	Alkuperäinen GPS-konstellaatio . . . . .	286
12.7	Vaihemodulaation periaate . . . . .	287
12.8	Korrelaatiomenetelmä GPS-signaalin kulkuajan määrittämiseksi . . . . .	288
12.9	GPS-signaalin eri taajuudet ja teholliset aallonpituudet . .	289
12.10	Ashtech Z-12:n ohjauspaneeli . . . . .	292
12.11	<i>Choke-ring</i> -GPS-antenni tarkkaan geodeettiseen työhön . .	293



12.12 Antennin sähköisen keskuksen paikka ei ole itsestään selvä asia . . . . .	293
12.13 Pseudoetäisyshavainto . . . . .	297
12.14 GPS-signaalin kantoaallon vaiheen mittaus . . . . .	299
12.15 Aaltopakettien kulku dispersiivisessä väliaineessa . . . . .	299
12.16 GPS-paikannuksen geometria . . . . .	302
12.17 GPS-satelliitin ja havaintopaikan välinen geometria . . . . .	304
12.18 DOP-ellipsoidi, virhe-ellipsoidi ja painoyksikön keskivirhe .	310
12.19 DOP-ellipsoidi, koordinaattiakselien suuntaiset pääakselit .	310
12.20 Ympyräsingulaarisuus eli ”vaarallinen ympyrä” GPS:lle . .	315
12.21 DOP-suureiden laskennan esimerkki . . . . .	316
12.22 GPS-satelliittien kuusi ratatasoa Helsingin taivaalla . . . .	318
12.23 Satelliitin rataliike kuvattuna paikka- ja nopeusvektorin avulla . . . . .	319
12.24 IGS:n seuranta-asemat . . . . .	323
13.1 ”Yhteinen virhe” -oletamus . . . . .	327
13.2 Erityyppisten erotushavaintojen muodostaminen . . . . .	329
13.3 Kaksoiserotus, lyhyt GPS-vastaanotinten välinen etäisyys .	333
13.4 Yksiulotteinen ambiguiteettiratkaisu, etäisyysmittaus . . .	334
13.5 Eri ambiguiteettiratkaisumenetelmät . . . . .	335
13.6 DGPS-menetelmän toimintaperiaate . . . . .	338
13.7 RTK-menetelmän toimintaperiaate . . . . .	340
13.8 Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät (SBAS) . . . . .	344
14.1 Kolmiomittausverkko . . . . .	350
14.2 Vertauskuva: suuri paino merkitsee pientä korjausta . . . .	351
14.3 Lineaarisen regression idea . . . . .	353
14.4 Lineaarinen regressio, suureiden määritelmät . . . . .	353
14.5 Lineaarisen regression laskuesimerkki . . . . .	362
14.6 Yksiulotteinen kuvaus ja linearisointi . . . . .	364
14.7 Kaksiulotteinen kuvaus . . . . .	366
14.8 Virhe-ellipsiin liittyvät suureet . . . . .	370
14.9 Atsimuuttimittauksen geometria . . . . .	377
14.10 Zeniittikulmamittauksen geometria . . . . .	379
15.1 Pienimmän neliösumman tasointi ortogonaalisena projektiona . . . . .	391
15.2 Khii-toiseen-jakauma neljälle vapausasteelle . . . . .	395
15.3 Lineaarisen regression esimerkki, virhe havainnossa 3 . . .	402



15.4	Tilastollinen testaus normaalijakauman perusteella . . . . .	402
15.5	Kokonaisvalidoinnin ja havaintokohtaisten testien merkitsevyystasojen harmonisointi . . . . .	405
15.6	Luotettavuuden esimerkki . . . . .	405
15.7	Luotettavuuden toinen esimerkki . . . . .	406
15.8	Korkeuden deformaation seurantaverkko . . . . .	411
15.9	Tasodeformaation seurantaverkko . . . . .	413
16.1	Absoluuttinen eli ballistinen gravimetri . . . . .	419
16.2	Relatiivinen eli jousigravimetri . . . . .	419
16.3	Maaston korkeus korkeuskäyrillä kuvattuna ja korkeusgradientit . . . . .	420
16.4	Geopotentialipöytä . . . . .	421
16.5	Maan normaalipainovoimakenttä . . . . .	423
16.6	Geopotentialin ja normaalipotentialin tasapotentialipinnat ja voimaviivat . . . . .	424
16.7	Todellisen painovoimakentän ja normaalipainovoimakentän tasapotentialipinnat . . . . .	425
16.8	Todellisen painovoiman ja normaalipainovoiman vektorit . .	426
16.9	Maan painovoiman ja geoidin korkeuden vaihtelujen välinen yhteys . . . . .	428
16.10	Stokesin integraaliyhtälön geometria . . . . .	429
16.11	Maaailman geoidimalli EGM2008 . . . . .	431
16.12	Painovoimavektori on geopotentialin <i>gradientti</i> . . . . .	432
16.13	Työn polkuintegraali . . . . .	433
16.14	Korkeudet ja tasapotentialipinnat . . . . .	434
16.15	Ilma- ja Bouguer-anomaliat Etelä-Suomessa . . . . .	439
16.16	Vuoriston juuri ja sen vaikutus luotiviivaan . . . . .	441
16.17	Astrolabiksi muunneltu vaaituskoje . . . . .	442
16.18	Gravitaation gradientti eli vuoroveden voimakenttä . . . . .	443
17.1	Maan kiertorata Auringon ympäri ja Auringon näennäinen polku taivaanpallolla . . . . .	448
17.2	Kevätpäiväntasauspiste ja sen liike eli <i>prekessio</i> . . . . .	449
17.3	Tuntikulma ja deklinaatio taivaanpallolla . . . . .	450
17.4	Yrjö Väisälän tähtikolmiomittaus (a) . . . . .	452
17.5	Yrjö Väisälän tähtikolmiomittaus (b) . . . . .	453
17.6	Satelliittigeodesiaa NASAn kuva-arkistosta . . . . .	455
17.7	Napaliike vuosien 1970–2000 aikana . . . . .	456



17.8	Napaliike aiheuttaa asemien leveysasteen vaihteluita . . . .	457
17.9	Maan prekessioliike . . . . .	460
17.10	Auringon korona . . . . .	461
17.11	Auringonpilkkuja ja niiden magneettisia kenttäviivoja . . .	462
17.12	Avaruussää, magnetosfääri . . . . .	463
17.13	Ellipsi, määritelmä ja miten piirtää . . . . .	464
17.14	Keplerin rata-alkiot . . . . .	465
17.15	Aurinkosynkrooni rata . . . . .	467
18.1	LAGEOS-satelliitti . . . . .	471
18.2	Pitkäkantainterferometrian toimintaperiaate . . . . .	472
18.3	Metsähovin radioteleskooppi VLBI-mittauksia varten . . . .	473
18.4	Wegenerin mannerliiketeoria ja Atlantin keskiselänne . . .	474
18.5	Maan sisäinen rakenne . . . . .	475
18.6	Paleomagnetismi ja merenpohjan leveneminen . . . . .	476
18.7	Maaplaneetan laattatektoniikka . . . . .	477
18.8	Laattatektoniikan mekanismit . . . . .	478
18.9	Postglasiaalinen maannousu Fennoskandiassa . . . . .	480
18.10	BIFROST-projektin määrittämät vaaka- ja pystyliikkeet Fennoskandiassa . . . . .	481
18.11	InSAR-kuva . . . . .	484
18.12	Maan gravitaatiokentän määrittäminen matalalla lentävän satelliitin rataseurannan avulla . . . . .	486
18.13	GRACE-satelliittiparin perusidea . . . . .	486
18.14	Maan gravitaatiokentän määrittäminen GOCE-satelliitin gravitaatiogradiometrin avulla . . . . .	488
18.15	GOCE-mission tuottama meritopografiakartta . . . . .	489
18.16	Vesihöyryn kyllästymisospaine . . . . .	491
18.17	GNSS:n käyttö troposfäärin tutkimuksessa . . . . .	491
18.18	GNSS-radio-okkultaatio . . . . .	492
18.19	Milankovićin syklit viimeisten 800 000 vuoden aikana . . .	494
18.20	Satelliittialtimetrian mittausteometria . . . . .	496
18.21	Meritopografian ja merivirtausten välinen yhteys . . . . .	497
18.22	Itämeren mareografit, Seasatin maaratoja ja keskimeren- pinta . . . . .	500
18.23	<i>Schematic of the Earth's orbital changes (IPCC)</i> . . . . .	501





# Lyhenteet

## ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

### A

**ANNA 1B** ("Army, Navy, [NASA](#), Air Force"), 1962-60A, geodeettinen satelliitti [454](#)

**APPS** Automatic Precise Positioning Service ([JPL](#)) [347](#), [348](#)

**ARP** antenna reference point, [GNSS](#)-antennin vertauspiste [292](#)

**ATR** automatic target recognition, automaattinen kohdetunnistus [147](#), [150](#), [152](#)

**AUSPOS** australialainen online [GPS](#)-laskentapalvelu [347](#), [348](#)

### B

**BGI** *Bureau Gravimétrique International*, Kansainvälinen gravimetrinen toimisto [439](#)

**BIFROST** Baseline Inferences for Fennoscandian Rebound, Sea level, and Tectonics, pohjoismainen geodynamiikan tutkimusprojekti [481](#)

**BIPM** *Bureau International des Poids et Mesures*, Kansainvälinen paino- ja mittatoimisto [23](#)

### C

**C/A-koodi** Coarse / Acquisition, Civilian Access [GPS](#)-koodi [285–287](#), [289–291](#), [294](#), [297](#), [339](#)

**CAD** computer-aided design [21](#), [54](#), [249](#)

**Caltech** California Institute of Technology [484](#)

**CCD** charge-coupled device, kuva-anturityyppi [104](#), [147](#), [148](#), [150](#)

**CDMA** code division multiple access, koodijakokanavointi [287](#), [336](#)

**CERN** *Organisation européenne pour la recherche nucléaire*, Euroopan hiukkasfysiikan tutkimuslaitos [111](#)

**CHAMP** 2000-39B, Challenging Minisatellite Payload, saksalainen satelliitti [485](#), [492](#)

**CIO** Conventional International Origin, napaliikkeen vertausnapa [458](#)

### D

**Decca** merinavigaatiojärjestelmä [45](#), [278–281](#), [324](#), [340](#)

**DEM** digital elevation model, digitaalinen korkeusmalli 245, 250

**DGPS** differentiaalinen GPS 337–339, 341, 342, 345, 346

**DHM** digital height model, digitaalinen korkeusmalli 245

**DNA** deoxyribonucleic acid, deoksiribonukleiinihappo, kierteen muotoinen makromolekyyl, joka kantaa ja monistaa lähes kaikkien maapallon eliöiden geneettistä informaatiota 185

**DOP** dilution of precision, satelliittipaikannuksen geometrisen vahvuuden mitta. ”Tarkkuuden laimennus”, ”noggrannhetens utspädning” xxv, xxvii, xxviii, 306, 307, 309–311, 316, 324–326

**DORIS** Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite, ranskalainen satelliittipaikannusjärjestelmä 208, 470, 473

**DTM** digital terrain model, digitaalinen maastomalli 245, 250, 439

**DVD** Digital Versatile Disc 224

**DWT** discrete wavelet transform, diskreetti aallokemuunnos 249

## E

**ECEF** Earth-centred, Earth-fixed, ”Maan mukana pyörivä” 260

**ED50** European Datum 1950 10, 266, 271, 273–275

**EEST** Eastern European Summer Time, Suomen kesäaika 47

**EET** Eastern European Time, Suomen talviaika 47

**EGM2008** Earth Gravity Model 2008 115, 431, 439

**EGM96** Earth Gravity Model 1996 115

**EGNOS** European Geostationary Navigation Overlay System, Euroopan alueen SBAS 343

**eLoran** navigointijärjestelmä, suunnitteilla (”Enhanced Loran”) 278

**EOP** Earth orientation parameters 84, 324, 458

**ERT** electrical resistivity tomography 242

**ET** ephemeris time, efemeridiaika 458

**ETRF** European Terrestrial Reference Frame 77, 274, 275

**ETRS** European Terrestrial Reference System. Yhtyy ITRS:ään epookilla 1989.0. Toinen nimi ETRS89 xxiv, 57, 58, 77, 85, 273, 274

**ETRS-GK** Suomen Gauss-Krüger-karttaprojektiojärjestelmä 61, 229, 384

**ETRS-TM35FIN** Suomen UTM-karttaprojektio, kaista 35 61, 63, 86

**EUREF IAG** Reference Frame Subcommittee for Europe 57, 85, 275, 346

**EUREF89** ETRS89:n ensimmäinen eurooppalainen realisointi 57, 274

**EUREF-FIN** ETRS89:n valtakunnallinen realisointi 48, 57, 58, 61, 84, 207, 208, 210, 211, 227, 229, 273–275

## F

**FAT** file allocation table (tiedostojärjestelmä) 152

**FDMA** frequency division multiple access, taajuusjakokanavointi 336

**FGI** Finnish Geodetic Institute, Geodeettinen laitos, 1918–2015, Finnish Geo-



spatial Research Institute, Paikkatietokeskus [FGI](#), 2015– [xxv](#), [78](#), [210](#),  
[346](#), [473](#), [501](#)

**FIN2000** Suomen geoidimalli [92](#)

**FIN2005N00** Suomen geoidimalli [273](#)

**FRS** Fellow of the Royal Society (of London) [184](#), [190](#), [387](#), [412](#), [476](#), [494](#), [512](#)

**FRSE** Fellow of the Royal Society of Edinburgh [184](#), [190](#), [412](#), [476](#), [512](#)

## G

**GAST** Greenwich Apparent Sidereal Time [449](#), [450](#), [468](#)

**GCM** general circulation model, yleinen virtausmalli [250](#)

**GCP** ground control point, ilmakartoituksen tukipiste [248](#)

**GDOP** geometrinen [DOP](#) [306](#), [307](#), [309](#)

**GIA** glacial isostatic adjustment [84](#), [478](#), [480](#), [499](#)

**GIS** geographic information system, paikkatietojärjestelmä [21](#)

**GKT** geodeettinen käänteistehtävä [69](#)

**GLONASS** Global Navigation Satellite System (venäläinen) [277](#), [278](#), [311](#), [323](#),  
[333](#), [336](#), [342](#), [344](#), [469](#)

**GMT** Greenwich Mean Time [47](#)

**GNSS** Global Navigation Satellite Systems, yleisnimitys globaaleille satelliitti-  
paikannusjärjestelmille [xxiii](#), [xxvi](#), [xxvii](#), [21](#), [45](#), [47](#), [84](#), [85](#), [115](#), [124](#),  
[130](#), [131](#), [154](#), [166](#), [179](#), [194](#), [199](#), [206](#), [208–211](#), [214](#), [222](#), [227](#), [230](#), [240](#),  
[241](#), [274](#), [275](#), [278](#), [294](#), [321](#), [323](#), [324](#), [333](#), [334](#), [336](#), [345–347](#), [425](#), [455](#),  
[457](#), [458](#), [469](#), [470](#), [472](#), [481–483](#), [487–493](#), [496](#), [497](#), [499](#), [501](#), [502](#)

**GOCE** Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer [93](#), [487–489](#),  
[498](#), [502](#)

**GPR** ground-penetrating radar, maatutka [242](#)

**GPS** Global Positioning System [ii](#), [xxiii–xxv](#), [xxvii](#), [xxviii](#), [14](#), [45](#), [46](#), [48](#), [91](#), [114](#),  
[160](#), [188](#), [189](#), [192](#), [199](#), [210](#), [228](#), [274](#), [277](#), [278](#), [280–291](#), [293](#), [294](#), [296](#),  
[297](#), [299–304](#), [306](#), [307](#), [310–312](#), [314](#), [315](#), [317–320](#), [323](#), [324](#), [326](#), [327](#),  
[330](#), [332–337](#), [339](#), [341–343](#), [346](#), [374](#), [458](#), [459](#), [463](#), [466](#), [469](#), [472](#), [477](#),  
[485](#), [486](#), [492](#), [493](#), [515](#)

**GPS/MET** 1995-17C, [GPS](#)-radio-okkultaatiosatelliitti [492](#)

**GPT** geodeettinen päätehtävä [67](#)

**GPU** geopotential unit, geopotentiaaliyksikkö,  $10\text{m}^2/\text{s}^2$  [433](#), [434](#)

**GRACE** 2002-12A, 2002-12B, Gravity Recovery and Climate Experiment. Tämä  
oli satelliittipari [485–487](#), [495](#), [502](#)

**GRS80** Geodetic Reference System 1980 [48](#), [61](#), [83](#), [85](#), [92](#), [114](#), [214](#), [273](#), [423](#),  
[431](#), [466](#)

**GSI (Leica)** Geo Serial Interface [152](#)

## H

**HDOP** vaakatason [DOP](#) [307](#), [309](#), [311](#), [314](#), [317](#), [326](#)



**I**

- IAG** International Association of Geodesy, Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio **xxiv**, **10**, **57**, **197**, **324**, **456**, **470**
- IB** inverted barometer, ylösalainen ilmapuntari **497**
- IERS** International Earth Rotation and Reference Systems Service **456**, **458**
- IGS** International GNSS Service **321**, **323**, **324**, **347**, **493**
- i.i.d.** independent and identically distributed, riippumattomat ja identtisesti jakautuneet **356**
- InSAR** interferometric SAR, interferometrinen synteettisen aukon tutka **484**, **485**
- INSPIRE** Infrastructure for Spatial Information in the European Community **246**
- IONEX** Ionosphere Map Exchange Format **493**
- IP** Internet Protocol **471**
- IPCC** Intergovernmental Panel on Climate Change, ilmastomuutosta käsittelevä hallitusten välinen paneeli **501**
- ITRF** International Terrestrial Reference Frame, ITRS:n realisointi **58**, **85**, **274**, **275**
- ITRS** International Terrestrial Reference System **xxiv**, **xxvi**, **266**

**J**

- Jason** 1–3, Joint Altimetry Satellite Oceanography Network, tutka-altimetria-satelliittien sarja **498**, **502**
- JHS** Julkisen hallinnon suositukset **207**
- JPEG 2000** kuvaformaatti **249**
- JPL** Jet Propulsion Laboratory, NASA **xxiii**, **324**, **345**, **347**, **484**
- JUHTA** Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta **207**

**K**

- KKJ** Kartastokoordinaattijärjestelmä (vanhentunut) **xxix**, **46**, **56–61**, **63**, **66**, **84**, **227**, **271**, **273**, **274**, **342**, **384**
- KM10** valtakunnallinen maastomalli, erotuskyky 10 m **246**
- KM2** valtakunnallinen maastomalli, erotuskyky 2 m **246**

**L**

- LAGEOS** 1–2, Laser Geodynamics Satellite **471**
- LAST** Local Apparent Sidereal Time **449**, **450**
- LCD** liquid crystal display, nestekidenäyttö **151**
- LED** light-emitting diode, hohtodiodi **44**, **191**
- LHC** Large Hadron Collider **111**
- LoD** length of day, vuorokauden pituus **84**, **324**, **456**
- Loran-C** merinavigointijärjestelmä **278**



**M**

**MHD** magnetohydrodynamiikka 461, 513

**MIF** *Institut de France*’n jäsen. Laitos koostuu viidestä oppineisuuden akate-  
miasta, mukaan lukien Ranskan tiedeakatemia 190

**MRI** magnetic resonance imaging, magneettikuvaus 459

**MSAS** Multi-functional Satellite Augmentation System (Japani) 343

**N**

**N2000** suomalainen korkeusjärjestelmä, epookki 2000.0 78, 91, 94, 109, 207,  
229, 273

**N60** suomalainen korkeusjärjestelmä, epookki 1960.0 77, 90, 94, 109, 271

**NAP** Normaal Amsterdams Peil, länsieurooppalainen korkeusdatumi 78, 91

**NASA** National Aeronautics and Space Administration, Yhdysvaltojen xxiii, xxvi,  
345, 454, 455, 484

**NGS** National Geodetic Survey, Yhdysvaltojen 85

**NNSS** Navy Navigation Satellite System, ”Transit”, ”Doppler” 278, 280, 281

**NOAA** National Oceanic and Atmospheric Administration, Yhdysvaltojen 246,  
489

**NUVEL** globaalinen laattaliikkeen malli 477

**NWP** numerical weather prediction, numeerinen sään ennustaminen 250, 456

**O**

**Omega** merinavigointijärjestelmä 278

**P**

**PAGEOS** 1966-56A, Passive Geodetic Earth Orbiting Satellite 454

**PC** personal computer, henkilökohtainen tietokone 152, 294

**PCMCIA** muistikorttiväylän standardi 152

**PDOP** sijainnin DOP 307, 309, 311, 326

**P-koodi** Precise / Protected GPS-koodi 285–287, 289–291, 294, 297, 339

**PPP** Precise Point Positioning, tarkka geodeettinen paikannustekniikka yhdellä  
GNSS-vastaanottimella 312, 345

**R**

**RINEX** Receiver-Independent Exchange Format 294, 296, 325, 345–347

**RS232** Recommended Standard 232, sarjaliitäntä 152

**RTCM** eli RTCM-SC104, ”Radio Technical Commission for Maritime Services  
Special Committee 104”, suosittu differentiaali-GNSS-standardi xxvii,  
344

**RTK** real-time kinematic positioning, tosiaikainen kinemaattinen paikannus  
xxviii, 21, 166, 208, 211, 216, 222, 228, 230, 312, 339–342, 344–346



**S**

**SA** selective availability (GPS) 337

**SAR** synthetic-aperture radar, synteettisen aukon tutka xxvi, 246, 485, 495

**SBAS** satellite-based augmentation systems, satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät xxiv, xxviii, 343, 344, 346

**Seasat** 1978-64A, tutka-altimetriasatelliitti 500

**SI** *Système International d'Unités*, kansainvälinen yksikköjärjestelmä 23–26, 181, 418, 433, 434, 437

**SoL** Safety of Life 285, 343

**SOPAC** Scripps Orbit and Permanent Array Center, San Diego, Yhdysvallat 346

**SP3** Standard Product 3, tarkkojen ratatietojen dataformaatti 321–323

**SRTM** Shuttle Radar Topography Mission 246, 258

**SST** satellite-to-satellite tracking, satelliittien välinen etäisyysmittaus 486

**T**

**TAI** *Temps Atomique International*, kansainvälinen atomiaika 458

**TDOP** ajan DOP 307, 309

**TEC** total electron content, elektronien kokonaistiheys 493

**TIN** triangulated irregular network 249

**TOPEX/Poseidon** 1992-52A, tutka-altimetriasatelliitti 498, 499, 502

**U**

**UDP** User Datagram Protocol 471

**UNAVCO** Voittoa tavoittelematon yliopistojen johtama konsortio, joka tukee geotieteiden tutkimusta ja koulutusta geodesian avulla. Lyhenteen alkuperäinen merkitys: University NAVSTAR Consortium 115, 478

**USB** Universal Serial Bus 152

**UTC** Universal Time, Co-ordinated, maailman siviiliaika 458, 459

**UTM** Universal Transverse Mercator (karttaprojektio) xxiv, 58, 61–63, 151, 203, 215, 273

**VW**

**WAAS** Wide Area Augmentation System, Pohjois-Amerikan alueen SBAS 343

**WADGPS** wide-area differential GPS 343

**VDOP** pystysuunnan DOP 307, 309, 311, 314, 317, 326

**VGOS** VLBI Global Observing System 473

**WGS84** World Geodetic System 1984 58

**VHS** Video Home System 471

**VLBI** very long baseline interferometry, pitkäkantainterferometria xxviii, 189, 208, 455, 457, 470, 472, 473

**VRS-RTK** virtual reference station RTK 344

**VVJ** Vanha valtion järjestelmä (vanhentunut) 57, 61, 271



**Y**

**YKJ** **KKJ**:n yhtenäiskoordinaatisto **61**







# Geodesian historia ja yhteiskunnallinen asema

# 1

[...] Nous avons été sur le fleuve, fort incommodés de grosses Mouches à tête verte, qui tirent le sang par-tout où elles picquent ; nous nous trouvâmes sur Niwa [Nivavaara], persécutés de plusieurs autres espèces encore plus cruelles.

---

Maupertuis (1738), PDF-sivu 44, sivu 16



## 1.1 Maan muoto: varhaiset käsitykset

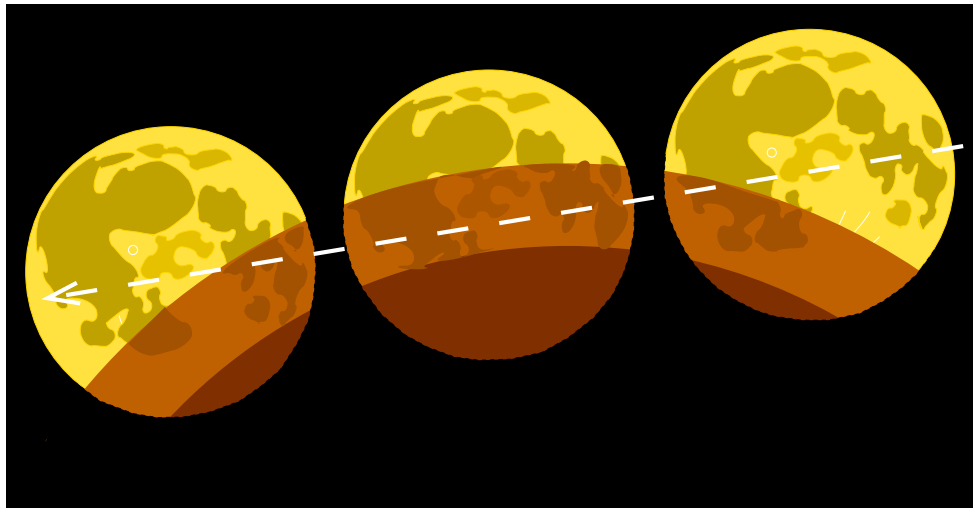
Muinaisissa yhteiskunnissa vallitseva käsitys Maan muodosta oli epäilemättä, että Maa on litteä kiekko, joka ulottuu horisonttiin ja taivas kaartuu kupuna sen yläpuolella. Kuvun sisäpinnalla taivaankappaleet kiertävät monimutkaisilla radoillaan. Myös lapsilla on yleensä samanlainen käsitys. Vasta kouluopetuksen myötä tämä ”naiivi maailmanmalli” väistyy. Psykologisesti, lapsen kehityksen kannalta, tämä ei ole mitenkään helppo prosessi, varmaan yhtä vaikea kuin aikanaan koko yhteiskunnalle tieteen historiallisen kehityksen vaiheena.

Kuitenkin jo muinaiset helleenit olivat tietoisia Maan pallonmuodosta. Ennakkoluulottomia kun olivat, jotkut olivat havainneet, miten kuunpimennyksen aikana maapallo heitti varjonsa Kuun pintaan. He havaitsivat myös, että kuunpimennys, joka näkyi Välimeren toisessa päässä korkealla taivaalla, tapahtui toisessa päässä lähellä horisonttia. Olettaen, että kyse oli samasta tapahtumasta, seurasi, että Maan pinnan oli oltava ainakin länsi-itäsuunnassa kaareva. Ja ilmaston kylmeneminen pohjoiseen kuljettaessa oli varhaisille havaitsijoille merkki siitä, että Maa on kaareva myös etelä-pohjoissuunnassa.

Eratosthenes, ”maantieteen isä”, eli 276–195 eaa<sup>1</sup>. Hän oli ensimmäi-

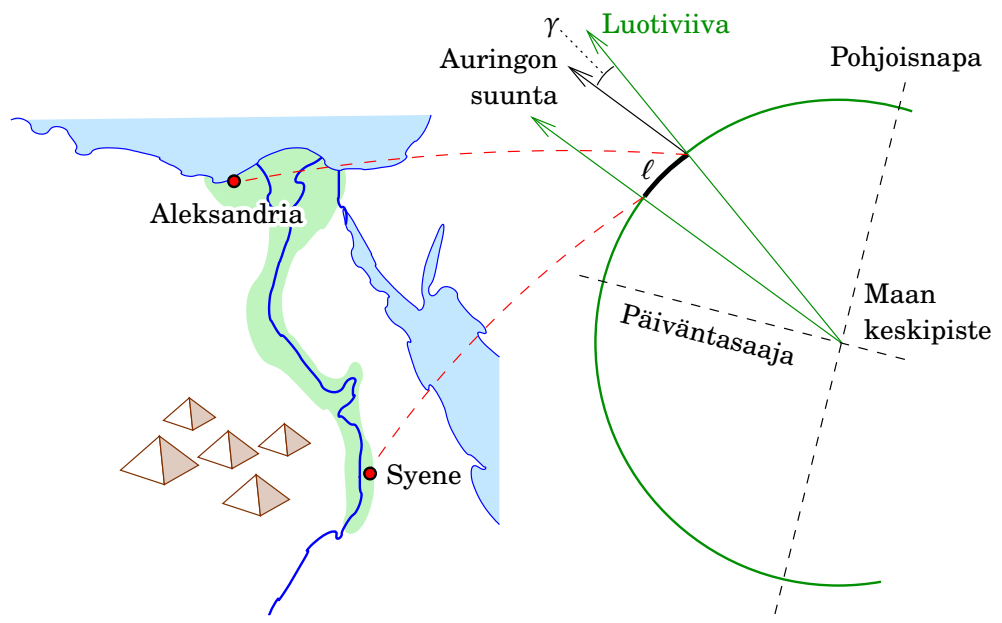
---

<sup>1</sup>”Ennen ajanlaskumme alkua”, tarkemmin, ennen kristillisen Euroopan ajanlaskun



KUVA 1.1. Kuunpimennys. Aina ympyrän muotoinen varjo näyttää, että Maa on oltava pallo.

siä, jotka mittasivat pallon muotoisen Maan koon eli säteen. Mittaus oli periaatteessa samanlainen kuin myöhemmät astemittaukset: tietyn kaaren pituus mitataan Maan päällä geodeettisin keinoin ja kaaren päätepisteiden välinen *luotiviivojen* suuntaero tähtitieteellisin keinoin. Yhdistämällä kaaren pituus  $\ell$  ja luotiviivojen suuntaero  $\gamma$  saadaan Maan



KUVA 1.2. Eratostheneen astemittaus.

alkuvuotta.



säteeksi

$$R = \frac{\ell}{\gamma}. \quad (1.1)$$

Katso kuva 1.2.

Tietoa luotiviivojen suunnista saatiin keskikesän Auringosta, joka Sye-  
nessä (nykyinen Assuan) ei heittänyt lainkaan varjoa<sup>2</sup>. Aleksandriassa<sup>2</sup>  
taas Aurinko ei ollut zenitissä, vaan varjojen pituuksien perusteella noin  
viideskymmenesosa ympyrää etelämpänä. Eratosthenes sai maapallon  
säteeksi<sup>3</sup> 6317–7420 km — aika lähellä nykyarvoa 6371 km.<sup>3</sup>

Lisätietoja löytyy kirjasta Torge (2001), sivut 5–6.

Geodesiassa tärkeän *kolmiomittauksen* periaatteen, jonka mukaan  
kolmioista koostuvan verkon geometria on yksiselitteisesti määritettä-  
vissä, jos kolmioiden kulmien lisäksi mitataan vain *yksi etäisyys*, keksi  
luultavasti Gemma Frisius<sup>4</sup> vuonna 1533 (Crane, 2002, sivut 56–57).<sup>4</sup>

Menetelmää käytettiin astemittauksen yhteydessä ensimmäistä ker-  
taa myös Alankomaissa käyttäen hyvinvoivan mutta litteän maan run-  
saslukuisia kirkontorneja. Snellius<sup>5</sup> oli ensimmäisiä, jotka käyttivät kol-  
miomittausta kaaren pituuden  $\ell$  määrittämiseksi. Mittaamalla verkossa  
vain kulmia yhden etäisyyden lisäksi hän onnistui määrittämään kahden  
kaupungin, Bergen op Zoomin ja Alkmaarin, välisen etäisyyden, vaikka  
kaupunkien välillä on Reinin suiston leveitä jokihaaroja (kuva 1.3).<sup>5</sup>

Kolmiomittauksen salaisuus on, että kulmamittausten avulla voi ra-  
kentaa, joko laskennallisesti tai graafisesti, koko mittausverkon *mitta-  
kaavamallin*, jossa kaikki suhteet ja muodot ovat oikeita. Oikean mit-  
takaavan määrittämiseksi riittää, että *yksi* mallissa oleva pituus mita-  
taan myös todellisuudessa. Snelliuksen tapauksessa tämä oli etäisyys  
 $pq$ , niityllä Leidenin lähellä oleva *perusviiva*, jonka pituus oli vain 326  
”roeden”<sup>6</sup>.<sup>6</sup>

*Tähtitieteellisen paikanmäärittäyksen* avulla voidaan määrittää kahden  
paikan luotiviivojen suuntien välinen ero (kuva 1.4). Kun matkustetaan

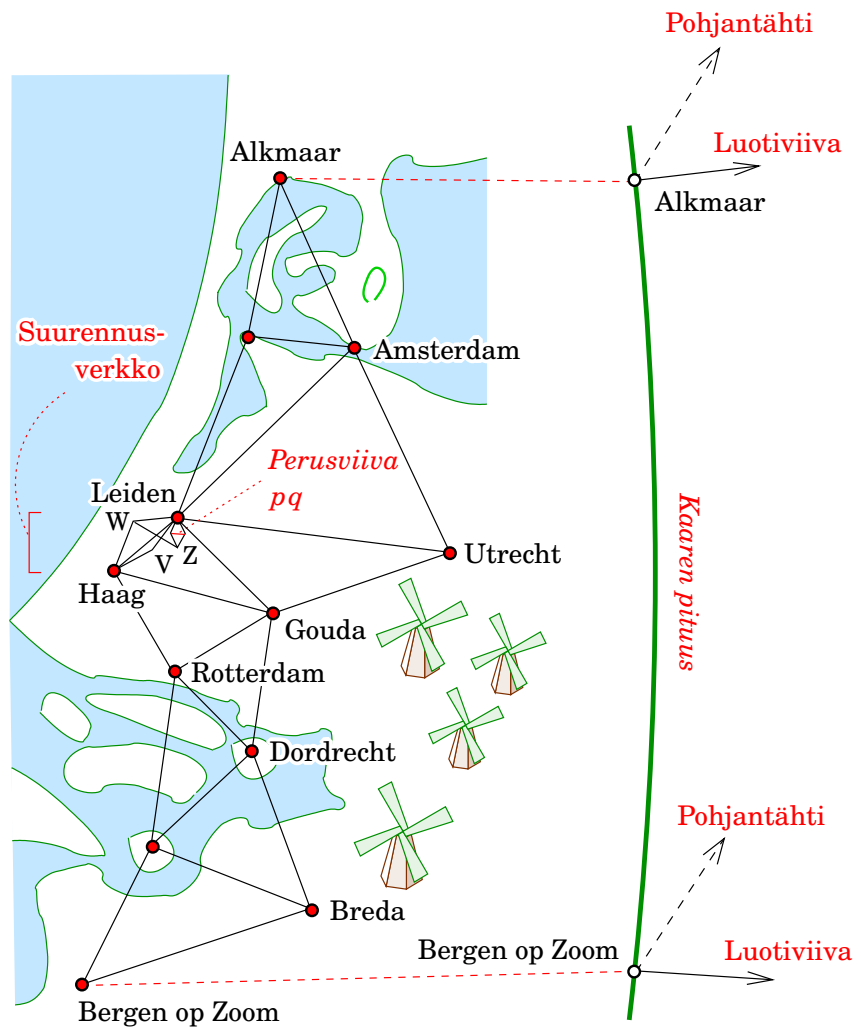
<sup>2</sup>Tarina, jonka mukaan hän käytti tietoa, että Aurinko valaisisi kaivon pohjaa, on ilmeisesti väärinkäsitys (Dreyer, 1914).

<sup>3</sup>Itse asiassa hän sai tuloksensa yksikössä nimeltä *stadium*, jonka pituus on vaihteleva. Eratostheneen käyttämä pituus on kiistanalainen.

<sup>4</sup>Gemma Frisius (1508–1555) oli hollantilainen monitieteilijä.

<sup>5</sup>Willebrord Snell van Rooyen (1580–1626) oli hollantilainen tähtitieteilijä ja matemaatikko.

<sup>6</sup>Snelliuksen käyttämä yksikön variantti oli ”*Rijnlandse roede*”, 3,766 m.



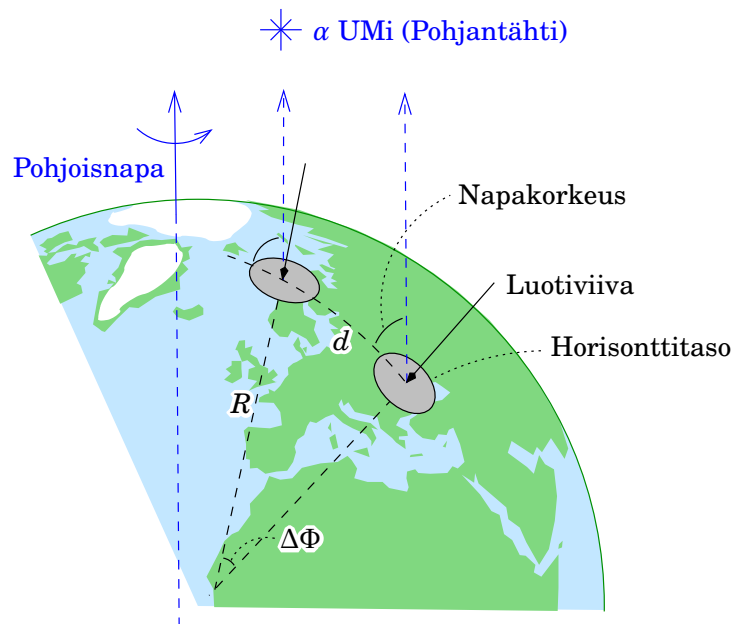
KUVA 1.3. Snelliuksen astemittaus. Perusviivan  $pq$  pituus on 326,45 roeden (1229 m). Pituus johdettiin paikallisen suurennusverkon kautta ai-noasta verkossa mitatusta pituudesta, alkuperäisperusviivasta, jon-ka pituus oli 87,05 roeden (328 m) (henkilökohtainen tiedotus L. Aar-doom).



V = Voorschoten, W = Wassenaar, Z = Zoeterwoude.

meridiaania pitkin etelä-pohjoissuunnassa, muuttuu paikallisen luoti-viivan *absoluuttinen suunta* eli suunta tähtitaivaaseen nähden. Myös paikallinen *horisonttitaso*, joka on aina kohtisuorassa luotiviivaa eli paikallisen painovoiman suuntaa vasten, kääntyy saman verran, kun matkustetaan etelä-pohjoissuunnassa — tai mihin suuntaan tahansa.

Maan pyörähdysakselin suunta avaruudessa on hyvin vakaa gyroskoop-pi-ilmiön ansiosta. Se osoittaa taivaalla paikkaan, jonka läheltä löytyy tähti  $\alpha$  Ursae Minoris eli Pohjantähti. Tähtien avulla nähdään pohjoisen suunta. Paikan *leveysaste*  $\Phi$  saadaan määrittämällä tähtitieteellisesti



KUVA 1.4. Luotiviivojen etelä-pohjoissuuntaisen suuntaeron  $\Delta\Phi$  tähtitieteellinen määrittäminen. Suuntaerosta ja metrisestä etäisyydestä  $d$  voidaan laskea Maan kaarevuussäde  $R = d/\Delta\Phi$ , oletettu vakioksi.

tämän *taivaannavan* korkeuskulma horisontin yläpuolella. Tämä käy helpoimmin juuri Pohjantähden avulla, vaikka tarkka mittaus on hieman mutkikkaampi.

Mittaamalla näin tähtitieteellisin keinoin Alkmaarin ja Bergen op Zoomin luotiviivojen välinen suuntaero ja yhdistämällä se kolmiomittauksesta saadun metrisen etäisyyden kanssa, Snellius sai määrittetyksi Maan kaarevuussäteen. Menetelmää kutsutaan *astemittaukseksi*.

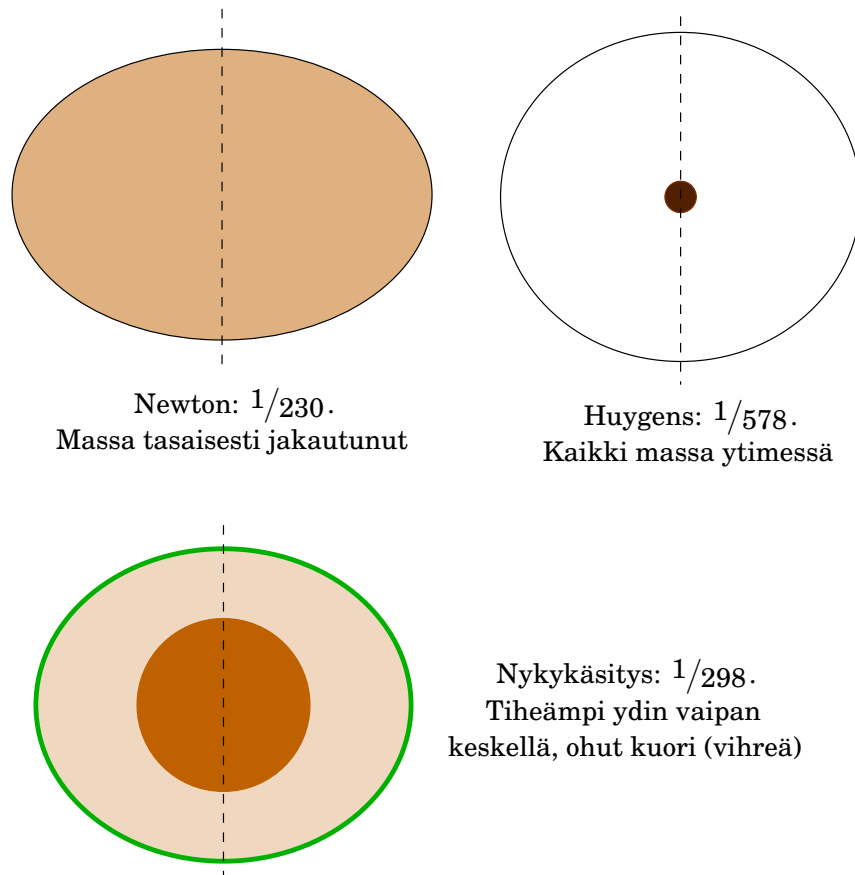
## 1.2 Newtonin lait ja Maan muoto

Maan muodon ymmärtämisessä otettiin suuri harppaus eteenpäin, kun Newton<sup>7</sup> julkaisi vuonna 1687 pääteoksensa *Principian* (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, ”Luonnonfilosofian [fysiikan] matemaattiset perusteet”). Opuksessa hän loi koko klassisen mekaniikan, mukaan lukien taivaanmekaniikan, perusteet.

**Universaalinen gravitaatiolaki** Kahden massan  $m_1$  ja  $m_2$  välillä toimii *vetovoima*  $F$ , jonka voimakkuus on

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

<sup>7</sup>Sir Isaac Newton (1642–1727) oli englantilainen fyysikko ja matemaatikko sekä klassisen mekaniikan isä.



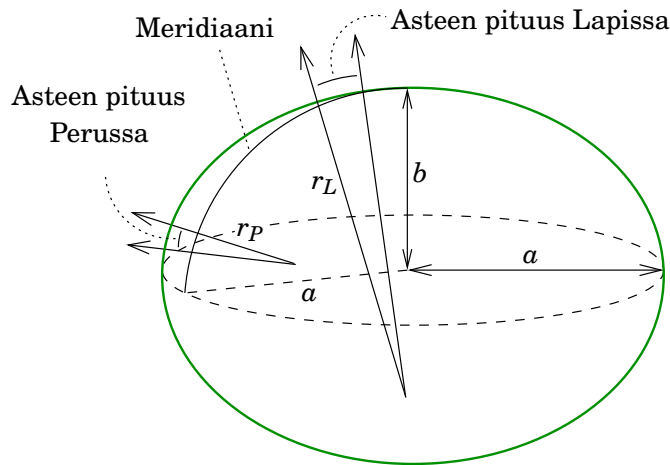
KUVA 1.5. Maapallon eri massajakaumamallit ja niiden teoreettiset litistyneisyysarvot.



jossa  $r$  on massojen välinen etäisyys. Vakio  $G$  on Newtonin universaalinen gravitaatiovakio, jonka arvo on  $6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ .

Sama vetovoima toimii *kaikkien* massaparien välillä. Siis Maan vetovoima ei vaikuta vain Kuuhun ja Auringon vetovoima Maahan, vaan Kuun vetovoima vaikuttaa myös Maahan ja niin edelleen. Geofysiikassa taas tiedetään, että vetovoima toimii myös kaikkien Maan eri *osien* välillä: meri, ilmakehä ja vuoristot vaikuttavat Maata ympäröivään gravitaatiokenttään. Ja koska maapallomme koostuu aineista, jotka — vaikkakin enemmän tai vähemmän vastahakoisesti — deformatuvat ulkoisen voiman vaikutuksesta, muovaa gravitaatio myös Maan fyysistä muotoa.

*Principiassa* Newton laski kuuluisten lakiensa avulla, että homogeeninen, nestemäinen, tasapainotilassa oleva ja kerran 24 tunnissa pyörivä maapallo, jonka nestealkioiden välillä toimii gravitaatiovoima, olisi keskipakovoiman vaikutuksesta navoiltaan *litistynyt* pyörähdysellipsoidi



KUVA 1.6. Pyörähdysellipsoidin parametrit.

(kuva 1.6). Litistyneisyyden (litistyssuhteen) määritelmä on

$$f = \frac{a-b}{a}, \quad (1.2)$$

jossa  $a$  ja  $b$  ovat maaellipsoidin isoakselin ja pikkuakselin puolikkaat, toisin sanoen, päiväntasaajan säde ja napasäde.

Newton laski litistyneisyyden teoreettiseksi arvoksi  $f = 1/230$ .

Olettamus, että maapallo on tiheydeltään homogeeninen, ei ole oikea. Christiaan Huygens oletti, että maapallon koko massa on keskittynyt sen keskipisteeseen, tai ainakin maapallon vetovoima tulee sen keskipisteestä, ja laski vuonna 1690, että litistyneisyys olisi vain  $f = 1/578$ . Kuten nykyisin tiedetään, on totuus näiden kahden ääriarvon välillä: maankuoren tiheys on luokkaa  $2,7 \text{ g/cm}^3$ , sen alla olevan vaipan tiheys on  $3,0\text{--}5,4 \text{ g/cm}^3$  ja Maan rautaytimen tiheys on  $10\text{--}13 \text{ g/cm}^3$ . Koko maapallon keskimääräinen tiheys on noin  $5,4 \text{ g/cm}^3$ . Vaikka tiheys kasvaakin rajusti Maan keskipisteeseen mentäessä, on huomattava osa Maan massasta kaukana sen keskipisteestä.

Newtonin aikana eli vaikutusvaltaisia tiedemiehiä, kuten tähtitieteilijä Cassini<sup>8</sup>, jotka uskoivat, että maapallo oli venynyt navoiltaan rugbyballon tapaan,  $b > a$ , eikä litistynyt. Kysymykseen oli etsittävä empiirinen ratkaisu!

Litistyneisyysongelma jäi ratkaisematta, kunnes puoli vuosisataa myöhemmin Ranskan tiedeakatemia järjesti kaksi retkikuntaa, toisen Suomen Lappiin, joka oli tuolloin osa Ruotsin valtakuntaa (1736–1737), ja

<sup>8</sup>Jean Dominique (Giovanni Domenico) Cassini (1625–1712) oli italialais-ranskalainen tähtitieteilijä — Saturnus-järjestelmän tutkija — matemaatikko, kartoittaja ja insinööri.

toisen Etelä-Amerikkaan Peruun (1735–1744). Retkikuntien tehtävänä oli mitata geodesian ja tähtitieteen mittauskeinoin *yhden asteen meridiaanikaaren pituus* kahdella eri leveysasteella: toinen päiväntasaajan lähellä Perussa, toinen pohjoisnavan lähellä Tornionlaaksossa. Kyse oli siis samanlaisesta *astemittauksesta* kuin se, joka Snellius suoritti yli vuosisataa aiemmin. . . . Tämä mittaus tapahtui kuitenkin kaukana kotimaasta, vieraissa maissa eri ilmastovyöhykkeillä, toinen jopa valtameren takana.

Mittausten idea on esitetty kuvassa 1.6. Tähtitieteellisten mittauksen avulla perustetaan etelä-pohjoissuuntainen perusviiva, jonka päätepisteiden luotiviivojen suunnat eroavat toisistaan *yhden asteen verran*. Maan päällä mitataan, paljonko pisteiden välinen etäisyys on metreissä<sup>9</sup>. Jos Newton oli oikeassa, asteen pituus pohjoisnavan lähellä olisi suurempi kuin päiväntasaajan lähellä. Toisin sanoen Maan *kaarevuussäde* olisi navoilla pidempi kuin päiväntasaajalla:

$$r_L > r_P.$$

Molempien retkikuntien mittauksen yhteiseksi tulokseksi saatiin empiirinen litistyneisyysarvo  $f = 1/210$ . Vertailun vuoksi nykyisin hyväksytty arvo Maan litistyneisyydelle on  $f \approx 1/298,257$ .

Pierre L. M. de Maupertuis'n johtaman retkikunnan seikkailuista Tornionlaaksossa vuosina 1736–1737 on kirjoitettu laajasti, esimerkiksi [Rovaniemi, Astemittausretki Tornionlaaksoon](#), [Maupertuis-säätiö, Astemittaus](#) (vain suomeksi ja ruotsiksi), ja ranskankielisessä alkuperäiskirjoituksessa ([Maupertuis 1738](#)).

<sup>10</sup> Myöhemmistä astemittauksista voidaan mainita Struven<sup>10</sup> venäläis-pohjoismaalainen 1816–1855 toteutettu astemittaus ("Struven ketju"), joka ulottui Norjasta Atlantin rannikolta Mustallemerelle saakka ([Wikipedia, Struven ketju](#)). Joitakin ketjun pisteitä on säilynyt Suomessakin.



### 1.3 Maan matemaattinen muoto eli *geoidi*

Luotiviivan suunnan muutosta paikasta toiseen maanpinnan kaarta pitkin voidaan siis käyttää Maan todellisen muodon selvittämisessä. Edel-

<sup>9</sup>Oikeasti Ranskan tiedeakatemian mittauksissa käytettiin mittayksikkönä *toisea*, koska metri ei ollut vielä keksitty.

<sup>10</sup>Friedrich Georg Wilhelm von Struve (1793–1864) oli venäläinen tähtitieteilijä ja geodeetti.





KUVA 1.7. Ranskan tiedeakatemian astemittausprojekti: Lapin astemittauksen verkko.


lisessä osiossa kuvattiin, miten Ranskan tiedeakatemian astemittausprojektissa hyödynnettiin tätä ilmiötä Maan muodon määrittämiseksi, olettaen, että Maa olisi pyörähdysellipsoidin muotoinen.

Tarkempien geodeettisten mittausten avulla huomattiin, ettei oletus pidä tarkkaan ottaen paikkaansa. Jo Perun astemittauksen yhteydessä Pierre Bouguer<sup>11</sup> huomasi, että luotiviivan suunnalla oli Andien eri puolilla taipumus poiketa vuoristoon päin, ja hän tulkitsi ilmiön oikein vuoriston Newtonin mukaisen *gravitaation* eli vetovoiman aiheuttamaksi. George Everest<sup>12</sup> huomasi Intiassa Himalajan lähistöllä saman ilmiön.

<sup>11</sup>Pierre Bouguer (1698–1758) oli ranskalainen monitieteilijä, lähinnä geofyysikko ja laivanrakentaja.

<sup>12</sup>Sir George Everest (1790–1866) oli walesilaissyntyinen geodeetti ja maantieteilijä, *Survey of Indian* ylijohtaja. Vuonna 1865 Himalajan korkein vuori nimettiin Mount Everestiksi hänen kunniakseen, vaikkakin vastoin omaa toivomustaan.



 KUVA 1.8. Struven ketjun pohjoisin piste Fuglenesissa, Norjassa, [Franz \(2005\)](#).

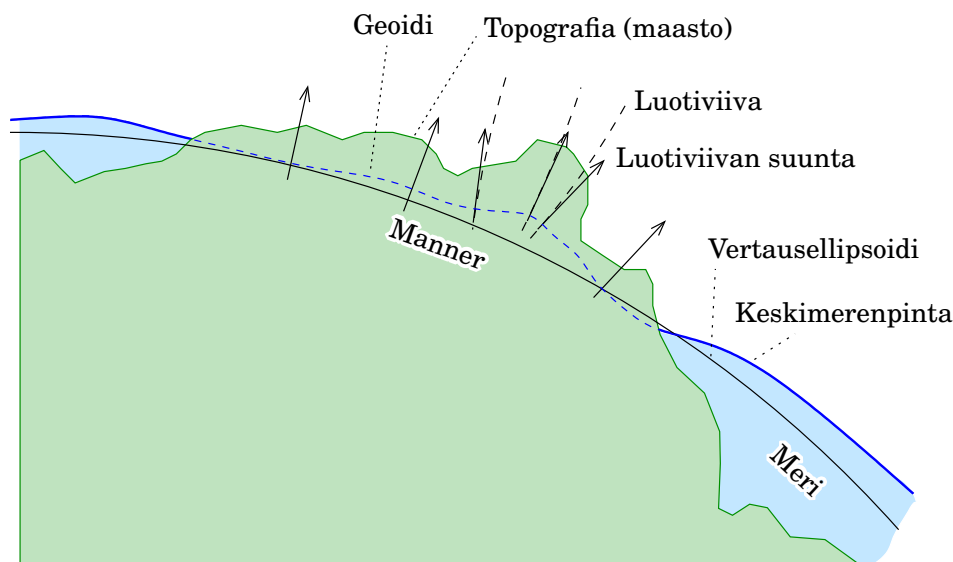
Geodeettisten mittausten ja etenkin tähtitieteellisten luotiviivan suunnan määrittysten edetessä syntyi käsitys, että Maan muoto on epäsäännöllinen.

Alettiin puhua ”Maan matemaattisesta muodosta” eli *geoidista* (J. B. Listing<sup>13</sup>, 1873), keskimerenpinnan jatkeesta mannermassojen alle, pinnasta, joka on kaikkialla kohtisuorassa luotiviivoja vastaan, ja jonka mukaiseksi lepotilassa oleva neste — esimerkiksi merivesi — asettuisi (katso kuva 1.9).

Vuonna 1862 preussilaisen J. J. Baeyerin<sup>14</sup> johdolla perustettiin ”*Mitteleuropäische Gradmessung*” (”Keski-Euroopan astemittaus”), josta myöhemmin kehittyi maailmanlaajuinen järjestö [IAG](#), Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio, *International Association of Geodesy*. Sen tehtävä oli määrittää Maan muoto eli geoidi, etenkin Euroopan alueella, ja yhdistää Euroopan geodeettiset verkot. Tämä päämäärä saavutettiin kunnolla vasta vuonna 1950, kun ensimmäinen yhteiseurooppalainen verkkotasointus [ED50](#), ”European Datum 1950”, valmistui, vaikkakin vain Länsi-Euroopan alueella.

<sup>13</sup>Johann Benedict Listing (1808–1882) oli saksalainen matemaatikko ja topologian keksijä.

<sup>14</sup>Johann Jacob Baeyer (1794–1885) oli preussilaisupseeri, geodeetti ja geodesian diplomaatti.



KUVA 1.9. Luotiviivan poikkeamia ja geoidin muoto.

Myös muualla maailmassa, kuten Pohjois-Amerikassa, mitattiin manerlaajuisia kolmioverkkoja Maan muodon ja litistyneisyyden sekä Maan pinnalla olevien pisteiden sijainnin määrittämiseksi kartoitustyötä varten. Maan yleisen muodon tarkka määrittäminen maanpinnalta, klassisin geodeettisin menetelmin, on kuitenkin vaikeaa, koska laajat verkot Maan pinnalla eivät ole geometrisesti vahvoja ja niiden yhdistäminen toisiinsa meren ylitse ei onnistu.

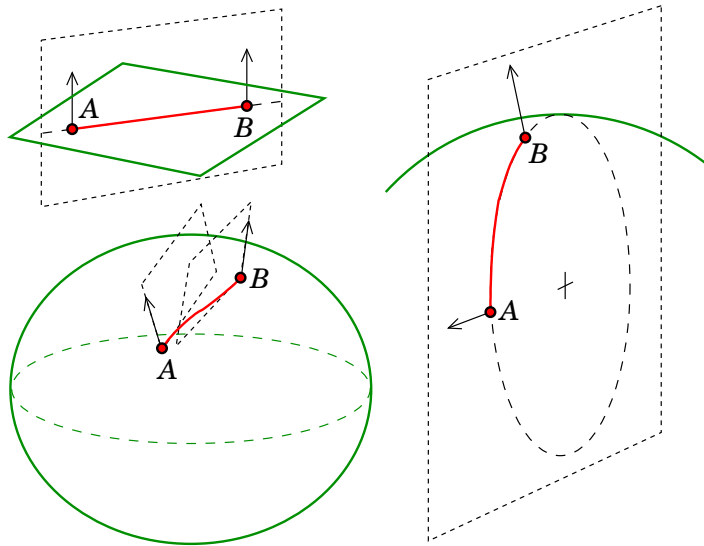
Vasta satelliitit ovat auttaneet asiaa huomattavasti. Satelliittimenetelmät ovat antaneet tarkkoja tietoja muun muassa Maan litistyneisyydestä käyttämällä hyväksi sen aiheuttamaa satelliitin ratatason nopeaa prekessiota. Jo muutama viikko Sputnikin laukaisun jälkeen tutkijoiden käytössä oli paljon tarkempi litistyneisyysarvo, ja amerikkalaisen Vanguard 1 -satelliitin ansiosta maapallo todettiin ”päärynän muotoiseksi” — tosin hyvin, hyvin vähän.



## 1.4 Geodeettinen viiva

Tasossa lyhin matka kahden pisteen välillä on *suora*. Pallon tai pyörähdysellipsoidin kaarevalla pinnalla lyhin matka on *käyrä*. Pallon tapauksessa lyhin matka on *isoympyrän kaari*<sup>15</sup>; ellipsoidin tapauksessa erittäin<sup>15</sup> lievästi S-muotoinen pintakäyrä.

<sup>15</sup>Kahden pisteen välillä on kaksi isoympyrän kaarta, toinen lyhin ja toinen pisin pisteiden välillä. Vain antipodien tapauksessa on äärettömän monta isoympyrän kaarta, kaikki 180° pitkiä.



KUVA 1.10. Geodeettinen viiva tasossa, pallolla ja pyörähdysellipsoidilla. Nuolet kuvaavat paikallista pinnan normaalia. Normaalileikkauksen taso ei ole yksiselitteinen pyörähdysellipsoidin tapauksessa.



Kuva 1.10 kuvaa tätä yleistä käsitystä geodeettisesta viivasta (engl. *geodesic*), joka on ”lyhin matka pinnan sisällä”.

Kuvasta näkyy toinenkin kuriositeetti: sekä tason että pallopinnan tapauksessa päätepisteiden  $A$  ja  $B$  luotiviivat eli *normaalit* pintaa kohtaan ovat itse yhdysviivan tai -käyrän kanssa samassa leikkaustasossa, *normaalileikkauksessa*. Pyörähdysellipsoidin tapauksessa tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa: yleisessä tapauksessa *ei ole olemassa normaalileikkausta, joka sisältäisi molemmat pintanormaalit*. Tämä efekti on erittäin pieni, mutta se on otettava huomioon kaiken tarkimmissa laskennoissa.

Perinteisten geodeettisten mittausverkkojen Maan pinnalla, etenkin kolmiomittausverkkojen, voidaan katsoa koostuvan *mittausviivoista*, jotka ovat geodeettisia viivoja jollakin vertauspinnalla, tavallisesti vertausellipsoidilla.

Käytännössä geodeettiset kojeet ja tähykset eivät koskaan sijaitse tarkasti vertauspinnalla, vaan jonkin matkaa sen ylä- tai harvemmin alapuolella. Silloin on suoritettava raakahavaintojen *reduktio* vertauspintaan. Tämä koskee sekä kulma- että etäisyyshavaintoja. Yleensä tarvittavat korjaukset ovat pieniä.



## 1.5 Maan litistyneisyys ja painovoima

Kuten jo kerrottiin, muinaisilla kreikkalaisilla oli tiedossaan, että Maa on pallon muotoinen ja jopa sen likimääräinen koko. 1600- ja 1700-luvun aikana kehittyi idea maapallon litistyneisyydestä eli *pyörähdysellipsoidista* Maan muodon kuvaajana. Tähtitieteilijät havaitsivat Jupiterin litistyneisyyden ja selittivät sen oikein planeetan suuren pyörähdysnopeuden aiheuttamana dynaamisena ilmiönä.

Litistyneen maapallon pinnalla tietysti myös *painovoima* vaihtelee leveysasteen mukaan. Näin havaittiinkin heilurikellon avulla, jonka heiluria piti lyhentää matkustettaessa Cayenneen Ranskan Guyanaan (Jean Richer<sup>16</sup>, 1672), jotta kello olisi käynyt taas oikein. Painovoima on päiväntasaajan lähellä heikompi kuin Ranskassa. Palattuaan Ranskaan Richer joutui taas pidentämään heiluriaan, jotta se heilahtaisi ajassa.

Newton ja Huygens laskivat teoreettisesti maapallon litistyneisyyden  $f$ , yhtälö 1.2. A. C. Clairaut<sup>17</sup> toisaalta johti kuuluisan yhtälönsä, joka tarjoaa yhteyden litistyneisyyden  $f$  ja ”painovoimalitistyneisyyden”

$$\beta = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$$

välillä. Tässä  $\gamma_a$  ja  $\gamma_b$  ovat painovoiman kiihtyvyydet päiväntasaajalla ja navoilla. Clairaut’n lauseen likimääräinen mutta elegantti muoto on (Heiskanen ja Moritz, 1967, yhtälö 2-99)

$$f + \beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_a},$$

jossa  $\omega$  on Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus. Lauseke  $\omega^2 a / \gamma_a$  edustaa Maan pyörähdysliikkeen aiheuttamaa keskipakoisvoimaa päiväntasaajalla paikallisen painovoiman murto-osana.



## 1.6 Vertauspinnat ja vertausjärjestelmät

Korkeuksien vertauspintana käytetään *geoidia*. Geoidi on se Maan painovoimakentän *tasapotentialipinta*, joka on keskimäärin samalla tasolla kuin keskimerenpinta. Tämä on siis se pinta ja potentiaalienergian minimi, jonka merivesi saavuttaisi, jos valtameressä ei olisi virtauksia eikä suolaisuus- tai lämpötilaeroja eikä sen yläpuolella ilmanpainevaihteluita. Todellisuudessa kaikki nämä häiriötekijät ovat olemassa ja

<sup>16</sup> Jean Richer (1630–1696) oli ranskalainen tähtitieteilijä.

<sup>17</sup> Alexis Clairaut (1713–1765) oli ranskalainen matemaatikko ja tähtitieteilijä.

maailmanlaajuinen keskimerenpinta poikkeaa jopa toista metriä tasapotentiaalipinnasta sekä sen ylä- että alapuolella. Tästä poikkeamasta osa vaihtelee ajassa, kuten vuorovedet, ja osa on pysyvä eli *meritopografia*.

Eri maiden *vaaittuja korkeuksia* voi ymmärtää korkeuksina tämän geoidipinnan yläpuolella. Käytännössä korkeudet sidotaan rannikolla toimivien vesiasteikkojen eli *mareografien* merenpinnan havaintoihin ja vertaustaso siirretään rannikolta sisämaahan vaaituksen avulla, eli luodaan *korkeusjärjestelmä*.

Geoidista ja korkeuksista kerrotaan lisää luvussa 4.

Avaruusgeodeettinen mittausmenetelmä, kuten **GPS**, antaa mahdollisuuden laskea pisteen korkeus *vertausellipsoidista*, koska pyörähdysellipsoidi on yksinkertainen matemaattinen pinta avaruudessa. Vertausellipsoidi on muutenkin hyvä maapallon todellisen muodon approksimaatio, jota on perinteisesti käytetty vertauspintana kansallisten tai mannerlaajuisten kolmiomittausverkkojen tasoituksissa.

Hyvin pienillä alueilla moneen tarkoitukseen kelpaa edelleen ”litteän Maan approksimaatio” eli oletus, että Maan kaarevuuden voi jättää huomioimatta. Pisteiden sijainnit voidaan kuvata kahdella tasokoordinaatilla ja korkeudet yhdellä korkeuskoordinaatilla: pystytäisyydellä metreinä vertaustasosta. Sovelluksesta riippuen ”pieni alue” voi olla rakennustyömaa, kaupunki tai koko Suomi — ja erikoistilanteissa harkiten jopa Euroopan kokoinen alue, esimerkiksi **Strang van Hees (1990)**.



## 1.7 Geodesian osa-alueet

Geodesia määritellään ”Maan pinnan mittausten ja kartoituksen tieteenä” (Helmert, 1880; katso **Torge, 2001** sivu 1). Määritelmä pitää edelleen paikkansa. Geodesiaan kuuluu myös valtameren pohjan kartoitus ja Maan painovoimakentän eli *geopotentialin* määrittäminen. Lisäksi yksi geodesian tutkimuksen osa on Maan muodon *muutosten* ja niiden fysikaalisten mekanismien tutkimus, *geodynamiikka*.

Näin ollen geodesia, lähinnä fysikaalinen geodesia, kuuluu geotieteisiin. Geodesia kuuluu selvästi myös teknisiin tieteisiin. Suomessa geodesiaa opetetaan nykyisin (2018) sekä Helsingin yliopistossa (kahden dosentuurin ja tuntiopettajien voimin) että Aalto-yliopistossa (professori, dosenttuureja, tuntiopettajia).

Geodesia voidaan jakaa Torgen mukaan kolmeen osa-alueeseen:

**Globaali geodesia**, myös ”maapallon mittaus” (engl. *geomensuration*,



saks. *Erdmessung*). Tarkemmin (Torge, 2001, sivu 2):

”Geodesian tehtävänä on maan ja muiden taivaankappaleiden muodon ja ulkoisen painovoimakentän määrittäminen ajan funktiona, näiden kappaleiden pinnoilla ja niiden ulkopuolella tehdyistä havainnoista.”

Maan muoto:

- *Maan fyysinen muoto*: Maan kiinteä pinta eli rajapinta kiinteän ja kaasumaisten tai nestemäisten aineiden — ilmakehä, valtameri — välillä kaikkine vuorineen ja syvänteineen.
- *Maan matemaattinen muoto* eli *geoidi*: Maan painovoimakentän tasapotentialipinta, joka keskimäärin yhtyy keskimerenpintaan ja jota voidaan pitää mannerten alla keskimerenpinnan jatkeena. Katso osio 1.3.

**Geodeettinen maanmittaus**, maanmittaustiede. Tähän kuuluu valtakunnallisten — ja nykyisin kansainvälisten — geodeettisten ja gravimetristen runkoverkkojen mittaus kartoituksen pohjaksi. Tässä työssä Maan kaarevuus ja painovoimakenttä on otettava huomioon.

**Tavallinen maanmittaus** (*”plane surveying”*). Tähän kuuluvat muun muassa maastomittaukset ja insinöörigeodesian mittaukset. Mittaukset ovat alueelliselta laajuudeltaan ja tarkkuustasoltaan sellaisia, että kaikissa laskuissa maapallon kaarevuus voidaan jättää turvallisesti huomioimatta tai ottaa huomioon yksinkertaisilla korjauskaavoilla.

Nämä mittaukset suoritetaan paitsi geodeettisin keinoin, usein myös fotogrammetrisesti ilmakuvauksen avulla. Toiminnan päämäärä on aina geometrisesti tarkkojen ja oikeiden kartta-aineistojen tuottaminen yhteiskunnan käyttöön.

Laskennat voidaan suorittaa käyttämällä *tasokoordinaatteja*  $x$  ja  $y$ . Pienen alueen kartat voidaan piirtää ilman karttaprojektion käyttöä ja erillinen korkeuskoordinaatti  $H$  voidaan olettaa puhtaasti metriseksi (”metrit merenpinnan yläpuolella”) ilman haitallisia seuraamuksia.



## 1.8 Maastomittaus: maastosta kartaksi

Kirjasessa ”*Maastomittaus ja kartoitus*” (Heiskanen ja Härmälä, 1963) lausutaan:

”Maastomittauksen ja siihen liittyvän kartoituksen useimmin esiintyvänä päämääränä on antaa suuremmasta tai pienemmästä alueesta mahdollisimman oikea ja tarkka kuva *kartan* muodossa.”

Yhteiskunta tarvitsee karttoja ja paikkaan sidottuja tietoja moneen tarkoitukseen. Nyky-yhteiskunnassa kiinteistön omistaminen, sen ostaminen ja myyminen sekä etenkin sen panttaaminen (hypoteekki) rahoituksen vakuudeksi kiinteistön arvon ylläpitämiseksi ja kehittämiseksi, ovat modernin, korkean sijoitustason yhteiskunnan peruspilareita. Tähän tarkoitukseen on olemassa *katasterijärjestelmä*, joka rekisteröi mahdollisimman luotettavasti kiinteistöjen ja niihin sidottujen oikeuksien tilan. Kiinteistöjä ja tontteja on miljoonia, ja niiden yhteinen rahallinen arvo on tähtitieteellinen<sup>18</sup>.

Toinen yhteiskunnalle tärkeä karttojen ja paikkatietojen käyttötarkoitus on *infrastruktuurin*<sup>19</sup> suunnittelu ja rakentaminen. Infrastruktuuri sisältää muun muassa tiet, rautatiet, sillat, tunnelit, vesiväylät, lentokentät, satamat, voimalat, vesilaitokset sekä puhelin-, sähkö- ja tietoverkot. Tämä on taloudellisen tuottavuuden kannalta elintärkeää julkista toimintaa.

Jokaisessa kehittyneessä yhteiskunnassa rakentamista on jollain tavalla rajoitettu. Edes omalla maalla ei saa rakentaa mitä ja miten haluaa. *Kaavoitus* (engl. *zoning*) määrää koordinoitulla tavalla, mihin käyttötarkoituksiin maata saa ja ei saa käyttää. Määräykset sisältyvät *kaavoihin*, joiden hyväksymisprosessi on laissa säädetty, julkinen ja monivaiheinen. Syy tähän on, että kaavat vaikuttavat kiinteistön arvoon. Kiinteistönomistajan oikeudellinen asema edellyttää, että kaavojen demokraattinen hyväksymisprosessi sisältää riittäviä valituskeinoja. Kartat ja muut maanmittauksen tietolähteet ovat tämän prosessin olennaisia osia.

<sup>18</sup>Raportin RAKLI ry (2014) mukaan ”Suomen koko rakennuskannan arvo tontteineen on noin 480 miljardia euroa”. Se merkitsee lähes sataa tuhatta euroa jokaista suomalaismiestä, -naista ja -lasta kohtaan.

<sup>19</sup>Infrastruktuurilla on monta määritelmää. Terävin on epäilemättä, että se on ”ne asiat, joiden merkityksestä tullaan tietoiseksi vasta, kun ne lakkaavat toimimasta”.



Suomessa maan käytön ja siihen liittyvän paikallisen infrastruktuurin rakentamisen suunnittelu tapahtuu pääosin julkisessa hallinnossa, useimmiten kunnissa. Puhutaan *yhdyskuntasuunnittelusta*.

Määrällisesti maastomittaus on *ylivoimaisesti suurin* maanmittauksen sovelluskenttä.



### 1.8.1 Yhdyskuntasuunnittelu

Yhdyskuntasuunnittelu on jatkuvaa toimintaa, johon kuuluu kaavoitus, maankäytön ja rakennetun ympäristön suunnittelu sekä rakennustoiminnan ohjaus. Yhdyskuntasuunnittelussa kunnalla on suuri rooli. Kaupunkisuunnittelu ja aluesuunnittelu ovat yhdyskuntasuunnittelun muotoja.

Yhdyskunnan tekninen suunnittelu ja rakentaminen tarvitsevat luotettavaa tietoa ympäristöstä, joka suunnitellaan ja rakennetaan. Kuva 1.11 antaa käsityksen kaikista rooleista, joissa maastomittauksen antama paikkatieto on mukana jatkuvassa yhdyskuntasuunnittelu- ja rakentamisprosessissa.

Maastomittaus on mukana koko prosessissa:

- Maastotiedot on mitattava kartalle tiettyssä koordinaatistossa.
- Kun kaava on valmis, se on merkittävä maastoon.
- Kiinteistöt on mitattava ja kartoitettava.
- Tekniset rakenteet on sijoitettava maastoon.

Maastomittauksella on seuraavat *tekniset tehtävät*:

- *Rungon* luominen kartoitukselle: saada mittaukset tiettyyn tunnettuun koordinaatistoon.
- Maaston yksityiskohtien kartoitus runkopisteitä käyttäen: *kartoitusmittaus*.
- *Maastoon merkitseminen*: suunnitelman siirtäminen maastoon, toteutettavaksi oikeilla paikoilla. Maastoon merkintä on tavallaan *kartoituksen käänteistehtävä*.



### 1.8.2 Maastomittauksen tehtävien suoritus

Maastomittauksen onnistunut suorittaminen edellyttää, että maanmittari tuntee seuraavat asiat:

- geodeettiset kojeet



- mittaustekniikka, mittausten suunnittelu, mittaolosuhteet
- geodeettinen laskenta: koordinaatit ja muunnokset, johdannaissuureet, tarkkuus
- kaavan laskenta, maastoon merkintä
- paikkatietojärjestelmät (GIS, *geographic information systems*)
- kartat, tulostus, raportointi.

Prof. Matti Martikaiselta on peräisin kaunis kuvaus, taulu 1.1, mitaussuunnitelman roolista ja maastomittauksen paikasta koko mittaus- ja kartoitusprosessissa. Tässä se esitetään hieman modernisoituna. Taulun eri osat kuuluvat geodesian, fotogrammetrian ja kartografian osaluokkiin.



### 1.8.3 Maastomittauksen lopputulos

Maastomittauksen näkyvä lopputuote on *kartta*. Kartan on oltava ennen kaikkea *oikea*, mutta myös selvästi piirretty. Kartan kuuluu antaa kaikki olennainen tieto — ja sietäähän sen olla kauniskin (Heiskanen ja Härmälä, 1963).

Kartalle valitaan sopiva *mittakaava*, joka määrittää esitetyn tiedon tarkkuustason. Mittakaava valitaan kartan käyttötarkoitukseen sopivaksi. Esitettävät kohteet tulisi *yleistää* sopivalla tavalla: liian pienet yksityiskohdat tulisi poistaa ja olennaiset yksityiskohdat selkeyttää<sup>20</sup>.

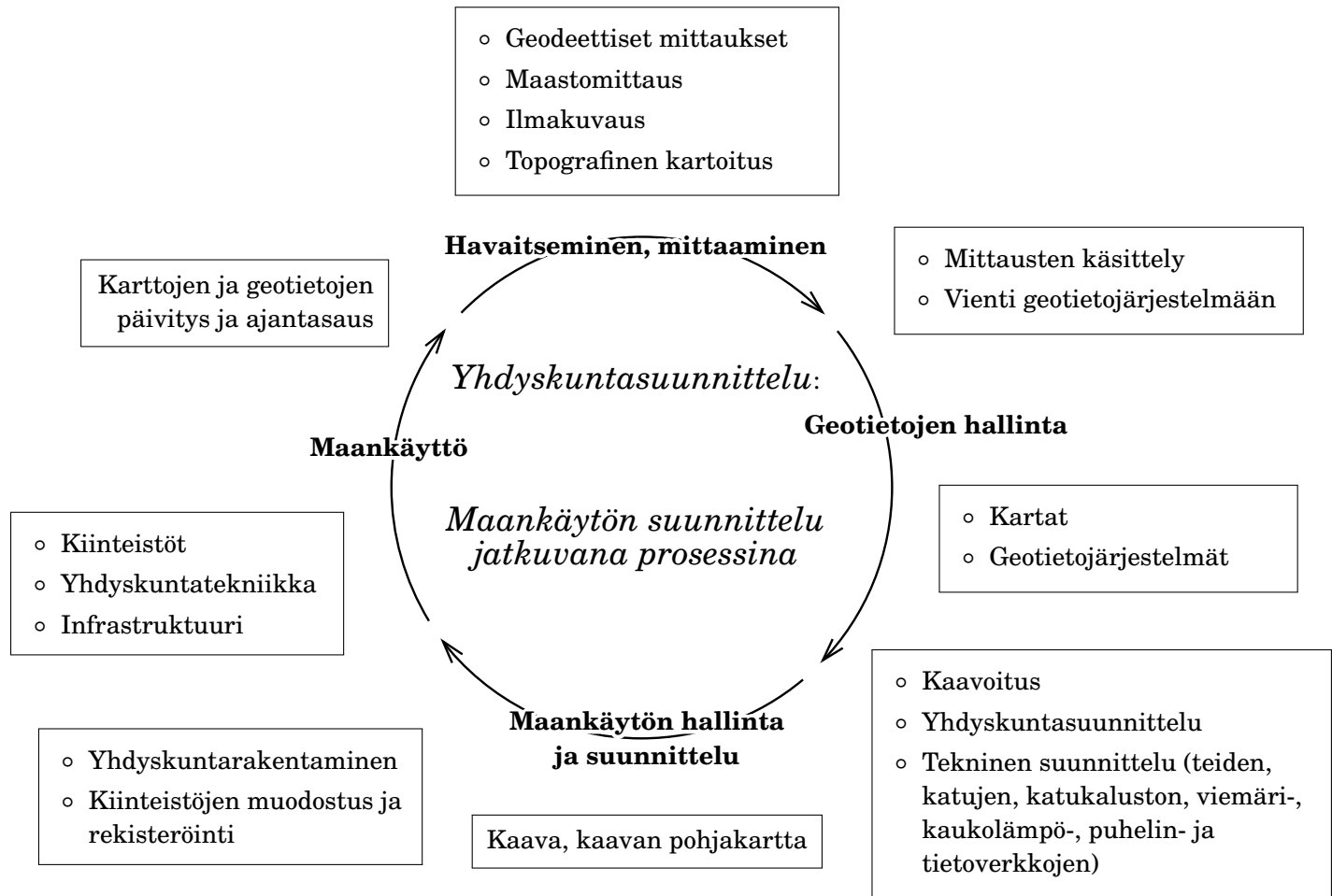
Monet kartat ovat digitaalisia. Silloin mittakaavan merkitys ei ole yhtä selkeä.

Tämän lisäksi on paljon numeerisessa muodossa olevaa, paikkaan sidottua informaatiota eli *paikkatietoa*, joka koostuu sijainti- ja ominaisuustiedoista. Lisäksi on niin sanottua ”metatietoa”: toista tietoa, esimerkiksi karttatietoa, kuvaavaa informaatiota. Paperikartassa oleva *legenda* on esimerkki metatiedoista.

Seuraavat tiedot ovat tai voivat olla osana lopputuotetta:

- Tasokoordinaatit ilmaisevat sijainnin kunnassa, valtakunnassa ja maapallolla (kartalla on koordinaattikäyriä ja koordinaattiruudukko).

<sup>20</sup> Esimerkiksi tiekartalle piirrettyjen teiden leveydet eivät ole missään suhteessa maastossa olevien teiden leveyksiin! Piirretty leveys ilmaisee tien *tärkeyttä* liikenteelle. Näin yleistys toimii.



KUVA 1.11. Kartan ja maastomittauksen roolit yhdyskuntasuunnittelussa ja -rakentamisessa.



- Korkeustiedot, esimerkiksi korkeuskäyrät, pisteiden korkeusarvot, mahdollisesti profilit.
- Maan fysikaalisen pinnan muodot eri tavalla esitettyinä.
- Ominaisuustiedot: mitatut kohteet kuvataan kartalla sovitun esitystavan mukaan, jokaiselle tiedolle annetaan sopiva tunnus tai symboli.

Kartalle kuvatut tiedot voidaan jakaa myös luonto- ja kulttuuritietoihin. Katso taulukko 8.3.



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Sinulla on auto, jossa on ULA-radio ja kello, sinulla on passi, vapaa-aikaa muutama viikko sekä rahaa ruokaan ja majoitukseen sekä bensarahaa. Miten todistat itsellesi, että maapallo on kaareva eikä litteä?  
**Leah (2017).**
- 2) Miten Newtonin universaalinen gravitaatiolaki selittää, että suuremmat taivaankappaleet ovat suurin piirtein pallon muotoisia? Miksi ne eivät ole tarkasti pallon muotoisia?
- 3) Kuvaile Newtonin ja Huygensin hypoteesit Maan sisäisestä massajakaumasta ja sen vaikutuksesta Maan litistyneisyyteen.
- 4) Kuvaile astemittauksen idea ja Ranskan tiedeakatemian astemittausprojektin tavoite.
- 5) Mikä on yhtälössä 1.1 kulman  $\gamma$  yksikkö?
- 6) Mikä on ”Maan matemaattinen muoto” ja miten se liittyy luotivii-van suuntaan?
- 7) Mikä on geoidi ja mikä vertausellipsoidi?
- 8) Clairaut’n lause antaa yhteyden Maan pyörähdysliikkeen, litistyneisyyden ja ”painovoimalitistyneisyyden” välille. Intuitiivisesti anna kaksi syytä, miksi pyörivällä maapallolla painovoima päivän-tasaajalla olisi heikompi kuin navoilla, ja yksi syy, miksi se olisi vahvempi.
- 9) Mikä on geodeettinen viiva?
- 10) Mikä on maastomittauksen tehtävä Heiskasen ja Härmälän mukaan?





TAULU 1.1. Maastomittaus koko mittaus- ja kartoitusprosessin osana.

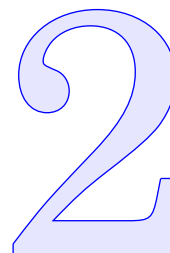


Mittaussuunnitelma					
Rungon mittaus (GNSS), laskenta					
Maastotietojen keruu	Kartoitusmittaus (usein GNSS-RTK)	Olemassa olevat kartat	Digitaaliset kuvat	Laser-keilaus	Valokuvat
Maastotietojen käsittely	Geodeettinen laskenta	Digitointi	Kuvankäsittely	Käsittely	Stereofotogrammetria
Tietojen yhdistäminen	Paikkatietojärjestelmä (GIS)				
Tuotteet	Graafiset	Numeeriset	Tekstuaaliset	Metatieto	
Tietojen esittäminen loppukäyttäjälle	Maastokartat	Pistetietokannat	Raportit	Kartan legenda	
	Teemakartat	Korkeusmallit	Tekstiviestit		
	Erikoiskartat	Digitaaliset CAD-mallit	Navigaattorin ääniohjeet		
	Asiakastulosteet				
	3D-visualisointi				

- 11) Nimeä kolme pääasiallista maastomittauksen sovellusaluetta yhteiskunnassa.
- 12) Mitkä ovat maastomittauksen kolme teknistä tehtävää?
- 13) Mikä on karttatiedon yleistys? Anna esimerkki.
- 14) Mieti syitä, miksi yhteiskunta haluaisi estää polkupyörätehtaan rakentamisen keskelle asuin aluetta Eirassa Helsingissä.



# Geodeettiset mittaukset ja koordinaatit



METPΩ XPΩ

”Käytä mittaa / malttia”, Pittakos (640–568 eaa), esiintyy

BIPM:n sinetissä



## 2.1 Mittayksiköt



### 2.1.1 Määritelmät

Kun puhutaan geodesiassa, kuten yleisemmin fysiikassa, käytettävistä mittayksiköistä, tehdään ero *yksiköiden* ja *suureiden* välillä. Esimerkiksi pituus on *suure*, jonka *yksikkö* voi olla vaikkapa metri [m]<sup>1</sup>. Siis <sup>1</sup>esimerkiksi:

*Matkan AB pituus on 15 metriä eli 15 m.*

Suure	Lukuarvo	Yksikkö	Symboli
Pituus	15	Metri	m

Kirjallisuudessa käytetään myös termiä *dimensio*, esimerkiksi tilavuuden dimensio on pituus<sup>3</sup>, kiihtyvyyden dimensio on pituus × aika<sup>-2</sup>. Näin ilmaistaan, millä tavalla tietyn suureen määritelmä riippuu toisten suureiden määritelmistä. Esimerkiksi jos halutaan mitata tarkasti kiihtyvyyksiä, on osattava mitata tarkasti sekä pituuksia (etäisyyksiä) että aikavälejä. Tämä kuuluu *metrologian* eli mittaustieteen alaan.

<sup>1</sup>Yksikön virallinen, SI-järjestelmän mukainen symboli kirjoitetaan aina pystykirjaimilla *eikä kursiivina*! Kursiivia käytetään matemaattisiin symboleihin. Siis  $E = mc^2$ , mutta  $J = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ .



KUVA 2.1. Julkinen standardimetri Pariisissa. [Wikimedia Commons, Standardimetri Pariisissa.](#)



Suomessa, kuten maailman useimmissa maissa, käytetään **SI**-järjestelmää eli kansainvälistä mittayksikköjärjestelmää (**SI** = *Système International d'Unités*).

Järjestelmä koostuu *perusyksiköistä* ja *johdannaisyksiköistä*. On olemassa seitsemän perusyksikköä, **BIPM, SI base units**, taulukko 2.1.



### 2.1.2 Etuliitteet

- <sup>2</sup> **SI**-yksikköihin (muttei lisäyksikköihin<sup>2</sup>, alaosio 2.1.3!) voi laittaa suuruusluokkaa ilmaisevan etuliitteen taulukon 2.2 mukaan. Taulukko ei ole täydellinen.



TAULUKKO 2.1. Mittasuureet, yksiköt ja niiden symbolit. Johdannaisyksiköiden lista on osittainen.

	Suure	Yksikkö	Symboli	Miten johd.
Perusyksiköt	Pituus	Metri	m	
	Massa	Kilogramma	kg	
	Aika	Sekunti	s	
	Sähkövirta	Ampeeri	A	
	Lämpötila	Kelvin	K	
	Valovoima	Kandela	cd	
	Ainemäärä	Mooli	mol	
Johdannaisyksiköt	Tasokulma	Radiaani	rad	
	Avaruuskulma	Steradiaani	sr	
	Taajuus	Hertsi	Hz	$s^{-1}$
	Voima	Newton	N	$kg\,m\,s^{-2}$
	Paine	Pascal	Pa	$N\,m^{-2}$
	Energia	Joule	J	$N\,m$
	Teho	Watti	W	$J\,s^{-1}$
	Sähköjännite	Voltti	V	$W\,A^{-1}$
	Vastus	Ohmi	$\Omega$	$V\,A^{-1}$





TAULUKKO 2.2. SI-järjestelmän desimaalista suuruusluokkaa ilmaisevat etuliitteet.

Arvo	Liite	Symboli	Arvo	Liite	Symboli
+1	deka	da	+6	mega	M
+2	hecto	h	+9	giga	G
+3	kilo	k	+12	tera	T
−1	desi	d	−6	mikro	$\mu$
−2	sentti	c	−9	nano	n
−3	milli	m	−12	piko	p

Esimerkki: 1 MHz =  $10^6$  Hz.



### 2.1.3 Lisäyksiköt

Päivittäisessä elämässä ja monella tieteen alalla käytetään vapaasti ei-SI-yksiköitä. Esimerkiksi kalenteri tai kello ei olisi kovin käytännöllinen kilo- ja megasekunneissa. Kansainvälinen metrologiayhteisö ymmärtää tämän ja on luonut yksiköille oman kategoriansa, *lisäyksiköt* ([Wikipedia](#), [Lisäyksiköitä](#)).

Taulukko 2.3 luettelee usein käytettyjä lisäyksiköitä.

Celsius-lämpötila saadaan vähentämällä lämpötilasta kelvineissä



TAULUKKO 2.3. SI-järjestelmän kanssa käytetyt lisäyksiköt.

Suure	Perusyksikkö	Lisäyksikkö	Symboli
Aika	s	Tunti, minuutti, sekunti	h m s
		Vuorokausi	d
		Vuosi	a
Tasokulma	rad	Aste, minuutti, sekunti	$^{\circ}$ / ''
		Gooni	gon, <sup>g</sup>
Lämpötila	K	Celsiusaste	$^{\circ}\text{C}$
Tilavuus	m <sup>3</sup>	Litra	l
Massa	kg	Tonni	t

<sup>2</sup>Näin kuitenkin laajasti tehdään, esimerkiksi kcal merkitsee kilokalori, perinteinen kemiallisten aineiden ja ruuan energiasisällön yksikkö. Tietotekniikassa taas etuliite k tai K ilmaisee joskus epästandardin binäärisen suuruusluokan 1024× ([Wikipedia](#), [Kilobyte](#)). Ja myös rahayksikköä k\$ käytetään!

273,15 K:

$$T_1 = 0^\circ\text{C} = 273,15\text{ K}, \quad T_2 = 0\text{ K} = -273,15^\circ\text{C}.$$

Lämpöeroarvot ovat samoja Celsius- ja Kelvin-asteikoissa, siis  $\Delta T = 1^\circ\text{C} = 1\text{ K}$ .



#### 2.1.4 Pituus ja aika

Perusyksiköistä sekä pituus että aika perustuvat atomaarisiin ilmiöihin.

Metri on se matka, jonka valo kulkee tyhjiössä  $1/299\,792\,458$  sekunnissa. Käytännössä metri realisoidaan *jodistabiloidun helium-neonlaserin* avulla, jonka aallonpituus on hyvin tarkasti (2,5 osaa  $10^{11}$ :ssä) tiedossa ([Penzes, ilman vuosilukua](#)).

Sekunti taas on ”9 192 631 770 kertaa sellaisen säteilyn värähdysaika, joka vastaa  $^{133}\text{Cs}$ -atomin perustilan ylihienorakenteen kahden tietyn energiatason välistä siirtymää” [virallinen [SI](#)-määritelmä]: se perustuu *cesiumkellon* käyttöön ([Hardis, 2018](#)).



#### 2.1.5 Kulmayksiköt

Yksiköt *radiaani* ja *steradiaani* ovat dimensiottomia lukuja (”paljaita lukuja”), koska ne ovat suhdelukuja. Esimerkiksi kulma radiaaneina on ympyräkaaren pituuden ja sen säteen suhde ja näin ollen dimensioton. Käytössä on myös muita kulmayksiköjä, kuten aste ja gooni. Siksi on tavallaan järkevä käsitellä kaikkia — radiaani, aste, gooni — myös yksikköinä.

Tilanne on hieman samanlainen logaritmisille asteikoille: Richterin asteikko (maanjäristyksen kokonaisenergia), tähtien magnitudiasteikko, desibeliasteikko (dB), valokuvausemulsion valoherkkyyden  $^\circ\text{DIN}$ -asteikko ja pH-arvo eli liuoksen happamuusaste.

**Asteet** Tavallisessa elämässä käytetään kulmayksikkönä *astetta*, symboli  $^\circ$ . Myös maantieteelliset, kartalta luettavat leveydet ja pituudet annetaan tavallisesti asteina. *Suora kulma* on  $90^\circ$  ja *oikokulma*  $180^\circ$ . Asteen lisäksi muita perinteisiä yksiköjä ovat *minuutti* (') ja *sekunti* ("). Nämä käyttäytyvät samalla tavalla kuin ajanmittauksen kaimansa: yksi aste on 60 minuuttia ja yksi minuutti 60 sekuntia.

**Laskuesimerkki** Muunnetaan asteet, minuutit ja sekunnit asteiksi ja desimaaleiksi:

$$\begin{aligned} 56^\circ 47' 33'' &= 56^\circ + \left(\frac{47}{60}\right)^\circ + \left(\frac{33}{60 \times 60}\right)^\circ = \\ &= 56^\circ + 0,783333... + 0,0091666... = 56,7924999... \end{aligned}$$

Muunnetaan takaisin toiseen suuntaan (huomaa pyöristysvirhe!):

$$\begin{aligned} 56,7925 &= 56^\circ + (60 \times 0,7925)' = \\ &= 56^\circ + 47,55' = \\ &= 56^\circ 47' + 0,55' = \\ &= 56^\circ 47' + (60 \times 0,55)'' = 56^\circ 47' 33''. \end{aligned}$$

**Goonit** Geodesiassa ja geodeettisissa kojeissa käytetään mittayksikkönä usein *goonia*<sup>3</sup> (gon). Joskus käytetään nimitystä ”uusaste”. Uusminuutti on 0,01 gon, uussekunti 0,0001 gon. Yksi kirjoitustapa on 1,2345 gon = 1<sup>g</sup> 23<sup>c</sup> 45<sup>cc</sup>. Gooneissa suora kulma on 100<sup>g</sup>.

**Radiaanit** Täydessä ympyrässä on  $2\pi$  radiaania, 360 astetta ( $360^\circ$ ) ja 400 goonia (400<sup>g</sup>). Suorassa kulmassa on siis  $2\pi/4 = \pi/2$  radiaania.

Tässä muutama hyödyllinen yhtälö, joilla radiaaneina annettu kulma muutetaan gooneiksi ja asteiksi. Katso **Kahmen ja Faig (1988)**.

Täysi ympyrä on

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ rad} &= 400^g = 360^\circ, \\ 1 \text{ rad} &= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57,2957795 = \left(\frac{400}{2\pi}\right)^g \approx 63,6619772, \\ \alpha \text{ rad} &= \left(\frac{360}{2\pi}\alpha\right)^\circ = \left(\frac{400}{2\pi}\alpha\right)^g. \end{aligned}$$

Ja

$$\alpha^\circ = \left(\frac{400}{360}\alpha\right)^g = 1,1111... \times \alpha^g, \quad \alpha^g = \left(\frac{360}{400}\alpha\right)^\circ = 0,9 \times \alpha^\circ.$$



## 2.2 Mittausvirheet ja epävarmuus

Mikään mittaus ei ole absoluuttisen tarkka. Maanmittaus on myös inhimillisenä toimintana erehtyväistä. Aivan kuten tietokoneen ohjelmoin-

<sup>3</sup>Toinen nimi on *grad*. Yksikkö otettiin käyttöön Ranskassa vallankumouksen ja metrisen järjestelmän yhteydessä, mutta sitä käytetään tänään vain maanmittausalalla.



nissa, mittauksessakaan ei kannata edes pyrkiä täyteen virheettömyyteen. Realistisempi tavoite on, tavallisen huolellisuuden lisäksi, kehittää menetelmiä, joilla

- tietyn kokoiset virheet voidaan huomata ja poistaa havaintoaineistosta (tilastollinen testaus)
- ei-poistettujen tai ei edes huomattujen virheiden vaikutus lopputulokseen voidaan arvioida ja minimoida (tasoituslasku).

Näillä menetelmillä voidaan mittausvirheet ottaa huomioon ja tuottaa mahdollisimman oikeellisia mittaustuloksia, joiden laatu eli tarkkuus ja mahdollisesti vielä piilevien virheiden suuruus tunnetaan tai ainakin voidaan arvioida.

Mittausten käsittely eli *tasoitus* antaa seuraavat tulokset:

- Tuntemattomien suureiden ”paras” arvo mittausten perusteella:
  - todennäköisin arvo
  - tilastollinen odotusarvo
  - arvo, jonka suhteen jäljelle jäävät poikkeamat ovat mahdollisimman vähän vahingollisia.
- 4 ◦ Arvio yksittäisten *alkuperäismittausten* ”hyvyydestä” eli tarkkuudesta, engl. *precision*<sup>4</sup>. Puhutaan standardipoikkeamasta eli *keskivirheestä*. Nykyisin virallinen nimitys on *standardiepävarmuus* (engl. *standard uncertainty*).
- Arvio *lopputulosten* eli tuntemattomien, siis kiinnostuksen kohteena olevien suureiden, laskettujen arvojen eli estimaattien ”hyvyydestä” eli tarkkuudesta.
- Arvio karkeiden virheiden mahdollisesta esiintymisestä ja niiden maksimisuuruudesta, kun tilastolliset testit on suoritettu: luotettavuus, engl. *reliability*.
- Arvio mahdollisten systemaattisten virheiden esiintymisestä ja niiden suuruudesta.

5 *Mittausvirhe* on ero mitattavan arvon<sup>5</sup> ja mittausarvon välillä. *Mittausarvo* on, usein monimutkaisen<sup>6</sup>, mittausprosessin tulos.

<sup>4</sup>Englanniksi käytetään termejä ”*precision*” ja ”*accuracy*”. ”*Precision*” viittaa vain tilastolliseen hajontaan, mittausarvojen vaihtelevuuteen, kun ”*accuracy*” viittaa mitta-arvojen poikkeavuuteen ”oikeasta arvosta”. Jälkimmäinen käsite siis sisältää myös systemaattisia virheitä.

<sup>5</sup>”Oikea arvo”, vaikka filosofisesti voi kysyä, onko se edes olemassa.





### 2.2.1 Virhetyypit

Voimme jakaa mittaus- ja reduktioprosessista tulevat virheet seuraaviin kategorioihin:

**Satunnaiset virheet** edustavat mittausprosessin sisäistä, luonnollista epätarkkuutta. Usein oletetaan, että nämä satunnaiset virheet<sup>7</sup> ovat *normaalisti jakautuneet* eli että virheiden jakauma on kaunis Gaussin kellokäyrä eli normaalijakauma — josta myöhemmin lisää.

Jos näin on — ja näin ei saisi olettaa enempää testaamatta — käytettävissä on *pienimmän neliösumman tasoitusmenetelmä*, joka minimoi satunnaisten virheiden yhteisvaikutuksen lopputuloksessa.

**Karkeat virheet** johtuvat inhimillisistä erehdyksistä tai mittauslaitteen toimintahäiriöstä. Ne sattuvat vain silloin tällöin, eikä niitä voi kuvata tilastollisen jakauman avulla. Esimerkki karkeasta virheestä on mittausarvon desimaalin kirjoitusvirhe havaintokirjassa.

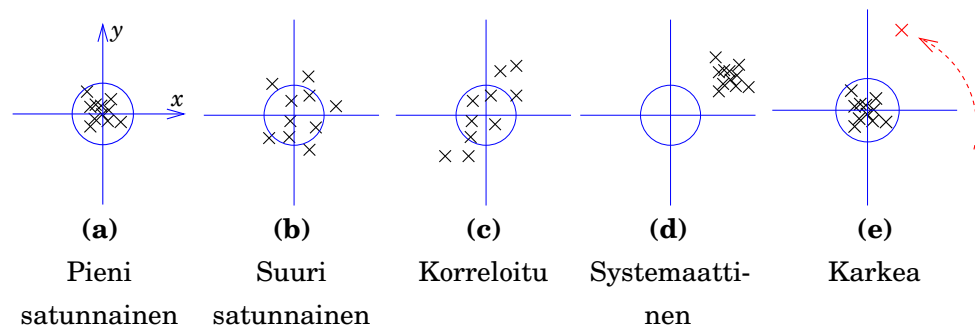
Karkeita virheitä<sup>8</sup> pyritään eliminoimaan tilastollisen testauksen avulla. Tilastollinen testaus on laaja tilastotieteen ala. Nyrkkisääntönä mainittakoon, että jos jokin mittauksen funktio poikkeaa tunnetusta odotusarvostaan (esimerkiksi nolla) enemmän kuin kolme kertaa sen tiedossa olevaa, omaa standardipoikkeamaa (keskivirhettä)  $\sigma$ , on syytä epäillä, että mittauksista ainakin yksi on virheellinen. Tätä kriteeria kutsutaan *kolmen sigman säännöksi*.

**Systemaattiset virheet** ovat merkki siitä, että mittausprosessia, havaintogeometriaa ja havaintotilanteen fysiikkaa kuvaavat teoriat ovat puutteellisia. Huomattavien systemaattisten virheiden esiintymisen pitäisi johtaa teoreettisten olettamusten tutkailuun ja kehittelyyn. Esimerkiksi tiedetään, että kolmion kulmien summan on oltava  $180^\circ$ : kolmioehto. Jos tasokolmion mitattujen kulmien summa poikkeaa merkittävästi ja johdonmukaisesti tästä arvosta, on syytä epäillä muun muassa seuraavia syitä:

<sup>6</sup>Joskus mittausprosessi sisältää varsin monimutkaisen reduktioketjun tai mallinnuksen.

<sup>7</sup>Ruots. *tillfälliga fel*, engl. *random errors*.

<sup>8</sup>Ruots. *grova fel*, engl. *gross errors*.



KUVA 2.2. Esimerkkejä erityyppisistä virheistä. Satunnainen tarkka, satunnainen epätarkka, korreloitu, systemaattinen, karkea.



- sivuttaisrefraktio ilmakehässä
- kolmio on niin suuri, että kaarevalla Maan pinnalla ei ole enää kyse tasokolmiosta ja lause ei enää päde.

Myös *epävarmuus* eli tieto siitä, kuinka suuria virheet mahdollisesti voivat olla, voidaan jakaa eri kategorioihin (GUM, 2008):

**Tyyppi A -epävarmuus** on standardiepävarmuus eli standardivirhe laskettuna esimerkiksi toistuvista mittauksista. Tämä epävarmuustyyppi voidaan käsitellä tilastotieteen keinoin, eli käsite vastaa *satunnaisten virheiden* käsitettä.

**Tyyppi B -epävarmuus** on epävarmuutta, jota *ei* voida määrittää tilastotieteellisin keinoin itse mittauksista, vaan se on saatava selville toisella tavalla. Esimerkiksi *systemaattiset virheet* voidaan määrittää kalibroinnilla tai saada selville laitevalmistajan ilmoituksesta.

Karkeille virheille ei ole olemassa vastaavaa epävarmuuskäsitettä. Niitä tulee välttää tai eliminoida tilastollisella testauksella.



## 2.3 Stokastiset suureet



### 2.3.1 Diskreetit stokastiset suureet

Mittausprosessi on *satunnaissuure* eli *stokastinen suure*. Stokastinen suure saadaan suorittamalla toimitus, jonka tulos on satunnainen. Esimerkiksi nopan heitto luo stokastisen suureen  $\underline{n}$ , jonka realisoinnit ("heitot") ovat  $n_1, n_2, n_3, \dots$

Nopanheiton mahdolliset arvot ovat kokonaisluvut  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Samoin kolikonheitossa, jos kruunan arvoksi otetaan 0 ja klaavan arvoksi



TAULUKKO 2.4. Nopanheiton tilastotiedettä.

Heittojen lukumäärä	1	2	Arvo				Keskiarvo $\pm$ stan- dardipoikkeama
			3	4	5	6	
60	14	8	9	12	9	8	$10 \pm 2,4$
%	13,33	23,33	13,33	15,00	20,00	15,00	$16,67 \pm 4,08$
600	103	91	106	114	87	99	$100 \pm 9,9$
%	16,50	17,17	15,17	17,67	19,00	14,50	$16,67 \pm 1,65$
6000	973	1007	1003	962	1015	1040	$1000 \pm 28,5$
%	17,33	16,22	16,78	16,72	16,03	16,92	$16,67 \pm 0,47$
60 000	10 138	9936	10 057	10 029	9925	9915	$10 000 \pm 89,5$
%	16,52	16,90	16,56	16,76	16,72	16,54	$16,67 \pm 0,15$

1. Sanotaan, että stokastisen suureen *arvojoukko* on  $\{0, 1\}$ , diskreetti arvojoukko.

Kun suoritetaan nopanheitto yhä uudelleen ja uudelleen — kerätään *realisointeja*  $n_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  — voidaan aina tietyn heittojen kokonaislukumäärän jälkeen taulukoida tulokset. Saadaan esimerkkitaulukko 2.4, joka ilmaisee, montako heittoa kokonaismäärästä oli ykkösiä, montako kakkosia, jne.

Kokemuksen mukaan mitä suurempi nopanheittojen lukumäärä, sitä pienempi yleensä on lopputuloksen poikkeama ihannetuloksesta, jossa jokaisen arvon esiintymistiheys prosenteissa olisi  $16,666\dots\%$ , eli  $\frac{1}{6}$ . Tätä empiiristä tulosta kutsutaan *suurten lukujen laiksi*.



### 2.3.2 Odotusarvo

Tämän perusteella voidaan nopanheiton tuloksille antaa teoreettinen *todennäköisyysarvo*, joka ilmaisee, kuinka usein tietty arvo pitkään jatkuneessa heittojen sarjassa tapahtuu. Tasapainoisen (”rehellisen”) nopan tapauksessa todennäköisyysarvot ovat

$$p(1) = p(2) = \dots = p(6) = \frac{1}{6}.$$

Diskreetissa tapauksessa *odotusarvo* — arvo, jonka ympäri heitot ryhmittyvät, niiden ”painopiste” — lasketaan yhtälön<sup>9</sup>

$$E\{\underline{n}\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N i \cdot p(i) \quad (2.1)$$



mukaan, ja saadaan  $\frac{21}{6} = 3,5$ . Tässä  $N$  on vaihtoehtojen lukumäärä. Arvo 3,5 ei ole edes nopanheiton mahdollinen tulos!

Rehellen kolikon tapauksessa

$$p(0) = p(1) = 0,5,$$

ja odotusarvo on saman yhtälön mukaan 0,5. Myöskään tämä arvo ei ole heiton mahdollinen tulos.



## 2.4 Tilastolliset jakaumat



### 2.4.1 Reaaliarvoisia suureita ja tiheysjakaumia

Geodeettiset mittaukset ovat yleensä stokastisia suureita, joiden *arvojoukko* eli kodomeeni on reaalilukujen  $\mathbb{R}$  osajoukko, siis *jatkuva*. Esimerkiksi etäisyysmittauksen tulos on etäisyys metreinä, ja se on reaaliluku<sup>10</sup>. Samoin kulmamittausten tapauksessa. Arvojoukko voi olla rajallinen,  $\alpha \in [0, 360^\circ)$ , mutta se on joka tapauksessa jatkuva.

Jatkuvan arvojoukon tapauksessa puhutaan *todennäköisyystiheysjakaumasta*, lyhyesti *jakaumasta*. Jos tehdään suuri määrä mittauksia samasta kohteesta, voidaan piirtä *histogrammi*. Arvojoukko jaetaan ”koreihin” eli arvoväleihin, lasketaan ja näytetään montako mittaustulosta osuu kuhunkin koriin.

Esimerkiksi jatkuvasta tilastollisesta jakaumasta kelpaa jalkapallopelissä tehtyjen maalien paikat maaliportissa, kuva 2.3.

Mitä enemmän mittauksia, sitä enemmän pylväitä voi piirtää ja sitä kapeampia niistä tulee. Limiitissä, jossa mittausten määrä on ääretön, saadaan jatkuva käyrä, *todennäköisyystiheysjakauma*, joka ilmaisee todennäköisyyttä, jolla mittaustulos osuu johonkin arvoväliin  $[x_1, x_2]$ . Katso kuvan 2.4 esimerkki.

Jos tietyllä välillä  $[x_1, x_2]$  integraali

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

<sup>9</sup>Yleisemmin,

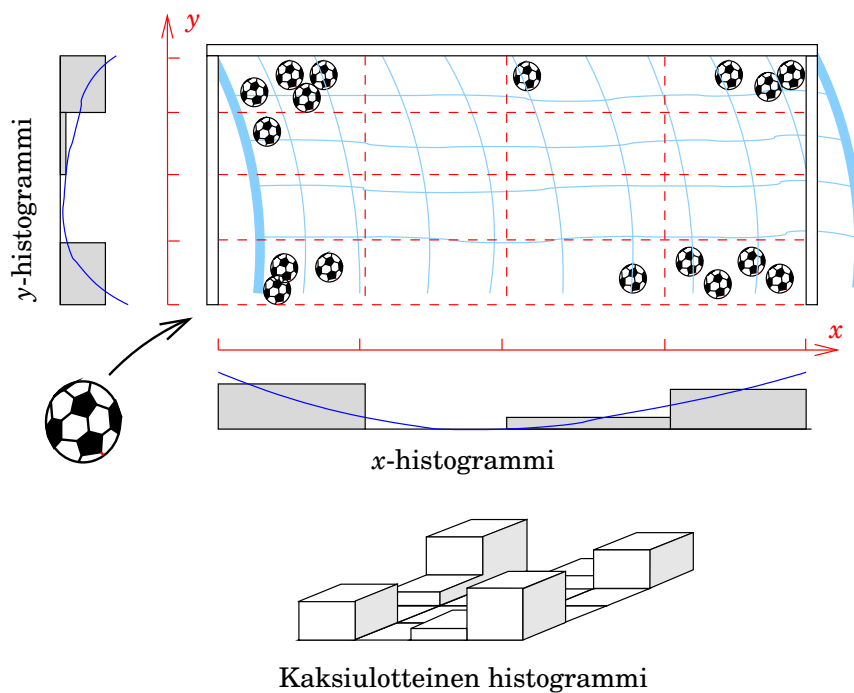
$$E\{\underline{n}\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N v_i \cdot p(i),$$

jossa  $v_i$  on arvovaihtoehto, jonka sarjanumero on  $i$ . Nopalle  $v_i = i$ .

<sup>10</sup>Itse asiassa rationaaliluku  $\in \mathbb{Q}$ .

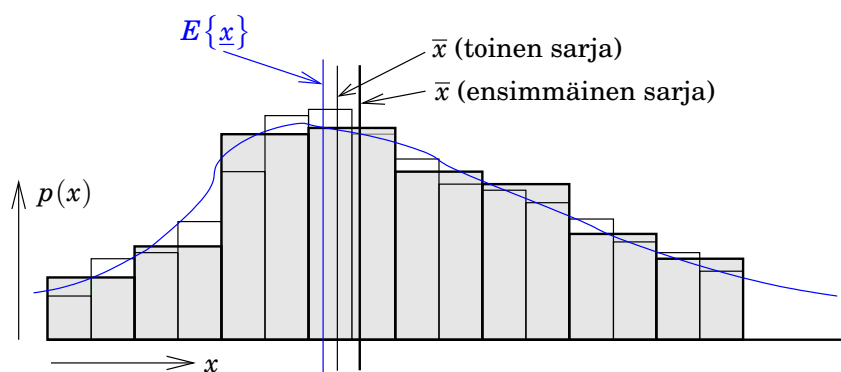




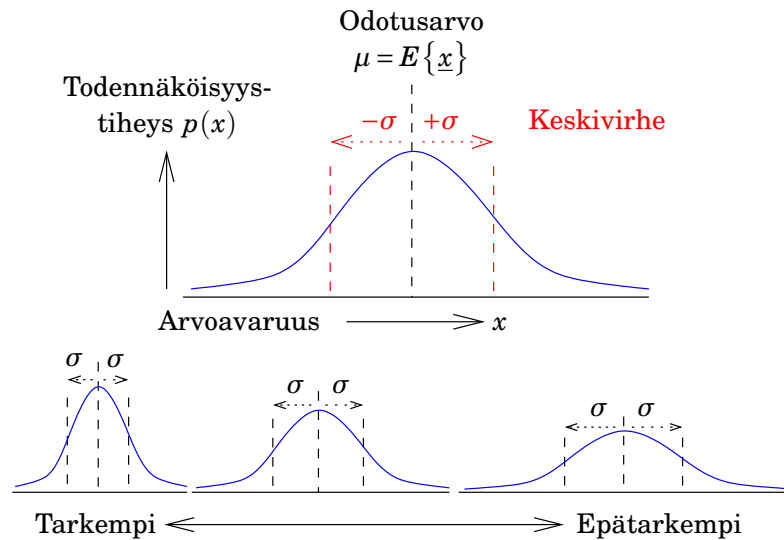


KUVA 2.3. Esimerkki jatkuvan (kaksiulotteisen) arvojoukon stokastisesta suureesta. Erikseen on piirretty myös histogrammit argumenttien  $x$  ja  $y$  mukaan sekä yhdessä molempien mukaan. Sininen käyrä on mahdollinen todennäköisyyden tiheysjakaumafunktio.

on nolla, sanotaan, että tässä välissä olevan arvon  $x$  esiintyminen stokastisen suureen realisointina on *mahdoton*. Jos integraali on 1, sanotaan että jonkun  $x \in [x_1, x_2]$  esiintyminen on *varma*. Kaikissa muissa tapauksissa integraalin arvo antaa *todennäköisyyden*, että stokastisen suureen realisoinnin arvo osuisi väliin. Todennäköisyysarvo on siis aina nollan ja



KUVA 2.4. Reaaliarvoisen stokastisen suureen todennäköisyystiheysjakauma  $p(x)$  histogrammien limiittinä. Myös odotusarvo  $E\{x\}$  ja kahden mittausarjon keskiarvot on piirretty. Mittausarjoista toinen sisältää kaksi kertaa enemmän havaintoja kuin ensimmäinen.



KUVA 2.5. Normaali-jakauman keskeiset ominaisuudet.

<sup>11</sup> yhden välissä<sup>11</sup>.

Aina

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1,$$

koska yhdistetty todennäköisyys, että mittausarvo on *mikä tahansa* reaalityluku, on 1 eli 100%: se on *varma*.

Myös jatkuvalle stokastiselle suurelle voidaan laskea odotusarvo. Odotusarvointegraali on samannäköinen kuin diskreetti vastine <sup>2.1</sup>:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx.$$

Odotusarvo on tiheysjakaumakäyrän  $p(x)$  alla olevan pinta-alan painopisteen  $x$ -koordinaatti.



### 2.4.2 Gaussin kellokäyrä

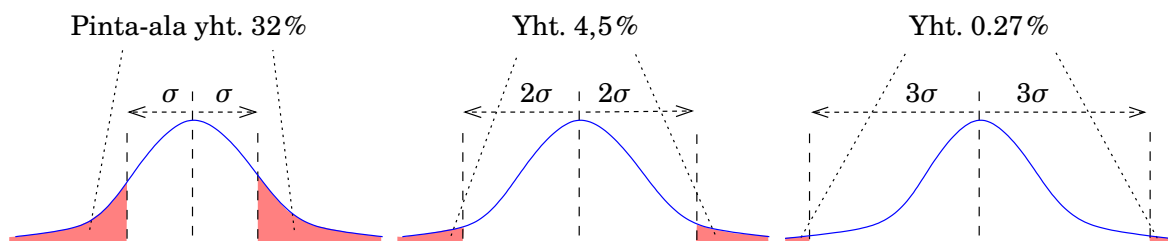
Geodesiassa käytetään lähes aina *normaali-* eli Gaussin *jakaumaa* ("kellokäyrää").

Kuvassa <sup>2.5</sup> näkyy *odotusarvo*  $\mu = E\{x\}$ . Odotusarvo voidaan ymmärtää havaitun suureen  $x$  "oikeaksi arvoksi", joka ei ole itse mitattavissa, mutta jonka ympäri mittausarvot sijoittuvat satunnaisvirheittensä vai-

<sup>12</sup> kutuksesta. Kuvassa näkyy myös *keskivirhe*<sup>12</sup>  $\sigma$ , joka kuvaa yksittäisen

<sup>11</sup>Matemaattisesti todennäköisyys on *mitta*, kuten myös esimerkiksi pinta-ala tai tilavuus.

<sup>12</sup>...eli standardipoikkeama, eli *standardiepävarmuus*.



KUVA 2.6. Normaalijakauman todennäköisyysarvoja.

mittauksen taipumusta poiketa odotusarvostaan. Normaalijakauman tapauksessa keskivirheen kokoiset poikkeamat  $\mu \pm \sigma$  sijoittuvat käyrän *taivutuspuisteisiin*.

Käytetään myös käsitettä nimeltä *varianssi*, keskivirheen neliö:

$$\text{Var}\{\underline{x}\} = \sigma^2,$$

jonka muodollinen määritelmä on<sup>13</sup>

13

$$\text{Var}\{\underline{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{\left(\underline{x} - E\{\underline{x}\}\right)^2\right\}. \quad (2.2)$$

Tässä  $E\{\cdot\}$  on yllä määritelty odotusarvo-operaattori.

Odotusarvon tapaan myös varianssi on sellainen ”oikea arvo”, joka on teoreettisesti olemassa, mutta ei koskaan tule oikeasti mitatuksi. Kun käytettävissä on rajallinen määrä havaintoja eli *otos*, voidaan laskea *otoksen keskiarvo* ja *otosvarianssi*, jotka havaintojen määrän kasvaessa menevät yhä vain lähemmäksi odotusarvoa ja varianssia. Tätäkin ilmiötä kutsutaan *suurten lukujen laiksi*.

Normaalijakauman matemaattinen lauseke  $p(x)$  — jota ei tässä esitetä — antaa integroinnin kautta seuraavat todennäköisyysarvot:

- todennäköisyys, että  $x$  poikkeaa odotusarvosta  $E\{\underline{x}\}$  enemmän kuin  $\sigma$ :n verran (puolella tai toisella): 32 %
- todennäköisyys, että  $x$  poikkeaa odotusarvosta  $E\{\underline{x}\}$  enemmän kuin  $2\sigma$ : 4,5 %
- todennäköisyys, että  $x$  poikkeaa odotusarvosta  $E\{\underline{x}\}$  enemmän kuin  $3\sigma$ : 0,27 %.

*Käytännössä normaalisti jakautunut stokastinen suure ei juuri koskaan poikkeaa odotusarvostaan enemmän kuin kolme kertaa keskivirheensä verran.*

<sup>13</sup>Siis stokastisen suureen poikkeama omasta odotusarvostaan, nostettu toiseen potenssiin, ja siitä odotusarvo. Tämä on jonkinlainen kustannusfunktio: jos ”virheen”  $\underline{x} - E\{\underline{x}\}$  kustannus on verrannollinen sen neliöön, on  $\text{Var}\{\underline{x}\}$  virheen odotettava kustannus.

Tätä nyrkkisääntöä, *kolmen sigman sääntöä*, käytetään tilastollisessa testauksessa hyväksi.

Normaalijakauman lisäksi tilastollisia jakaumia on olemassa suuri määrä. Jakaumat sisältyvät tilastolliseen laskentaan soveltuviin ohjelmistopaketteihin, kuten MATLAB ja R, sekä yleisohjelmoinnin numeerisiin kirjastoihin<sup>14</sup>.



### 2.4.3 Kovarianssi ja korrelaatio

Kun on kaksi stokastista suuretta  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$ , voidaan niiden kummankin oman käyttäytymisen lisäksi tutkia, miten ne käyttäytyvät *yhdessä*.

*Kovarianssiksi* kutsutaan lauseketta

$$\text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})(\underline{y} - E\{\underline{y}\})\right\}. \quad (2.3)$$

Tämä määritelmä on analoginen varianssin vastaavaan yhtälöön 2.2, mutta kuvaa suureiden  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  ”samalla tavalla käyttäytymistä” eli niiden satunnaisten vaihtelujen samanlaisuutta.

Usein on järkevä *skaalata* kovarianssi suureiden  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  varianssien suhteen seuraavalla tavalla:

$$\text{Corr}\{\underline{x}, \underline{y}\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\}}{\sqrt{\text{Var}\{\underline{x}\}\text{Var}\{\underline{y}\}}}.$$

Näin on määritelty *korrelaatio* suureiden  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  välillä. Korrelaatio on aina välissä  $[-1, 1]$  eli  $[-100\%, 100\%]$ .

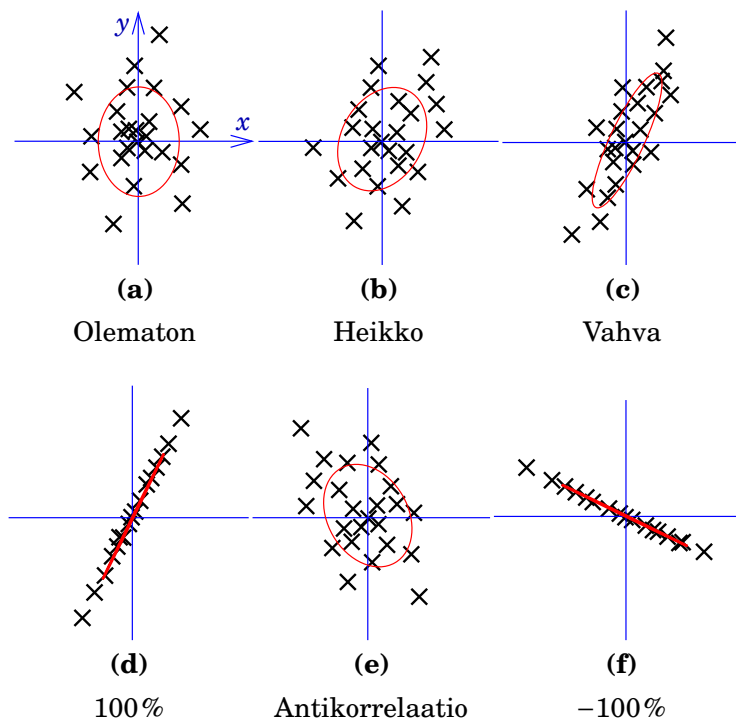
Tilastollisesti riippumattomien suureiden  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  välillä korrelaatio (ja kovarianssi) on 0. Korrelaation ei-häviäminen voi olla merkki suureiden välisestä syy-seuraussuhteesta — kuitenkin ei voida sanoa, että  $\underline{x}$  on syy ja  $\underline{y}$  seuraus!  $\underline{y}$  voi olla  $\underline{x}$ :n syy, tai  $\underline{x}$ :llä ja  $\underline{y}$ :llä voi olla yhteinen syy  $\underline{z}$ .

Jos korrelaatio on 1 eli 100%, puhutaan *täydellisestä korrelaatiosta*. Tässä tapauksessa suureiden  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  välillä on olemassa tarkka funktionaalinen yhteys. Jos toisen suureen realisointiarvo on annettu, voidaan laskea toisen vastaava realisointiarvo tarkasti.

Jos korrelaatio on negatiivinen, puhutaan *antikorrelaatiosta*. Jos korrelaatio on  $-1$  eli  $-100\%$ , on suureiden  $\underline{x}$  ja  $-\underline{y}$  välillä olemassa täydellinen korrelaatio, ja puhutaan *täydellisestä antikorrelaatiosta*.

Kuvassa 2.7 esitetään muutama esimerkki korrelaatiosta.

<sup>14</sup>Hyvä yleiskatsaus on Easton ja McColl.



KUVA 2.7. Eri korrelaatioiden esimerkkejä.



#### 2.4.4 Virheiden kasautumislaki

Tärkeä keskivirheiden ominaisuus on *virheiden kasautumislaki*, myös *propagaatiolaki*.

Jos stokastinen suure  $\underline{z}$  on kahden muun stokastisen suuren  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  lineaariyhdistelmä,

$$\underline{z} = a\underline{x} + b\underline{y},$$

voidaan myös kirjoittaa

$$E\{\underline{z}\} = aE\{\underline{x}\} + bE\{\underline{y}\},$$

ja siis

$$(\underline{z} - E\{\underline{z}\}) = a(\underline{x} - E\{\underline{x}\}) + b(\underline{y} - E\{\underline{y}\}).$$

Tämä lienee intuitiivisesti selvä. Nyt varianssin määritelmän, yhtälön 2.2, mukaan seuraa

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\underline{z}\} &= E\left\{(\underline{z} - E\{\underline{z}\})^2\right\} = \\ &= a^2 E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})^2\right\} + b^2 E\left\{(\underline{y} - E\{\underline{y}\})^2\right\} + \\ &\quad + 2ab E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})(\underline{y} - E\{\underline{y}\})\right\}. \end{aligned}$$



Määritelmät 2.2 ja 2.3 antavat nyt

$$\text{Var}\{\underline{z}\} = a^2 \text{Var}\{\underline{x}\} + b^2 \text{Var}\{\underline{y}\} + 2ab \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\}. \quad (2.4)$$

Tätä yhtälöä kutsutaan *varianssien* (tai virheiden) *kasautumislaki*ksi.

Siinä tapauksessa, että  $\text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} = 0$  — siis suureet  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  eivät korreloi keskenään — saadaan

$$\text{Var}\{\underline{z}\} = a^2 \text{Var}\{\underline{x}\} + b^2 \text{Var}\{\underline{y}\},$$

kompaktimmassa notaatiossa

$$\sigma_z^2 = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2.$$

Tämä voidaan yleistää tilanteeseen, jossa on enemmän kuin kaksi suurta. Esimerkiksi jos

$$\underline{w} = a\underline{x} + b\underline{y} + c\underline{z},$$

saadaan

$$\sigma_w^2 = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + c^2 \sigma_z^2.$$

*Erikoistapaus* on tilanne, jossa  $z$  on  $x$ :n ja  $y$ :n summa tai erotus, siis  $a = \pm 1$ ,  $b = \pm 1$ , ja  $x$  ja  $y$  ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan. Silloin saadaan yksinkertainen Pythagorasta muistuttava, laajasti käytetty yhtälö:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Usein tätä erikoistapausta kutsutaan virheiden kasautumislaki.

**Esimerkki** Olemme mitanneet etäisyyden pisteiden  $A$  ja  $B$  välillä kolmessa osassa,

$$\underline{s}_{AB} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3$$

(siis  $a = b = c = 1$ ), jossa

$$\underline{s}_1 = 10 \text{ m} \pm 0,05 \text{ m}, \quad \underline{s}_2 = 20 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}, \quad \underline{s}_3 = 15 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}.$$

Havaitsemme, että

$$\sigma_1 = 0,05 \text{ m}, \quad \sigma_2 = 0,2 \text{ m}, \quad \sigma_3 = 0,1 \text{ m},$$

ja

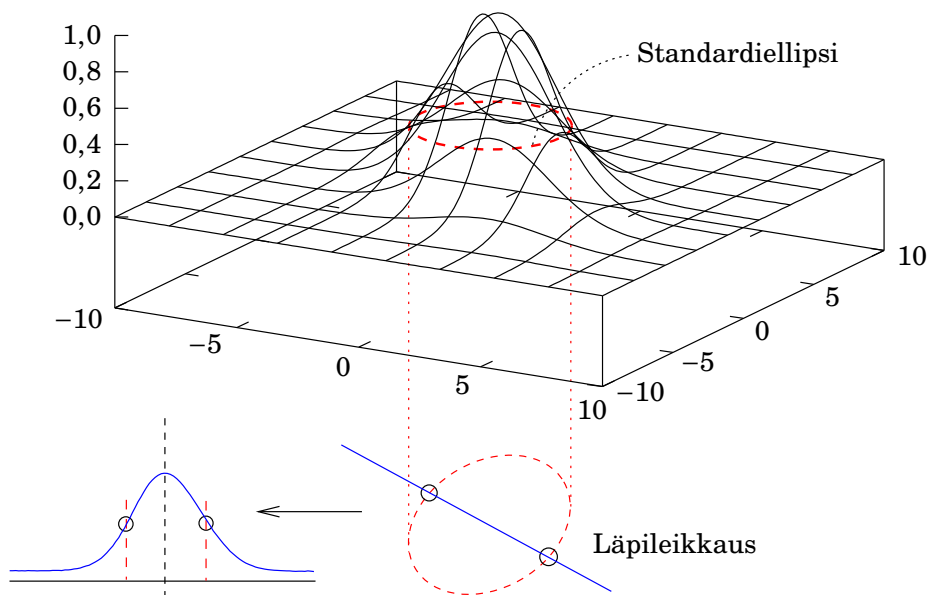
$$\begin{aligned} \sigma_{AB}^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = (0,05 \text{ m})^2 + (0,2 \text{ m})^2 + (0,1 \text{ m})^2 = \\ &= 0,0525 \text{ m}^2, \end{aligned}$$

siis  $\sigma_{AB} = \sqrt{\sigma_{AB}^2} \approx 0,23 \text{ m}$ , ja tulos on

$$\underline{s}_{AB} = 45 \text{ m} \pm 0,23 \text{ m}.$$

(Mittaukset oletetaan tilastollisesti riippumattomiksi toisistaan.)





KUVA 2.8. Kaksiulotteinen todennäköisyystiheysjakauma.



### 2.4.5 Moniulotteiset jakaumat

Usein, kuten yllä olevassa jalkapallo-esimerkissä (kuva 2.3), puhutaan stokastisista suureista, jotka koostuvat useista komponenteista. Esimerkki ovat pisteen koordinaatit  $(x, y)$  tasossa. Samalla tavalla kuin yllä kuvattuna, voidaan piirtää kaksiulotteisia histogrammeja ja puhua todennäköisyystiheysjakaumasta  $p(x, y)$ .

Kuvassa 2.8 näkyy kaksiulotteinen normaalitiheysjakauma ja sen *standardiellipsi* eli *virhe-ellipsi*. Se on kaksiulotteinen vastine keskivirheelle. Pystysuuntainen läpileikkaus tuottaa taas aina yksiulotteisen Gaussin kellokäyrän, jonka keskivirhepisteet  $\mu \pm \sigma$  ovat leikkaustason ja virhe-ellipsin leikkauskohdat.

Kun yksiulotteisen jakauman keskivirhepisteet ovat  $x = \mu \pm \sigma$ , on virhe-



TAULU 2.5. Korrelaatiosta.

Korrelaatio on merkillinen asia. On aina hyvä muistaa, että tilastollinen riippuvuus *ei* välttämättä merkitse, että suureiden välillä on olemassa suora syy-seuraussuhde, vaan että havainnoilla on jotain yhteistä. Yhteys voi olla epäsuora, kuten kuuluisassa tapauksessa, jossa kesän jäätelömyynti korreloi hukumiskuolemien kanssa. Yhteys voi myös olla vailla mielenkiintoa, kuten korrelaatio kahden ajassa trendaavan ilmiön, esimerkiksi Etiopian bruttokansantuotteen ja Tanskan tuulivoiman tuotannon, välillä.



ellipsin yhtälö monimutkaisempi. Stokastisen koordinaattiparin  $(\underline{x}, \underline{y})$  odotusarvo ("todellinen arvo") on itsekin koordinaattipari,  $(\mu_x, \mu_y)$ , virhe-ellipsin keskipiste.

Yleisessä tapauksessa, jossa virhe-ellipsin akselit eivät ole koordinaattiakseleiden suuntaisia (ja eripituisia!), stokastisten suureiden paria  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  ei enää voida käsitellä riippumattomina muuttujina: ne *korreloivat* keskenään. Tämä merkitsee, että suureen  $x$  todennäköisin arvo riippuu suureen  $y$  todellisesta arvosta ja päinvastoin. Suureen  $y$  jonkinasteinen tietäminen auttaa suureen  $x$  arvioimisessa ja toisinpäin. Tasoituslaskussa tämä tilastollinen riippuvuus on otettava huomioon, jotta saataisiin mahdollisimman hyviä — *optimaalisia* — sekä odotusarvon  $\mu_x$  että odotusarvon  $\mu_y$  estimaatteja.

Kolmiulotteisessa avaruudessa löytyy kolmen argumentin todennäköisyystiheysjakaumia  $p(x, y, z)$ , joiden kuvaajat ovat kolmiakselisia (siis kolmiulotteisia) *virhe-ellipsoideja*.



#### 2.4.6 Varianssimatriisi

Moniulotteisten stokastisten suureiden varianssit muuttuvat itsekin moniulotteisiksi eli *varianssimatriiseiksi*. Olkoon<sup>15</sup>

$$\underline{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix},$$

jolloin varianssimatriisi (eli varianssi-kovarianssimatriisi) on

$$\text{Var}\{\underline{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \text{Var}\{\underline{x}\} & \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} \\ \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} & \text{Var}\{\underline{y}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \Sigma_{xx},$$

jossa pätee taas määritelmät

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\underline{x}\} &\stackrel{\text{def}}{=} E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})^2\right\}, \\ \text{Var}\{\underline{y}\} &\stackrel{\text{def}}{=} E\left\{(\underline{y} - E\{\underline{y}\})^2\right\}, \\ \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} &\stackrel{\text{def}}{=} E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})(\underline{y} - E\{\underline{y}\})\right\}, \end{aligned}$$

<sup>16</sup> ja jossa näkyy usein käytetty kirjoitustapa<sup>16</sup>

$$\text{Var}\{\underline{x}\} = \sigma_x^2, \quad \text{Var}\{\underline{y}\} = \sigma_y^2, \quad \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} = \sigma_{xy}.$$

<sup>15</sup>... ja tietysti odotusarvokin on vektori:  $E\{\underline{x}\} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}$ !

<sup>16</sup>Joskus vanhemmissa kirjoituksissa nähdään  $\text{Var}\{\underline{x}\} = m_x^2$ ,  $\text{Var}\{\underline{y}\} = m_y^2$ ,  $\text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} = m_{xy}$ , koska aikanaan kreikkalaisten kirjoittaminen koneella oli hankalaa.





Liitteestä A löytyy lyhyt selostus matriisilaskennan perusteista.

Itse asiassa *virhe-ellipsi* on tämän  $2 \times 2$  -kokoisen varianssimatriisin graafinen esitystapa. Jos  $\sigma_{xy} = 0$ , sanotaan, että  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  eivät korreloi keskenään, tai huolimattomasti<sup>17</sup>, että ne ovat tilastollisesti riippumattomia<sup>17</sup> toisistaan.

Myös varianssien kasautumislaki, yhtälö 2.4,

$$\text{Var}\{\underline{z}\} = a^2 \text{Var}\{\underline{x}\} + b^2 \text{Var}\{\underline{y}\} + 2ab \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\},$$

voidaan kirjoittaa yleisempään muotoon: jos muodostetaan rivivektori

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix},$$

ja vastaava sarakevektori<sup>18</sup>

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

saadaan

$$\text{Var}\{\underline{z}\} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Var}\{\underline{x}\} & \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} \\ \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} & \text{Var}\{\underline{y}\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{a} \cdot \text{Var}\{\underline{x}\} \cdot \mathbf{a}^T.$$

Tämän ymmärtäminen edellyttää matriisien kertolaskun (rivi  $\times$  sarake) osaamista, katso liite A. Auki kirjoittaminen antaa alkuperäisen yhtälön 2.4 takaisin.

Kirjallisuudessa esitetään asia symbolisesti hieman vaihtelevilla kirjoitustavoilla:

$$\sigma_z^2 = \mathbf{a} \text{Var}\{\underline{x}\} \mathbf{a}^T = \mathbf{a} \Sigma_{xx} \mathbf{a}^T.$$

Varianssien kasautumista monen muuttujan lineaarisissa malleissa käsitellään yleisemmin osiossa 14.7.



## 2.5 Geodeettisia mittasuureita

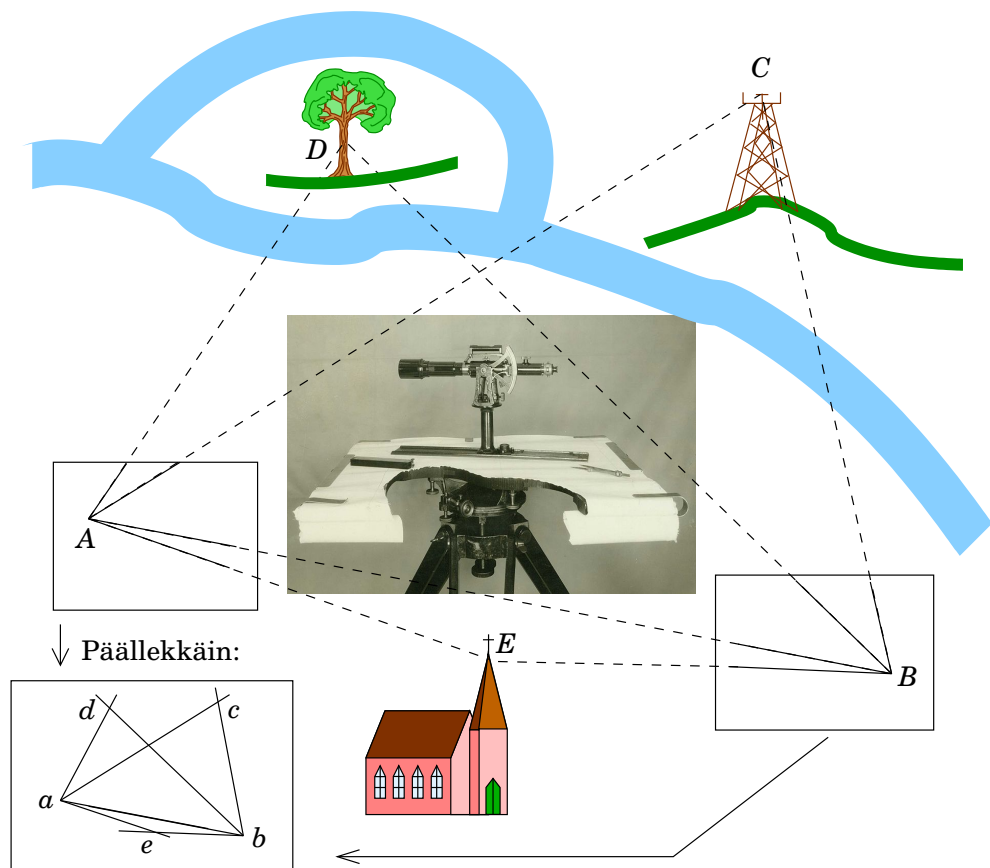


### 2.5.1 Kulmia, suuntia

Suuret maan- tai mannerlaajuiset geodeettiset verkot ovat perinteisesti olleet aina *kolmiomittausverkkoja*. Verkon asemien välillä mitataan

<sup>17</sup>... koska olemassa voi olla monimutkaisempia tilastollisia riippuvuuksia, jotka eivät näy korrelaationa.

<sup>18</sup>Transpoosi-merkintää käytetään usein sarakevektorin kirjoittamisen helpottamiseksi juoksevässä tekstissä.



KUVA 2.9. Kolmiomittaus mittapöydän ja kiikariviivaimen avulla. Kuva keskellä [Wikimedia Commons, Mittapöytä ja kiikariviivain](#).

*suuntia* ja verkon mittaukset tasoitetaan: mittausarvoista poistetaan laskennallisesti mittausepävarmuuden aiheuttamat pienet ristiriidat ja saadaan kolmiomittauksen ratkaisu. Aikanaan etäisyysmittauksia oli vaikea suorittaa suurilla etäisyyksillä, koska ainoa käypä tekniikka oli mittaus mekaanisten apuvälineiden, kuten mittanauhojen tai -sauvojen, avulla.

Kolmiomittauksessa verkosta mitataan kaikkien mittauskelpoisten suuntien lisäksi *yksi ainoa etäisyys*. Mittausarvoista lasketaan kaikki muut etäisyydet ja pisteiden sijainnit. Näin Snellius suoritti kuuluisan astemittauksensa Bergen op Zoomin ja Alkmaarin välillä, kaupunkien, joiden välinen etäisyys on 130 km. Hän mittasi vain suoraan niitylle rakentamansa, 87 *roeden* pitkän, perusviivan pituuden! Samalla tavalla suoritettiin Lapin astemittaus: perusviiva rakennettiin talvella 1736 Tornionjoen jäälle, muut mittaukset olivat suuntahavaintoja kolmiomittausverkon pisteiden välillä.

<sup>19</sup> Kolmiomittauksen perusidea voidaan selittää *mittapöydän*<sup>19</sup> avulla.

Maastossa pisteessä  $A$  pystytetään mittapöytä, laitetaan sen päälle läpinäkyvä paperilehti ja piirretään kaikki suunnat maastossa oleviin kohteisiin  $B, C, D$  ja  $E$ <sup>20</sup>. Sen jälkeen siirrytään pisteeseen  $B$  ja piirretään samanlainen suuntien joukko kohteisiin  $A, C, D$  ja  $E$ . Toimistossa paperiliuskat asetetaan päällekkäin. Tulos on miniatyyrikuva maiseman todellisesta geometriasta — mittakaavalla  $m = ab : AB$ . Siis jos etäisyys  $AB$  maastossa on 3 km ja päällekkäin olevilla papereilla  $ab = 30$  cm, on näin saadun ”kartan” mittakaava 1 : 10 000.

Nykyisin suunnat mitataan *teodoliitilla*, tarkalla vaaka- ja pystykulmien mittalaitteella, ja kartan muodostaminen tapahtuu laskennallisesti.

Fotogrammetriasta löytyy mittapöytämenetelmän kolmiulotteinen vastine, *stereomallirestituutio*, joka nykyisin toteutetaan täysin digitaalisesti. Kuva 2.10 näyttää, miten kahdesta ilmakuvasta muodostetaan stereomalli katselulaitteen avulla. Stereorestituutiolaitteessa muodostetaan samalla tavalla malli, jonka sisällä voidaan liikuttaa *avaruusmittamerkkiä* kolmiulotteisesti. Merkin koordinaatit tulostetaan laitteeseen kytketylle tietokoneelle, ja kartta voidaan luonnostaa heti.

Myös *ilmakolmiointi* perustuu stereomallien muodostamiseen.

Suhteellisen moderni geodeettinen tekniikka, joka perustuu mittapöydän ideaan mutta kolmessa ulottuvuudessa, on Yrjö Väisälän<sup>21</sup> *tähtikolmiomittaus*. Tämä tekniikka, jossa tähtitaivasta käytetään suuntien mittaukseen, käsitellään osiossa 17.3.



## 2.5.2 Etäisyyksiä, etäisyyseroja

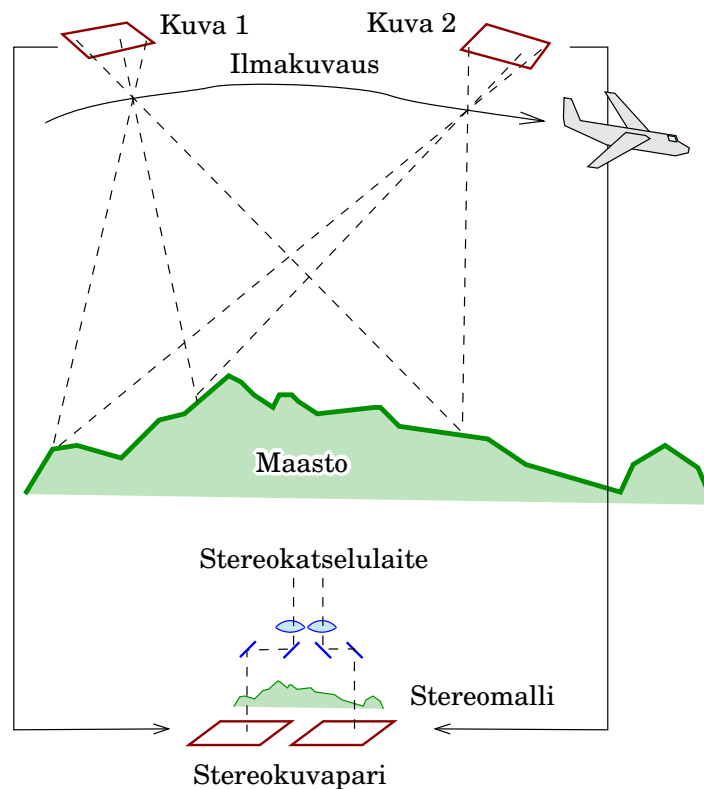
Aikanaan etäisyyksiä voitiin mitata vain mekaanisesti mittanauhan, mittalangan tai mittatankojen avulla. Mittauksissa saavutettu tarkkuus oli usein vaikuttavaa huolellisten menettelytapojen ansiosta.

Paikallisessa maastomittauksessa käytetään edelleen teräksisiä mittanauhoja, jotka ovat halpoja ja joita on helppo käyttää ja kuljettaa. Ne

<sup>19</sup>Kiitos Heiskanen ja Härmälä (1963) sivun 234 terminologiasta. Engl. *plane table*, saks. *Messtisch*, ransk. *planchette*, holl. *meettafel*, ruots. *lantmätartavla*, tansk., norj. *målebord*.

<sup>20</sup>Piirtämistä helpottaa *kiikariviivaimen* (en. *alidade*, saks. *kippregel*) käyttö.

<sup>21</sup>Yrjö Väisälä (1891–1971), ”Tuorlan taikuri”, oli suomalainen tähtitieteilijä, fyysikko, geodeetti, metrologi, teleskooppien rakentaja, komeettojen ja pikkuplaneettojen löytäjä, huvipurjehtija ja esperantisti.



KUVA 2.10. Stereomallin muodostaminen fotogrammetriassa.

pitää vain muistaa puhdistaa ja rasvata käytön jälkeen. Mittanauhojen pituudet ovat 20–60 m. Entisaikojen tarkkuusmittalangat tehtiin invarista, terässeoksesta jolla on hyvin pieni lämpölaajenemiskerroin.

Nykyisin etäisyysmittaukset tehdään elektronisesti tai sähköoptisesti. Pisteiden välille tarvitaan vain suora näköyhteys. Laitteet voivat käyttää mikroaaltoja (Tellurometer) tai yleisemmin näkyvää valoa (Kern Mekometer), laservaloa (Geodimeter<sup>22</sup>) tai hohtodiodin (LEDin) tuottamaa infrapunavaloa (useimmat modernit etäisyysmittarit ja takymetrit). Ilmakehän kulkuviiveiden vaikutus signaalin kulkuun on otettava huolellisesti huomioon havaintojen käsittelyssä.

Terrestriset geodeettiset mittauskojeet osaavat mitata sekä vaaka- ja pystykulmia että vinoetäisyyksiä. Niitä kutsutaan *elektronisiksi takymetreiksi*<sup>23</sup>, ja ne siten yhdistävät teodoliitin ja etäisyysmittarin ominaisuudet yhdeksi integroiduksi, täyselektroniseksi ja pitkälle automatisoiduksi kojeeksi.

Myös satelliittigeodesia käyttää elektronista etäisyysmittausta. Laa-

<sup>22</sup>Geodimeter™ on ruotsalaiskeksintö ja nimi on Ruotsin Trimble AB:n tavaramerkki.

<sup>23</sup>Takymetri, kreik. *nopea mittari*. Englanniksi nimi *total station* on suosittu.

jasti käytössä olevat GNSS-järjestelmät (Global Navigation Satellite Systems), kuten satelliittipaikannusjärjestelmä GPS, Global Positioning System, perustuvat mikroaaltojen avulla tehtyihin etäisyysmittauksiin — tarkemmin, etäisyysseromittauksiin<sup>24</sup>. Satelliittilaserit puolestaan (kuten Metsähovin tutkimusasemalla toimiva laite) mittaavat laserpulssin kulkuaikaa havaintoasemasta valoa heijastavaan satelliittiin ja takaisin. 24

Elektroniikan etuna on, että taajuusmittauksen uskomaton tarkkuus kääntyy etäisyyksien tarkkuudeksi. Kun taajuusmittauksen tarkkuus voi hyvinkin olla  $1 : 10^{12}$ , on ymmärrettävää, että GPS:n avulla mitataan mannertenvälisiä etäisyyksiä jopa suhteellisella tarkkuudella  $1 : 10^9$ . Satelliittitekniikat ovat jopa maanpäällisiä etäisyysmittauksia tarkempia, koska signaalin matkasta valtaosa on ilmakehän tiheämpien osien ulkopuolella.



### 2.5.3 Potentiaalieroja, vaaitus

Geopotentialierojen mittausta tapahtuu perinteisesti vaaituksen avulla, jolloin kahden pisteen välinen korkeusero mitataan metreissä ja muunnetaan potentiaalieroksi paikallisen painovoiman  $g$  avulla. Jos korkeusero on  $\Delta H$  ja geopotentialiero  $\Delta C$ , käytetään yhtälöä<sup>25</sup> 25

$$\Delta C = g \Delta H.$$

Mittaukset toistetaan linjaa pitkin ja saadut erotukset  $\Delta C_i$  summataan. Linjoista rakennetaan vaaitusverkko, jonka potentiaalierojen on oltava suljettujen silmukoiden ympärillä laskettuina nolla. Verkko tasoitetaan tätä ehtoa käyttäen.

Alaosiossa 4.3.1 esitetään perinteistä vaaitusta eksoottisempia korkeusmittauksen vaihtoehtoja, joista monet perustuvat geopotentialierojen suoraan fysikaaliseen vertailuun esimerkiksi nestepinnan avulla.



## 2.6 Koordinaateista

Geodesiassa käytetään Maan muodon ja koon kuvaamiseksi sekä Maan pinnalla ja sen läheisyydessä olevien pisteiden paikkojen määrittämiseksi koordinaatteja.

<sup>24</sup>Hyperboliset paikannusjärjestelmät, kuten Decca, Transit/Doppler, GPS ja muut satelliittipaikannusjärjestelmät, perustuvat etäisyysseromittauksiin.

<sup>25</sup>Tämä on esimerkki siitä, että ”työ on voima kertaa matka”. Työ (per massayksikkö) on  $\Delta C$ , matka  $\Delta H$  ja voima (per massayksikkö, siis Newtonin lain  $F = ma$  mukaan kiihtyvyyden  $g$ ).

Geodesiassa käytetyt koordinaattijärjestelmät ovat yleensä *kolmiulotteisia*, koska maapallo on kolmiulotteinen kappale kolmiulotteisessa avaruudessa. Esimerkkinä voidaan mainita leveys- ja pituusaste sekä korkeus  $(\varphi, \lambda, h)$ , joiden avulla pisteen sijainti saadaan esitettyä intuitiivisella tavalla.

”Kaksiulotteiset” koordinaattijärjestelmät ovat oikeastaan *karttaprojektiokoordinaatteja*, johdannaissuureita, eivätkä ne siksi ole geodesiassa suoran kiinnostuksen kohteita. Ne kuuluvat lähinnä kartografian alaan, vaikka niitä käytetään sovelletussa maanmittauksessa varsin laajasti. Esimerkiksi vanhemmissa Suomen topografikartoissa kohtaa [KKJ](#)-koordinaatteja, jotka ovat karttatasossa — siis karttalehdeltä — suoraan viivoittimella mitattavia  $(x, y)$ -koordinaatteja.

Avaruuskoordinaattien rinnalla käytetään muutosprosessien kuvaamiseksi myös *aikaa*, ja fysikaalisessa geodesiassa käytetään eräänlaisena koordinaattina *geopotentialia*, Maan painovoimakentän potentiaalia (katso alaosio [4.1.1](#)).



## 2.7 Miksi tasokoordinaatteja käytetään

Koska maapallo on kolmiulotteinen kappale, on geodesia kolmiulotteinen tiede. Maapallo ja siihen liittyvät pisteet sijaitsevat kolmiulotteisessa avaruudessa, ja geodesian tehtävä on pisteiden sijaintien määrittäminen ja esitys kolmiulotteisten koordinaattien, esimerkiksi  $(X, Y, Z)$ , avulla. Nykyiset mittausjärjestelmät, kuten globaali satelliittipaikannusjärjestelmä [GPS](#), osaavat suoraan mitata kolmiulotteisia koordinaatteja.

Geodesia on myös ihmisiä palveleva, sovellettu tekniikan tieteenala. Ihmiskunta asuu painovoiman pakottamana Maan pinnan välittömässä läheisyydessä, kvasi-kaksiulotteisessa ”aliavaruudessa”, jossa liikkuminen on mahdollista lähinnä vaakasuunnassa, Maan pintaa pitkin. Tämän lisäksi tärkeä viestintäväline *paperi* on ehdottoman kaksiulotteinen, ja kartat piirretään tavallisesti paperille!

Geodesiassa ja maanmittauksessa käytetään varsin yleisesti *tasokoordinaatteja*: suorakulmaisia, kaksiulotteisia ja metrisiä koordinaatteja vaakatasossa.

Maanmittaustyöhön sopivia käytännön tasokoordinaattijärjestelmiä on olemassa monia. Pääerot niiden välillä ovat:

- *Origo* sijainti ja akseleiden *suuntaus*. Origo, lähtöpiste, jossa  $x = y = 0$  on oltava tunnettu. Yleensä akselit ovat  $x$  pohjoiseen ja  $y$



itään, muttei aina eikä välttämättä tarkasti.

- *Määrittystekniikka* eli geosentrisyys: nykyaikaiset tasokoordinaatit saadaan GNSS-tekniikalla tuotetuista geosentrisistä, kolmiulotteisista koordinaateista.

Geodeettiset tasokoordinaatit ovat itse asiassa *karttaprojektiokoordinaatteja*: ne lasketaan karttaprojektiokaavojen avulla alun perin kolmiulotteisista koordinaateista geodeettisten koordinaattien eli leveys- ja pituusasteen  $(\varphi, \lambda)$  kautta.

Hyvin pienillä alueilla, kuten rakennustyömailla, ei varsinaista karttaprojektiota tarvita. Näillä alueilla tasokoordinaatit voidaan katsoa *toposentristen* (havaintopaikkakeskeisten) *koordinaattien* suorakulmaiseksi erikoistapaukseksi.



## 2.8 Kolmiulotteiset paikkakoordinaatit

Kolmiulotteiset koordinaatit voivat olla erityyppisiä, esimerkiksi *suorakulmaisia* tai *geodeettisia* eli maantieteellisiä. Yleisin koordinaattijärjestelmä on *kolmiulotteinen* ja *suorakulmainen* eli *karteesinen*  $(X, Y, Z)$ -järjestelmä. Usein se on myös geosenttrinen.

*Geosentrisyys* tarkoittaa kirjaimellisesti, että origo on (tietyllä tarkkuudella) Maan massakeskipisteessä. Tämän lisäksi geosentrisen järjestelmän  $Z$ -akseli on Maan pyörähdysakselin suuntainen eli osoittaa taivaan pohjoisnapaan.

Geosentrisessä koordinaattijärjestelmässä  $X$ -akselin suunta on periaatteessa mielivaltainen eli konventionaalisesti sovittu. Maanpinnan geosentrisissä järjestelmissä  $X$ -akselin suunnan kiinnittämiseksi käytetään kansainvälisenä standardina *Greenwichin observatorion luotiviivan suunnan sisältävää meridiaania*<sup>26</sup>.

26

$X$ -akseli on sekä Greenwichin meridiaanitasossa että päiväntasaajan tasossa, siis kohtisuorassa  $Z$ -akseliin nähden.  $Y$ -akseli puolestaan on kohtisuorassa  $Z$ - ja  $X$ -akseleihin nähden, eli kaikki kolme akselia ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. Katso kuva 2.12.

<sup>26</sup>Vuoden 1884 Washington DC:n sopimus teki Greenwichin meridiaanista maailman nolla- eli vertausmeridiaanin. Samalla hyväksyttiin ”maailman aika” eli universaali-aika: *Greenwich Mean Time*, GMT. Perusidea oli, että eri maiden siviiliajat eroaisivat GMT:stä tietyllä kokonaistuntien määrällä, joka Suomessa on +2t (talvella, EET) tai +3t (kesällä, EEST). Ilman tätä aikavyöhykejärjestelmää kansainvälinen kanssakäyminen (merenkulku, ilmaliikenne, puhelinliikenne) olisi hankalaa.





KUVA 2.11. Greenwichin meridiaani turisteille. [Wikimedia Commons](#), [Nollameridiaani \(Greenwich\)](#).

Kolmiulotteiset suorakulmaiset koordinaatit  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ovat ehkä yleis-päteviä, mutteivät kovin intuitiivisia. Esimerkiksi Metsähovin tutkimusaseman GPS-antennin koordinaatit ovat, suomalaisessa EUREF-FIN-vertauskehyksessä ilmaistuna (katso osio 3.2.3):

$$X = 2892571,1204 \text{ m}, \quad Y = 1311843,2621 \text{ m}, \quad Z = 5512633,9521 \text{ m}.$$

Luvut ovat mielenkiintoisen näköisiä, mutteivät anna kovin valaisevaa, kansantajuista vastausta kysymykseen ”missä on Metsähovi?”...

Ensimmäisenä askeleena käytännöllisempiin koordinaatteihin konstruoidaan *geodeettisia koordinaatteja*. Ensin konstruoidaan matemaattisesti *vertausellipsoidi*, sopivasti litistynyt pyörähdysellipsoidi, jonka mitat ovat kohtuullisen lähellä maapallon todellisia mittoja<sup>27</sup>.

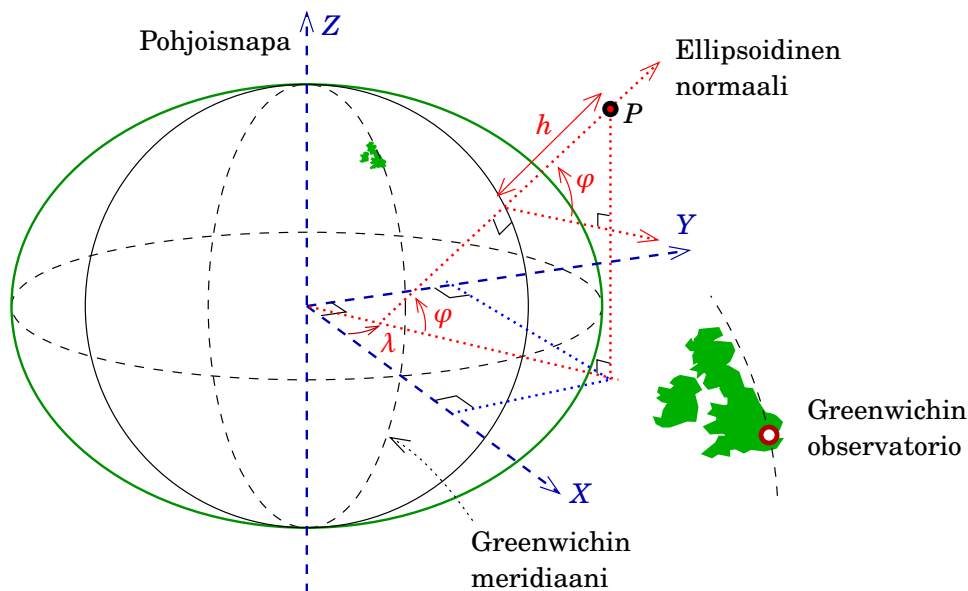
Piste projisoidaan ellipsoidin *normaalia* pitkin pintaan: projektioetäisyys  $h$  on *korkeus vertausellipsoidista*, projektioviivan eli ellipsoidin normaalin<sup>28</sup> *suuntakulmat* ovat  $\varphi$  eli geodeettinen leveysaste päiväntasaajalta laskettuna ja  $\lambda$  eli geodeettinen pituusaste laskettuna Greenwichin meridiaanista. Kolmikkoa  $(\varphi, \lambda, h)$  — tai usein vain paria  $(\varphi, \lambda)$  — kutsu-

<sup>27</sup> Esimerkiksi GRS80-vertausellipsoidi: päiväntasaajan säde on 6378137,0m, napasäde on 6356752,3141m (noin 21km lyhyempi) ja litistyssuhde on 1 : 298,257 222 101.

<sup>28</sup> Ellipsoidin normaali *ei* yleisesti mene ellipsoidin keskipisteen läpi! Katso kuva 2.12.







KUVA 2.12. Suorakulmaiset ja geodeettiset koordinaatit.

taan *geodeettisiksi koordinaateiksi*. Esimerkiksi Metsähovin geodeettiset koordinaatit ovat

$$\varphi = 60^\circ 13' 2'', 89046, \quad \lambda = 24^\circ 23' 43'', 13336, \quad h = 94,568 \text{ m}, \quad (2.5)$$

... ja tämä kertoo ihmisille jo aika paljon enemmän pisteen sijainnista!

Suorakulmaisten ja geodeettisten koordinaattien välillä on yksinkertainen matemaattinen yhteys: ne voidaan muuntaa, *konvertoida*, toisiinsa tarkkuutta menettämättä. Ne ovat samanarvoisia<sup>29</sup> pisteen sijainnin esitystapoja:

$$(X, Y, Z) \begin{matrix} \xrightarrow{\text{yhtälö}} \\ \xleftarrow{\text{yhtälö}^{-1}} \end{matrix} (\varphi, \lambda, h)$$

... ja molemmat geosentrisiä ja kolmiulotteisia. Niiden väliset erot ovat:

- Suorakulmaiset koordinaatit on helpompaa käsitellä numeerisessa työssä.
- Geodeettiset koordinaatit ovat intuitiivisempia, ihmisläheisempiä.

Geosentristen koordinaattien lisäksi tavataan usein *toposentrisiä* koordinaatteja, jotka ovat koordinaatteja laskettuna jonkin paikallisen origon

<sup>29</sup>Eli, jos  $(X, Y, Z)$  on annettu, voidaan  $(\varphi, \lambda, h)$  laskea eksaktisti, ja samoin toisin päin.



KUVA 2.13. Geodeettiset koordinaatit.

suhteen. Toposentrisiä koordinaatteja saadaan luonnollisella tavalla mittauksista, joissa mittauskojeen paikasta tulee koordinaatiston origo: mitataan suunta — *atsimuutti* eli vaakasuuntakulma ja *korkeuskulma* horisontin yläpuolella — ja *etäisyys* kojeen sijainnista mitattaviin pisteisiin.



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on mittayksikkö, mitattu suure ja sen dimensio? Kuvaile ja selosta erot.
- 2) ”Meidän elinpäivämme ovat seitsemänkymmentä vuotta” — montako gigasekuntia?
- 3) Haravoi Internetistä esimerkkejä fysikaalisten yksiköiden sekaannuksista, jotka aiheuttivat vahinkoa, menetyksiä tai onnettomuuksia.
- 4) Maapallon vuoden 2016 keskilämpötila oli noin  $14,8^{\circ}\text{C}$ . Paljonko tämä on kelvineinä?
- 5) Selosta satunnaiset virheet, karkeat virheet ja systemaattiset virheet.
- 6) Olkoon korttipakka, joka koostuu 52 kortista, numeroarvot ovat 2–10, jätkä on 11, rouva 12, kuningas 13 ja ässä 1. Mikä on satunnaisesti pakasta vedetyn kortin odotusarvo?
- 7) Etsi käsiisi standardi normaalijakauman todennäköisyystiheyden  $p(x)$  yhtälö. Mikä on funktioarvo  $p(x)$  argumentille  $x = \mu \pm \sigma$ ? Entä



argumentille  $x = \mu$ ? Ja mikä on suhde  $p(\mu \pm \sigma)/p(\mu)$ ?

*Standardi normaalijakauma* on normaalijakauma parametrien  $\mu = 0$  ja  $\sigma = 1$ .

- 8) Odotatko, että pensaspalojen esiintyvyys Australiassa korreloisi Lapin lumipeitteen paksuuden kanssa? Vai antikorreloisiko? Olisi korreloimatta? Miksi?
- 9) Miksi käytämme geodesiassa myös kaksiulotteisia koordinaatteja?
- 10) Mikä on geosentrisyyden määritelmä?
- 11) Mikä on geodeettisten koordinaattien  $(\varphi, \lambda, h)$  käytön etu suorakulmaisiin koordinaatteihin  $(X, Y, Z)$  verrattuna?



## Harjoitus 2–1: Koordinaatit ja katuosoite

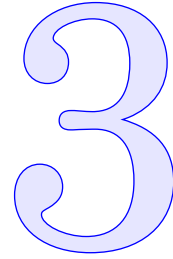
Arvoitus merenkulkijoille:

- 1) Mihin katuosoitteeseen oheisen kuvan 2.13 geodeettiset koordinaatit viittaavat?
- 2) Minkälainen kohde osoitteella on? Anna kuva!
- 3) Ovatko koordinaatit geosentrisiä? Millä vertausellipsoidilla?
- 4) Etsi ”pääsiäismuna” tämän tekstin hakemistosta.





# Karttaprojektiot, datumit ja muunnokset



Le 24 février dernier, la Chambre des députés adoptait un projet de loi, dû à l'initiative parlementaire et ayant pour objet de fixer à nouveau l'heure légale de notre pays. Il était ainsi formulé : *l'heure légale, en France et en Algérie, est l'heure, temps moyen, de Paris, retardée de 9 minutes 21 secondes.*

---

Millä tavalla Ranska vuonna 1898 sääti lain Greenwichin ajan hyväksymisestä viralliseksi Ranskan ja Algerian ajaksi. **Dastre (1898)**



## 3.1 Karttaprojektiot

Vaikka geodeettiset koordinaatit ovat käyttäjän kannalta ystävällisempiä kuin suorakulmaiset, voidaan tuottaa vieläkin ihmisläheisempiä koordinaatteja. Menetelmän nimi on *karttaprojektio*.

Jo vanhastaan maanpintaa on ollut tapana kuvata kaksiulotteiselle tasolle eli kartalle. *Kartografia* on tämän taidon ympärille kasvanut tieteenala. Jos kuvattu alue on pieni, on kuvaustapa suoraviivainen ja virheetön: paikalliset vaakatason suorakulmaiset maisemakoordinaatit  $(x, y)$  voidaan kuvata *mittakaavan* kautta paperikarttatasolle. Puhutaan *plankartasta*<sup>1</sup>. Useammissa maissa, myös Suomessa,  $x$ -akseli osoittaa pohjoiseen ja  $y$ -akseli itään.

Suuremmilla alueilla käytetään *karttaprojektiota*, matemaattista menetelmää pisteen sijainnin eli leveys- ja pituusasteen  $(\varphi, \lambda)$  kuvaamiseksi karttatasolle. Näin paperille voidaan piirtää maanpinnasta graafinen

---

<sup>1</sup>Ruotsiksi *plankarta* (vanhahtava; nykyisin sana liittyy kaavoitukseen), hollanniksi *plattegrond*.

esitys, *kartta*. Monet digitaaliset sovellukset, kuten CAD-ohjelmat, eivät varsinaisesti edellytä paperikartan käyttöä, vaan perustuvat intuitiiviseen karttatason käyttöön.

Yksinkertaisimmillaan käytetään koordinaattiparia  $(\varphi, \lambda)$  suoraan karttakoordinaatteina  $x$  ja  $y$ :  $x = S\varphi$ ,  $y = S\lambda$ ,  $S$  on nimellinen mittakaava. Tämä on huono ratkaisu, koska

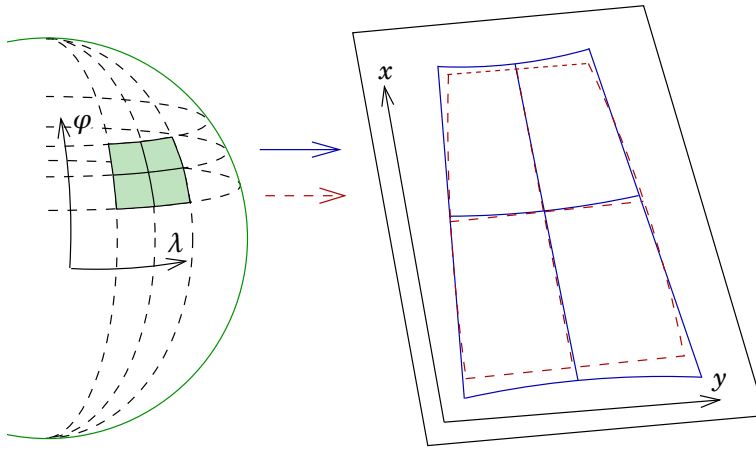
- Koordinaatit  $\varphi$  ja  $\lambda$  ovat asteissa, kulmayksiköissä, vaikka karttakoordinaattien on oltava metrisissä yksiköissä.
- Pituuden  $\lambda$  yhden asteen pituus kilometreissä mitattuna vähenee napoja kohti. Helsingin leveydellä yksi pituusaste on vain 55 km, kun päiväntasaajalla se on 111 km. Hieman parempi ratkaisu on käyttää koordinaattiparia  $(\varphi, \lambda \cos \varphi)$ .

Parempia ratkaisuja tarjoaa *karttaprojektio-oppi*. Sen avulla voidaan kuvata vertausellipsoidipinnan parametripari  $(\varphi, \lambda)$  karttatason pariin  $(x, y)$  järkevällä tavalla. Valitettavasti menetelmää, joka kuvaisi kaiken täsmälleen oikein, ei ole olemassa.

Karttaprojektiossakin approksimoidaan, jolloin menetetään jotain. Ei ole olemassa projektioita, jotka eivät vääristäisi mitään ([Wikipedia](#), [Theorema Egregium](#)) tai joiden mittakaava olisi kaikkialla karttatasossa sama. Projektio valitaan *käyttötarkoituksen* mukaan niin, että jokin käyttäjälle tärkeä asia säilyy: kohteiden muodot, pinta-alat, jotkut etäisyydet tai vaikkapa kompassisuunta.

- Jos kulmat ja etäisyyksien suhteet säilyvät, puhutaan *konformisesta* eli kulmatarkasta projektioista. Tässä tapauksessa sekä lineaarinen mittakaava — etäisyydet — että pinta-alojen mittakaava vääristyvät, paitsi joissakin kartan erikoispisteissä.
- Jos pinta-ala säilyy, puhutaan *ekvivalentista* eli pinta-alatarkasta projektioista. Tässä kulmat ja muodot vääristyvät, taas erikoispisteitä tai -viivoja lukuun ottamatta.
- Jos etäisyydet säilyvät, puhutaan *ekvidistantista* eli etäisyystarkasta projektioista. Projektio voi olla ekvidistantti vain tietyillä linjoilla, ei kaikkialla.
- Navigoinnissa on tärkeää, että kompassisuunnat säilyvät. Silloin *loksodromit* ([Wikipedia](#), [Loksodromi](#)) eli saman kompassisuunnan käyrät ovat suoria. Normaaliasentoisella *Mercatorin* projektiolla on tämä ominaisuus.
- Jos isoympyrät kuvautuvat suoriksi, on kyse *gnomonisesta* projek-





KUVA 3.1. Maan kaarevan pinnan kuvaaminen karttatasolle eri projektioiden avulla. Aina jotain vääristyy!

tiosta. Sitä käytetään ilmailussa ja meteorihavaintojen yhteydessä — lentokoneen polku maapallon pinnalla tai meteorin polku taivaalla kuvautuu suoraksi viivaksi ja voidaan piirtää viivoittimella.

On tärkeää tiedostaa, että ”oikeaa” projektiota ei ole olemassa. Valinta riippuu täysin käyttötarkoituksesta ja hyväksyttävissä olevista vääristymistä. Tavallaan ne ovat kaikki ”väärinä” ja samalla yhtä käyttökelpoisia<sup>2</sup>.

Filosofisesti voi katsoa, että karttakoordinaatit  $(x, y)$  eivät varsinaisesti ole geodeettisia suureita. Aidosti geodeettiset koordinaatit ovat aina kolmiulotteisia. Karttaprojektiokoordinaatit ovat johdannaissuureita.

Korkean tason johdatus karttaprojektioiden matematiikkaan tarjoaa [Grafarend ym. \(2014\)](#).



### 3.2 Suomen eri koordinaattiratkaisut

Suomessa, kuten kaikkialla maailmassa, on historiallisista syistä käytössä useita eri koordinaatistoja<sup>3</sup>. Tämä hankaloittaa paikkatietojen ja koordinaattiaineistojen käyttöä. Koordinaattiaineistojen käytön edellytyksenä on tietää, missä koordinaatistossa annettu aineisto on. Tarvittaessa aineisto *muunnetaan* järjestelmästä toiseen ennen käyttöä.

Suurin periaatteellinen ero koordinaatistojen välillä on, onko se ”pe-

<sup>2</sup>”Essentially, all models are wrong, but some are useful” – George E. P. Box (1919–2013), brittiläinen tilastotieteilijä.

<sup>3</sup>Tässä ei vielä tehdä selkeää eroa koordinaattijärjestelmien ja koordinaatistojen, eli modernimmassa terminologiassa, vertausjärjestelmien ja vertauskehysten, välillä. Tästä hieman lisää osiossa 3.8.





KUVA 3.2. Systemaattinen siirtymä tieverkon ja ilmakuvapohjan välillä voisi liittyä eri koordinaatistojen käyttöön. Google Earth™. **Googlen käyttöehtojen mukaisesti**. Karttatiedot © 2009 Google. Kuva © 2010 DigitalGlobe, © 2010 Tele Atlas, © 2010 Europa Technologies.



rintainen” eli luotu ennen satelliittiaikakautta käyttäen perinteisiä geodeettisia mittausten menetelmiä, vai ”moderni”, geosentrinen, jolloin koordinaatisto on luotu satelliittipaikannusteknologian avulla. Seuraavaksi kerromme lisää eri koordinaatistovaihtoehdoista ja niiden välisistä muunnoksista.

Kuitenkin, vaikka olisi periaatteessa tiedossa missä koordinaatistossa paikkatieto on, voivat pienet erot tietojen käsittelyssä ja sitomisessa tunnettuihin paikkoihin tuottaa näkyviä ristiriittoja. Katso esimerkiksi kuva 3.2.



### 3.2.1 Kartastokoordinaattijärjestelmä (KKJ)

Suomessa vanha, aikanaan virallinen ja nyt jo suurilta osin väistynyt koordinaatisto on **KKJ**, Kartastokoordinaattijärjestelmä, engl. *National Map Grid Coordinate System* (Parm, 1988). Järjestelmä luotiin valtakunnallisen kolmiomittaustyön tuloksena. Se on myös hyvä esimerkki *karttaprojektion* käytöstä valtakunnallisen alueen kuvaamiseksi kaksikulotteiselle karttatasolle. Karttaprojektioista lisää alaosiossa 3.3.1.







### 3.2.2 Vanha valtion järjestelmä VVJ

VVJ eli *Helsingin järjestelmä* oli KKJ:n edeltäjä. Valtakunnallinen kolmiomittaus oli valtava projekti (Puupponen ja Järvinen, 2008), joka kesti yli puoli vuosisataa. Tarkkojen koordinaattien käyttäjät eivät kuitenkaan voineet odottaa. Niinpä VVJ luotiin ”lennossa” käytännön kartoitustyön tueksi. Koordinaatit laskettiin vaihe vaiheelta Suomen kolmiomittauksen edetessä Etelä-Suomesta pohjoiseen. Vasta 1970-luvulla, valtakunnallisen kolmiomittauksen melkein valmistuttua ja kolmioverkon yhteistason tuloksena, muodostettiin KKJ valtakunnallisesti yhtenäisenä järjestelmänä.

Erot Vanhan valtion järjestelmän koordinaattien ja KKJ-koordinaattien välillä ovat korkeintaan muutama metri (Häkli ym., 2009, sivu 18).

Niin ikivanha kuin VVJ onkin, se oli monessa kunnassa käytössä vielä 2010-luvulla: esimerkiksi Tuusula siirtyi järjestelmästä pois — suoraan EUREF-FIN-järjestelmään — vasta vuonna 2013.

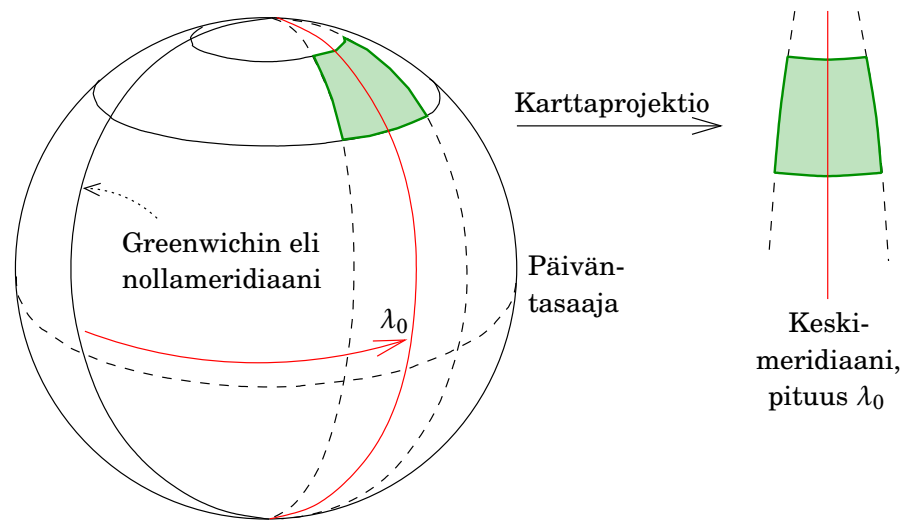


### 3.2.3 EUREF-FIN-vertauskehys

Satelliittipaikannuksen yleistymisen myötä voitiin kaikkialla maapallolla jo 1990-luvulla määrittää kolmiulotteisia koordinaatteja järjestelmässä, joka on muutaman senttimetrin tarkkuudella *geosentrinen*: kolmiulotteisten koordinaattien ( $X, Y, Z$ ) origo yhtyy tällä tarkkuustasolla Maan massakeskipisteeseen. Tämän lisäksi geosentrisen koordinaatiston  $Z$ -akseli osoittaa Maan pyörähdysakselin suuntaan, kun taas  $X$ - ja  $Y$ -akselien suunnat ovat päiväntasaajan tasossa.

Geosentriset järjestelmät ovat *globaaleja*. Euroopan alueella on Kansainvälisen geodeettisen assosiaation IAG:n (International Association of Geodesy) aloitteesta<sup>4</sup> luotu geosentrinen vertausjärjestelmä ETRS89,<sup>4</sup> European Terrestrial Reference System 1989. Järjestelmä on *realisoitu* mittauksin monta kertaa: ensimmäinen Euroopan laajuinen realisointi eli *vertauskehys* oli EUREF89, joka perustui vuonna 1989 suoritettuun avaruusgeodeettiseen mittauskampanjaan (Overgaauw ym., 1994). Myöhemmin Suomi on luonut oman kansallisen realisointinsa nimeltä EUREF-FIN<sup>5</sup>, jonka käyttöön maan kartoituslaitokset ja useimmat muut toimijat<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Euroopan vertauskehyksen alakomissio EUREF teki tämän. Nimi EUREF oli tanskalaisgeodeetti Knud Poderin ehdottama. Knud Poder (1925–2019) oli etevä tanskalainen maanmittari ja matemaattinen geodeetti sekä laskennallisen geodesian uranuurtaja.



KUVA 3.3. Maan kuperan pinnan kuvaaminen kapeina kaistoina tasolle. Tämä on sekä Gauss-Krüger-projektion että UTM-projektion periaate. Molemmat projektiot ovat käytössä Suomessa. Vääristymät jäävät hyväksyttävän pieniksi vain suhteellisen kapealla alueella.



ovat viime vuosikymmeninä siirtyneet.

EUREF-FIN-vertauskehysten karttaprojektioratkaisusta kerrotaan lisää alaosiossa 3.3.3.



### 3.3 Karttaprojektiot Suomessa

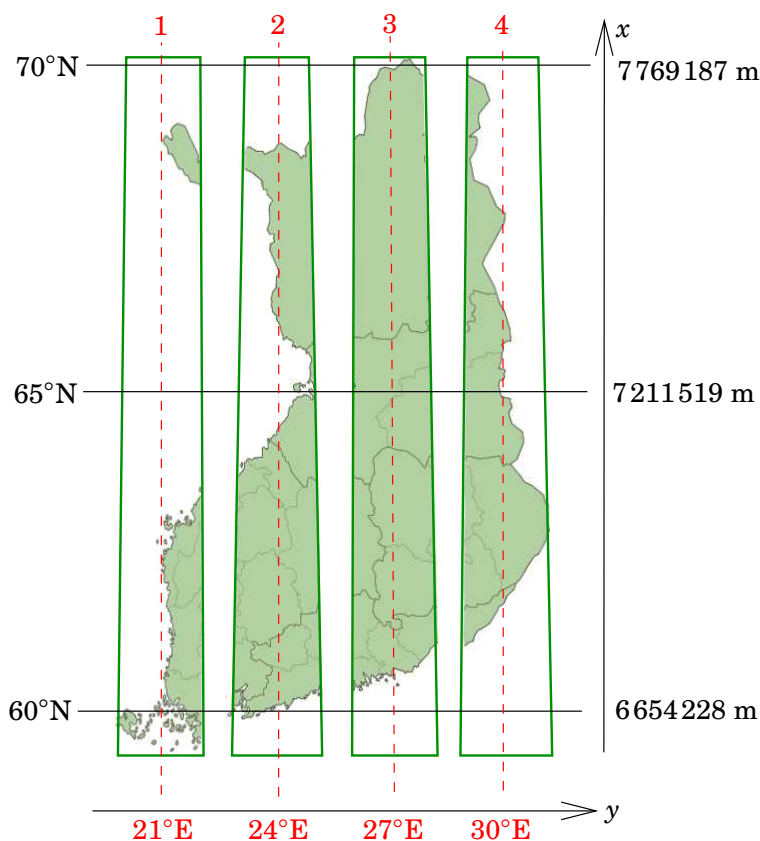
Suomessa kohdataan tällä hetkellä kahta taso- eli projektiokoordinaatistoa: vanha KKJ ja uusi EUREF-FIN-pohjainen järjestelmä. Vanhassa KKJ:ssä käytettiin Gauss-Krüger-projektiota, uudessa järjestelmässä käytetään Gauss-Krüger-projektion lisäksi UTM-karttaprojektiota (Universal Transverse Mercator), katso kuva 3.3.



#### 3.3.1 KKJ:n karttaprojektiojärjestelmä

Jotta Maan pinta pystyttiin kuvaamaan karttatasolle ilman suuria vääristymiä, Suomi jaettiin kuuteen KKJ-projektiokaistaan, joissa jokaisessa on oma projektiotason koordinaatisto. Kaistat numeroitiin nollasta vii-

<sup>5</sup>Usein käytetty nimike WGS84 viittaa Yhdysvaltojen puolustusviranomaisten ylläpitämään järjestelmään, jolla on itse asiassa puoli tusinaa realisointia. Järjestelmän uusimmat realisoinnit ovat senttimetritasolla yhteneväisiä ITRF-vertauskehysten kanssa. Yhteneväisyys ETRS89:n eri realisointien kanssa on heikompi mutta joka tapauksessa alle metri. Katso Malys ym. (2016). Usein nimikettä WGS84 käytetään, joskin virheellisesti, niiden kaikkien yhteisnimityksenä.



KUVA 3.4. [KKJ](#):n Gauss-Krüger-karttaprojektion kaistanjako. Kaistat 0 (keskimeridiaani 18°) ja 5 (33°) on jätetty pois.

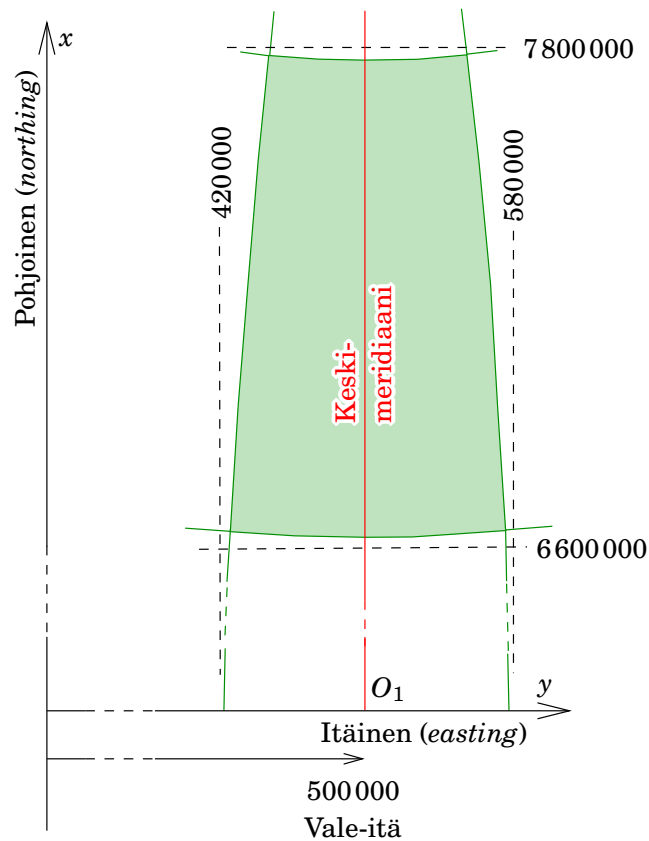
teen: kaistojen keskimeridiaanit ovat pituusasteilla 18°, 21°, 24°, 27°, 30° ja 33° itään.

Projektiokaistakohtaiset koordinaatit ovat  $x$  (*northing*) ja  $y$  (*easting*). Käytetty projektiio on konforminen eli kulmatarkka ja nimeltään Gauss-Krüger-projektiio, eräs poikittainen Mercatorin projektiio. Projektiolaskennoissa käytetty vertausellipsoidi on Hayfordin eli Kansainvälinen ellipsoidi vuodesta 1924.

Kaistoissa toistuvat samat koordinaatit. Siksi yksiselitteisten arvojen saamiseksi  $y$ -koordinaatin eteen laitetaan kaistan numero ensimmäisenä desimaalina (paitsi jos se oli 0). Katso kuvat [3.4](#), [3.5](#). Tätä monen kaistan järjestelmää kutsutaan [KKJ](#):n peruskoordinaatistoksi.

$x$ -koordinaatin origo on päiväntasaajalla, ja arvot kasvavat kaistan keskimeridiaania pitkin. Tästä johtuu, että  $x$ -koordinaatit ovat Suomessa välillä 6 600 000–7 800 000 m.

$y$ -koordinaatti kuvaa etäisyyttä keskimeridiaanilta. Jotta vältettäisiin negatiivisia  $y$ -koordinaatteja, lisätään näihin 500 km, niin että keskimere-



KUVA 3.5. **KKJ**:n yhden kaistan geometria (länsi-itäsuunnassa venytetty).

ridiaanilla olevalla pisteellä on  $y$ -koordinaatti 500 000 m (*false easting* eli *vale-itä*).  $y$ -koordinaatit voivat teoreettisesti olla välillä 0–1 000 000 m, käytännössä kuitenkin arvoväli on 420 000–580 000 m, mikä johtuu kaistojen kapeudesta Suomen leveysasteilla.

Esimerkiksi kuvan 3.5 mukaan ensimmäisen kaistan alueen vasemman alanurkan koordinaatit olisivat

$$x = 6\,600\,000,000\text{ m}, \quad y = 1\,420\,000,000\text{ m}.$$

Vastaavasti kolmannen kaistan vasen alanurkka:

$$x = 6\,600\,000,000\text{ m}, \quad y = 3\,420\,000,000\text{ m}.$$

Projektion *keskimeridiaanilla* vääristymä on nolla: kartan ilmoitettu, nimellinen mittakaava pätee tarkasti.

Silloin kuin **KKJ**-koordinaatteja käytettiin pienen alueen sisällä, jätettiin usein vasemmalla puolella olevat desimaalit pois, koska ne olivat aina samoja. Näin saatiin *katkaistuja koordinaatteja*, jollaisia voi tulla vielä vastaan kuntien laskentapapereissa.



VVJ:n käyttämä karttaprojektiojärjestelmä oli samanlainen kuin KKJ:n vastaava, paitsi että merkinntäpa oli  $y = 21^\circ 420\,000$ , siis  $y$ -koordinaatin eteen laitettiin itse keskimeridiaanin pituusaste.



### 3.3.2 Kartastokoordinaattijärjestelmän yhtenäiskoordinaatisto

KKJ:n lisäksi otettiin käyttöön vain pienimittakaavaisille<sup>6</sup> kartoille tarkoitettu yhtenäiskoordinaatisto, YKJ, jossa koko Suomen alue kuvattiin saman Gauss-Krüger-projektion mukaan käyttäen keskimeridiaanina  $27^\circ$ . Koska on vain yksi kaista,  $y$ -koordinaattien eteen ei laiteta mitään.



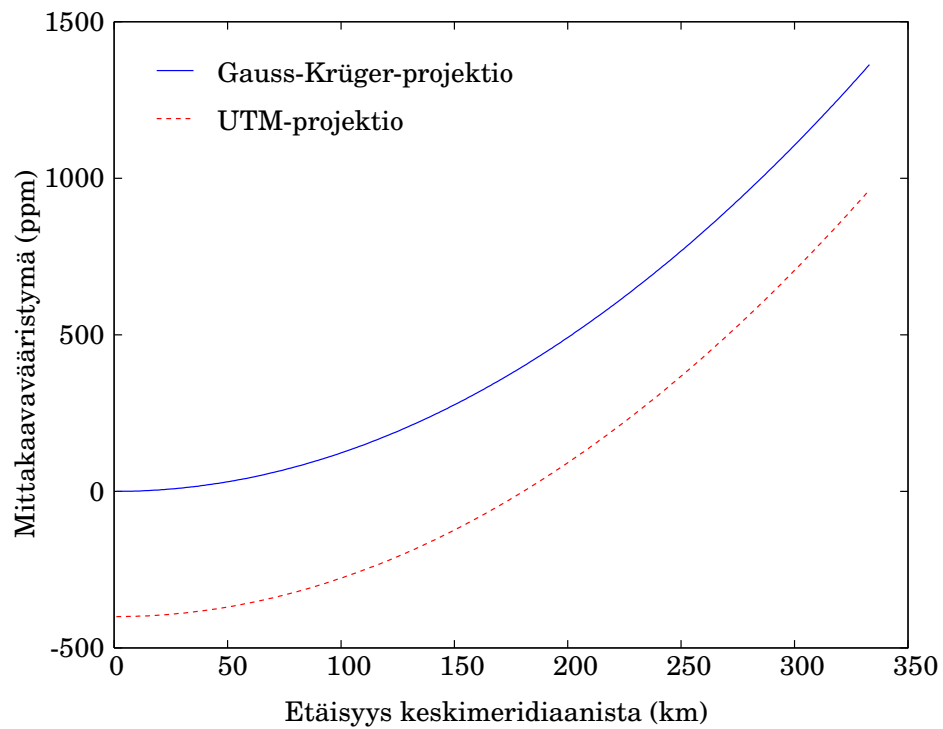
### 3.3.3 EUREF-FIN-karttaprojektiot

Uuden vertauskehyksen yhteydessä käytetään EUREF-FIN-karttaprojektiokoordinaatteja (JUHTA, 2016b), jotka ovat siis tasokoordinaatteja  $(x, y)$ . Uudet karttaprojektiot, jotka käyttävät geosentristä GRS80-vertausellipsoidia, ovat mittakaavasta riippuen joko tuttu Gauss-Krüger-projektio tai UTM, *Universal Transverse Mercator*, kansainvälisesti laajasti käytössä oleva, myös konforminen eli kulmatarkka projektio-tyyppi.

- Pienimittakaavaisille kartoille, joissa kuvataan koko Suomi tai Suomen suuria osia, valitaan uusi ETRS-TM35FIN<sup>7</sup>-projektiokoordinaatisto, joka perustuu kolmiulotteiseen EUREF-FIN-koordinaatistoon ja UTM-projektioon keskimeridiaanilla  $27^\circ\text{E}$ . Tämä korvaa vanhan KKJ:n yhtenäiskoordinaatiston. Projektio on myös koko Suomen karttalehtijaon pohjana.
- Myös maastokartoille käytetään ETRS-TM35FIN-projektiota.
- Suurimittakaavaisille, paikalliseen käyttöön tarkoitetuille kartoille käytetään edelleen Gauss-Krüger-projektiota, mutta kaistaleveydellä  $1^\circ$ . Tästä käytetään nimitystä ETRS-GK $n$ , jossa  $n$  on keskimeridiaanin asteluku, esimerkiksi  $23^\circ\text{E}$ , jolloin projektion nimi on ETRS-GK23. Tästä poiketaan kuitenkin käytännön syistä, esimerkiksi koko kunnan kartoittamiseksi samaan kaistaan. Projektio-tyypin valinnan seurauksena nämä kartat soveltuvat käyttötarkoituksiin,

<sup>6</sup>Pienimittakaavainen kartta on kartta, jonka mittakaavaluku  $M$  on suuri, jos mittakaava on  $1 : M$ . Mittakaava  $1 : 1\,000\,000$  on pieni: suuretkin kohteet näyttävät pieniltä kartalla, mutta kuvattu alue on laaja. Mittakaava  $1 : 2\,000$  on suuri: pienetkin yksityiskohdat näkyvät hyvin, mutta kuvattu alue on pieni.

<sup>7</sup>Nimi on hankala muistaa ja lausua. Käyttäjien piireissä kohtaa vaihtoehtoisia nimityksiä, kuten "Suomi-UTM" tai "Suomi-ruudukko".



KUVA 3.6. Gauss-Krüger-projektion ja UTM-projektion mittakaavavääristymä.

joissa ei voida hyväksyä suurempia mittakaavavääristymiä. Esimerkiksi kaavoituksessa ja infrarakentamisessa karttakoordinaatteja siirretään suoraan rakennusprojekteihin maastokoordinaatteina.

Kansainvälisesti käytetään paljon UTM-järjestelmää (Universal Transverse Mercator). UTM eroaa Gauss-Krüger-projektioista kahdella tavalla:

- Mittakaava keskimeridiaanilla on 0,9996 eikä 1,0. Tämä merkitsee, että keskimeridiaanilla kartta kuvaa yksityiskohtia 400 ppm (*parts per million*, miljoonasosaa) pienemmiksi kuin niiden pitäisi kartan nimellismittakaavan mukaan olla. Siitä tulee 40 cm jokaista kilometriä kohti.
- Projektiokaistojen leveys on 6° eikä 3° tai 1°. Tämä merkitsee, että mittakaavavääristymä, joka keskimeridiaanilla on -400 ppm, kääntyy kaistan reunoihin mennessä positiiviseksi, noin +1000 ppm, laskettuna päiväntasaajalla. Suomen leveysasteilla vääristymä jää aika paljon pienemmäksi.

Näillä kahdella valinnalla pyritään pitämään mittakaavavääristymä koko kaistan alueella tiettyjen rajojen sisällä kaistan suuresta leveydestä huolimatta.

Sekä Gauss-Krüger-projektio että UTM ovat *konformisia* projektioita: kulmat ja pituussuhteet säilyvät paikallisesti, eli ympyrät kuvautuvat ympyröiksi ja neliöt neliöiksi — mutta vain, jos ne ovat pieniä<sup>8</sup>.

8



### 3.3.4 Maanmittauslaitoksen kolmioittain affiininen muunnos

Maanmittauslaitos tarjoaa verkkosivullaan palvelua, joka antaa muuntaa pistekoordinaatit vanhan KKJ-järjestelmän (tarkemmin, Yhtenäiskoordinaattijärjestelmän) ja uuden ETRS-TM35FIN-järjestelmän välillä. Palvelu käyttää Suomen alueen jakoa kolmioihin Delaunay'n<sup>9</sup> kolmioinnin avulla, ja affiinista eli bilineaarista muunnosta jokaisen kolmion sisällä. Muunnos on lineaarinen jokaisen kolmion sisällä ja jatkuva kolmioiden välisten rajojen yli, JUHTA (2016b). Katso kuva 3.7.

9

Menetelmä on yksinkertainen: kolmiolle  $\triangle ABC$  määritetään ensin kärkipisteille  $A$ ,  $B$  ja  $C$  koordinaatistojen väliset koordinaattierot  $\Delta x$  ja  $\Delta y$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &\stackrel{\text{def}}{=} x_{i,\text{YKJ}} - x_{i,\text{ETRS-TM35FIN}} \\ \Delta y_i &\stackrel{\text{def}}{=} y_{i,\text{YKJ}} - y_{i,\text{ETRS-TM35FIN}} \end{aligned} \right\} \quad i = A, B, C.$$

Sen jälkeen määritellään *barysentriset koordinaatit* mielivaltaiselle pisteelle  $P$ , koordinaatit  $(x, y)$ :

$$p^A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega^A}{\omega}, \quad p^B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega^B}{\omega}, \quad p^C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega^C}{\omega},$$

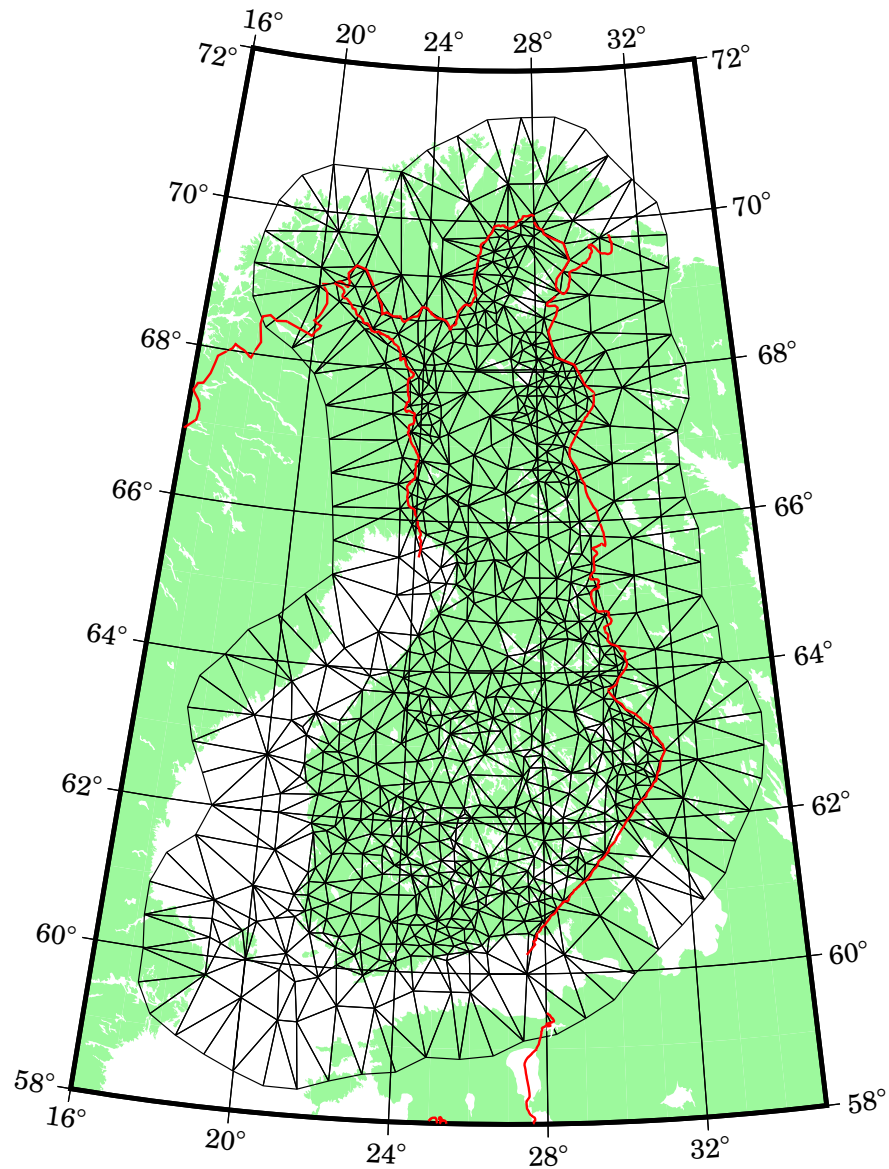
jossa (kolmion kärkipisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  oletetaan olevan myötäpäiväisessä järjestyksessä):

$$\begin{aligned} \omega^A &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_B & x_C & x \\ y_B & y_C & y \end{bmatrix}, & \omega^B &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_C & x_A & x \\ y_C & y_A & y \end{bmatrix}, \\ \omega^C &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{bmatrix}, & \omega &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Jos neliö on liian suuri, se kuvautuu karttaprojektion epälineaarisuuden vuoksi kaa-revasivuisiksi nelikulmioksi. Suuri ympyrä kuvautuu ympyräksi vain stereografisen projektion tapauksessa, muuten sekin vääristyy.

<sup>9</sup>Boris Nikolajevitš Delaunay (1890–1980) oli venäläinen matemaatikko ja vuorikiipeilijä. Hänen pojanpoikansa Vadim Nikolajevitš Delaunay (1947–1983) oli runoilija, joka osallistui vuonna 1968 Punaisen torin mielenosoitukseen Tšekkoslovakian miehitystä vastaan. Ilmeisesti he eivät ole ranskalaisen taivaanmekaanikon Charles-Eugène Delaunay'n (1816–1872) sukulaisia.





KUVA 3.7. Maanmittauslaitoksen kolmioittain affiinin muunnos. Käytetty kolmioverkko.

determinantteja kaikki. Huomaa, että  $\omega^A$ ,  $\omega^B$  ja  $\omega^C$ , kuten myös  $p^A$ ,  $p^B$  ja  $p^C$ , ovat mielivaltaisen pisteen  $P$  koordinaattien  $(x, y)$  *lineaarisia funktioita*. Jos kirjoitetaan pisteelle  $P$  koordinaattien korjauksiksi

$$\begin{aligned}\Delta x_P &\stackrel{\text{def}}{=} p^A \Delta x_A + p^B \Delta x_B + p^C \Delta x_C, \\ \Delta y_P &\stackrel{\text{def}}{=} p^A \Delta y_A + p^B \Delta y_B + p^C \Delta y_C,\end{aligned}\tag{3.1}$$

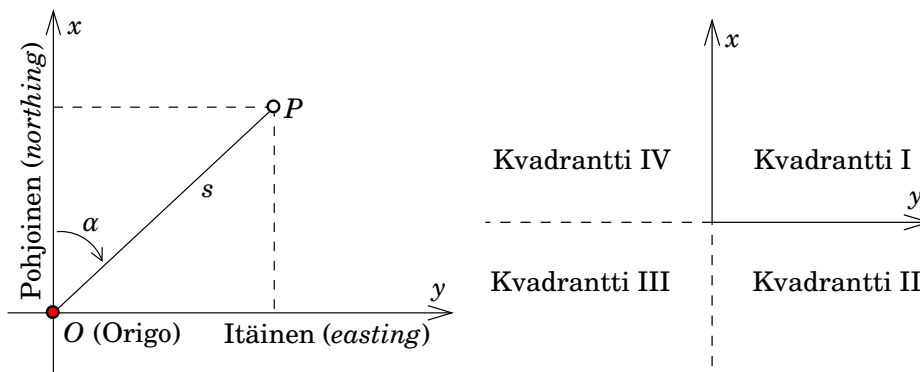
suoritetaan *bilineaarinen interpolointi* pisteiden  $A$ ,  $B$  ja  $C$  välillä.

On helppo näyttää, että

- Yhtälöt 3.1 reprodusoivat kärkipisteiden korjausarvot:  $\Delta x_P \rightarrow \Delta x_A$  jos  $P \rightarrow A$ , jne.







KUVA 3.8. Geodeettiset tasokoordinaatit ja tason kvadrantit I–IV.

- Korjaukset ovat jatkuvia kolmioiden sivujen yli: esimerkiksi sivulla  $AB$ , suora viiva,  $(\Delta x_P, \Delta y_P)$  ovat lineaarisia sivua pitkin, ja re-produsoivat  $(\Delta x_A, \Delta y_A), (\Delta x_B, \Delta y_B)$  molemmissa päissä. Niiden on oltava samat molemmissa kolmioissa, joiden sivu  $AB$  on yhteinen.
- Tämän tuloksena interpolointi on jatkuva koko kolmiointialueella.



### 3.4 Lisää tasokoordinaateista

Geodesiassa käytetyt tasokoordinaatit poikkeavat hieman tutusta matematiikan  $(x, y)$ -järjestelmästä. Katso kuva 3.8. Kun matematiikassa  $x$ -akseli osoittaa oikeaan ja  $y$ -akseli paperin yläreunaan, on geodesiassa tapana, että  $x$ -akseli osoittaa pohjoiseen ("northand") ja  $y$ -akseli itään ("easting").

Suorakulmaisten tasokoordinaattien  $(x, y)$  lisäksi käytetään napakoordinaatteja  $(\alpha, s)$ . Joskus käytetään myös symboleja  $(A, s)$ . Geodesiassa *atsimuutti* eli vaakasuuntakulma  $\alpha$  (tai  $A$ ) kulkee pohjoisesta myötäpäivään<sup>10</sup>, siis idän kautta, toisinpäin kuin matematiikassa.  $s$  on etäisyys koordinaatiston origosta  $O$ .

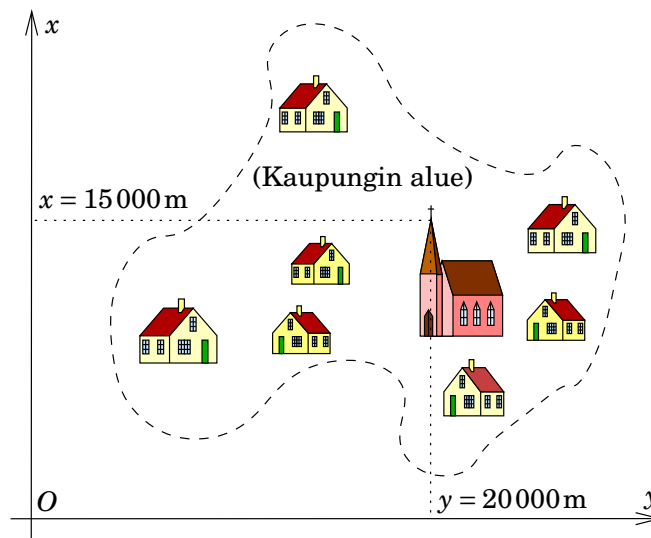
Suorakulmaisten ja napakoordinaattien välillä pätevät seuraavat trigonometriset yhteydet:

$$\begin{aligned} y &= s \sin \alpha &\implies \sin \alpha &= \frac{y}{s}, \\ x &= s \cos \alpha &\implies \cos \alpha &= \frac{x}{s}, \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} &\implies \alpha &= \arctan \frac{y}{x} + k \cdot 200^g, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Tähtitieteessä, erityisesti vanhemmissa kirjoituksissa, atsimuutti kulkee joskus etelästä länteen, siis myös myötäpäivään. Myös geodesiassa käytäntö vaihtelee: asia on aina tarkistettava.

Sanan "atsimuutti" alkuperä on arabian *as-sumût*, "suunnat".





KUVA 3.9. Paikallinen koordinaatisto.

Yhtälössä pieni kokonaisluku  $k$  valitaan niin, että tulos  $\alpha$  on suunta-ym-pyrän *oikeassa kvadrantissa*:  $\arctan(y/x)$  on aina välillä  $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$  eli kvadranteissa I tai IV. Tämä on helpointa varmistaa tekemällä piirros.

Pythagoraan lause antaa etäisyyden  $s$ :

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



### 3.4.1 Paikalliset koordinaatit

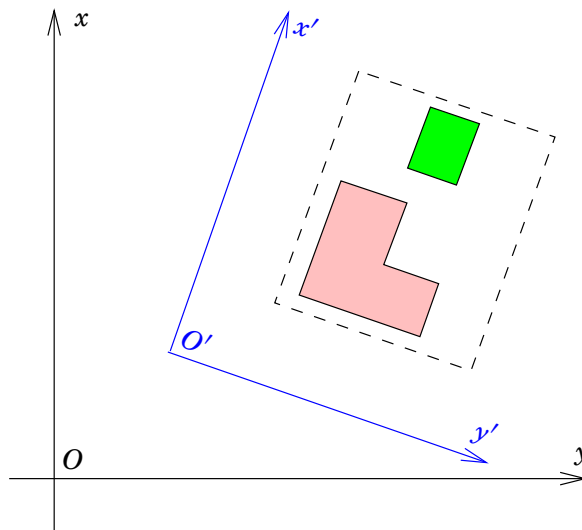
Paikallisia, usein vanhoja, koordinaatistoja käytettiin pitkään monessa Suomen kunnassa, ja vanhat koordinaatistot tulevat vanhoissa asiakirjoissa vastaan.

Origo on yleensä sijoitettu niin, että koko kunnassa esiintyy vain positiivisia  $x$ - ja  $y$ -koordinaatteja. Usein origo on vain laskennallinen piste, joka ei ole edes olemassa merkkinä maastossa, esimerkiksi ”katkaistuja” [KKJ](#)-koordinaatteja.

Yhteys valtakunnalliseen koordinaatistoon voi olla, että tunnetaan kirkon tornin tai muun maamerkin koordinaatit myös [KKJ](#):ssa. Silloin voidaan paikalliset ja valtakunnalliset koordinaatit muuntaa toisiinsa lisäämällä vakiosiirtymät, *translaatiot*, molempiin koordinaatteihin  $x$  ja  $y$ .

Tarkempaan työhön yksi piste ei riitä ja tarvitaan riittävä määrä yhteisiä pisteitä, koordinaateiltaan tunnettuja sekä paikallisessa että valtakunnallisessa järjestelmässä.





KUVA 3.10. Tilapäiset koordinaatit.



### 3.4.2 Tilapäiset koordinaatit

Joskus on tarkoituksenmukaista käyttää mittauksissa tilapäistä, yleisestä järjestelmästä poikkeavaa koordinaatistoa. Jopa akselien suunnat voivat poiketa tavallisista pohjois- ja itäsuunnista.

Tilapäistä tai projektikohtaista koordinaatistoa käytetään vain mittauksen, tai esimerkiksi rakennusprojektin, aikana. Myöhemmin koordinaatit voidaan muuntaa pysyvämpään, paikalliseen tai valtakunnalliseen, oikein orientoituneeseen järjestelmään.

Origo ja akselien suunnat voidaan valita mittaustehtävän mukaisesti, esimerkiksi rakennuksen seinien suuntaisiksi.



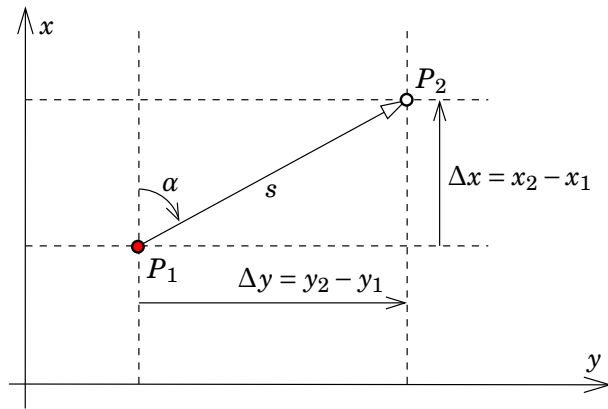
## 3.5 Geodeettinen pää- ja käänteistehtävä

Geodeettinen päätehtävä (*"GPT"*, englanniksi *"direct or forward geodetic problem"*) tarkoittaa tuntemattoman pisteen koordinaattien määrittämistä, kun lähtöpisteen koordinaatit, atsimuutti (vaakasuunta) ja etäisyys lähtöpisteestä tuntemattomaan pisteeseen on annettu.

Yleisessä tapauksessa mielivaltaisella kaarevalla pinnalla geodeettista päätehtävää ei voida ratkaista helposti. Mutta jo pallon pinnalla suljettu — vaikkei aivan yksinkertainen — ratkaisu on olemassa. Vertausellipsoidin pinnalla ratkaisu saadaan numeerisesti. Online-palvelu on tarjolla esimerkiksi Yhdysvaltojen National Geodetic Survey'n verkkosivulla [NGS, Computation utilities](#).

Tasokoordinaatistossa, kaksiulotteisesti, geodeettinen päätehtävä on





KUVA 3.11. Geodeettinen päätehtävä tasokoordinaateissa.

yksinkertaisempi, kuten näemme seuraavaksi.



### 3.5.1 Geodeettinen päätehtävä tasossa

Olkoon *tasossa* kaksi pistettä  $P_1$  ja  $P_2$ , kuva 3.11. Lähtöpisteen  $P_1$  tasokoordinaatit  $(x_1, y_1)$ , atsimuutti  $\alpha$  ja vektorin  $\overrightarrow{P_1P_2}$  pituus  $s$  on annettu. Laskettava on tuntemattoman pisteen  $P_2$  koordinaatit  $(x_2, y_2)$ .

Ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\Delta y}{s} \implies \Delta y = s \sin \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{\Delta x}{s} \implies \Delta x = s \cos \alpha,\end{aligned}$$

ja

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + s \cos \alpha,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + s \sin \alpha.$$

**Esimerkki** Annettuna piste  $A$ , jonka koordinaatit ovat

$$x_A = 6\,800\,000\text{ m}, \quad y_A = 400\,000\text{ m}.$$

Jos etäisyys pisteeseen  $B$  on  $s = 2828,427\text{ m}$  ja atsimuutti (suuntakulma)  $\alpha = 50^\circ$ , ratkaise geodeettinen päätehtävä pisteille  $A$  ja  $B$ .

**Ratkaisu**

$$\Delta x = s \cos \alpha = 2828,427\text{ m} \cdot \cos(50^\circ) = 2000\text{ m},$$

$$\Delta y = s \sin \alpha = 2828,427\text{ m} \cdot \sin(50^\circ) = 2000\text{ m},$$

$$x_B = x_A + \Delta x = 6\,800\,000\text{ m} + 2000\text{ m} = 6\,802\,000\text{ m},$$

$$y_B = y_A + \Delta y = 400\,000\text{ m} + 2000\text{ m} = 402\,000\text{ m}.$$





### 3.5.2 Geodeettinen käänteistehtävä tasossa

Geodeettinen käänteistehtävä ("GKT") tarkoittaa kahden annetun pisteen välisen atsimuutin (vaakas suunnan) ja etäisyyden määrittämistä.

Olkoon taas tasossa kaksi pistettä  $P_1$  ja  $P_2$  (kuva 3.11). Olkoot niiden suorakulmaiset koordinaatit  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ . Laskettavana on  $\alpha$  ja  $s$ .

#### Ratkaisu

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.2)$$

Mielellään ei käytetä  $\sin \alpha = \Delta y/s$  tai  $\cos \alpha = \Delta x/s$  kulman  $\alpha$  määrittämiseen: sinikaava on epätarkka, kun  $\alpha \approx 100^\circ + k \cdot 200^\circ$ , ja kosinikaava kun  $\alpha \approx 0^\circ + k \cdot 200^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Funktiot  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  ovat näissä pisteissä *stationaarisia*: suuri muutos kulmassa  $\alpha$  aiheuttaa vain pienen muutoksen funktioarvossa  $\sin \alpha = \Delta y/s$ , ja siksi annetuista arvoista  $\Delta y$  ja  $s$ , vaikkakin tarkkoja, voidaan laskea  $\alpha$  vain epätarkasti.

Lasketaan  $\alpha$  mieluummin yhtälöstä 3.2:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + k \cdot 200^\circ, \quad k = \begin{cases} 0 & \text{jos } (x_2 - x_1) > 0, \\ 1 & \text{jos } (x_2 - x_1) < 0, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} 100^\circ & \text{jos } x_1 = x_2 \text{ ja } y_2 > y_1, \\ 300^\circ & \text{jos } x_1 = x_2 \text{ ja } y_2 < y_1. \end{cases}$$

Tässä on muistettava, että  $\arctan$ -funktion arvot ovat määritelmän mukaan aina välillä  $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ . Kuitenkin oikea  $\alpha$ -arvo voi hyvinkin olla tämän välin ulkopuolella, nimittäin jos  $(x_2 - x_1) < 0$ .  
Siksi ehdollinen termi  $k \cdot 200^\circ$ .

Monessa ohjelmointikielessä on tarjolla funktio  $\text{atan2}(x, y)$  kahdella argumentilla, joka löytää myös oikean kvadrantin automaattisesti.

Elegantimpi ratkaisu on käyttää *puolikulmakaavaa*<sup>11</sup>:

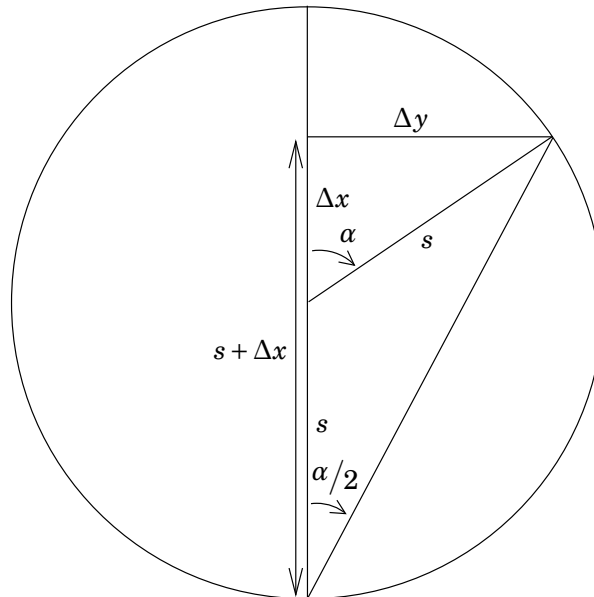
11

$$\alpha = 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x + s} = 2 \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Katso kuva 3.12.

<sup>11</sup>Tämäkin kaava epäonnistuu rajatapauksessa  $\Delta y = 0$  ja  $\Delta x < 0$ , koska silloin  $\alpha = 2 \arctan 0/0$  on määrittämätön, kun oikea vastaus on  $\alpha = 200^\circ$ .





KUVA 3.12. Arctangentin puolikulmakaava.

**Esimerkki** Annettuna piste  $A$ :  $x_A = 6800\,000\text{ m}$ ,  $y_A = 400\,000\text{ m}$  ja piste  $C$ , jonka koordinaatit ovat  $x_C = 6793\,000\text{ m}$ ,  $y_C = 407\,000\text{ m}$ , ratkaise pisteiden  $A$  ja  $C$  geodeettinen käänteistehtävä.

### Ratkaisu

$$\Delta x = x_C - x_A = 6793\,000\text{ m} - 6800\,000\text{ m} = -7000\text{ m},$$

$$\Delta y = y_C - y_A = 407\,000\text{ m} - 400\,000\text{ m} = +7000\text{ m}.$$

1) Perinteinen menetelmä:

$$\begin{aligned}\alpha_{AC} &= \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} + k \cdot 200^g = \\ &= \arctan(-1) + k \cdot 200^g = -50^g + k \cdot 200^g.\end{aligned}$$

Oikea ratkaisu on ilmeisesti

$$\alpha_{AC} = -50^g + 200^g = 150^g.$$

2) Puolikulmakaava:

$$\begin{aligned}\alpha_{AC} &= 2 \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ &= 2 \arctan \frac{7000}{-7000 + 7000\sqrt{2}} = \\ &= 2 \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right) = 2 \cdot 75^g = 150^g.\end{aligned}$$

Ja

$$s_{AC} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 7000\text{ m} \cdot \sqrt{2} = 9899,495\text{ m}.$$





KUVA 3.13. Friedrich Robert Helmert (1841–1917) oli suuri saksalainen geodeetti ja tasoituslaskun ja sen teorian kehittäjä. [Humboldt University Berlin \(2017\)](#).



### 3.6 Koordinaattien yhdenmuotoisuusmuunnos

Yhdenmuotoisuusmuunnos<sup>12</sup> eli Helmertin muunnos on muunnos kahden suorakulmaisen koordinaatiston välillä, tavallisesti tasossa eli kaksiulotteisesti. Se esiintyy varsin usein käytännön mittaus- ja laskentatehtävissä, kun yhteiskäyttöä varten on yhdistettävä kahdessa tai useammassa koordinaatistossa olevia koordinaattiaineistoja. Yleisessä tapauksessa alueelta etsitään riittävä määrä *yhteisiä pisteitä* — tavallisesti kiintopisteitä — joiden koordinaatit tunnetaan molemmissa järjestelmissä, ja suoritetaan *tasotus*. Yksinkertaisemmassa erikoistapauksessa on käytettävissä vain kaksi yhteistä pistettä, mikä riittää muunnoksen määrittämiseksi.

Tunnetaan kahden kiintopisteen  $A$  ja  $B$  koordinaatit *molemmissa* koordinaatistoissa:

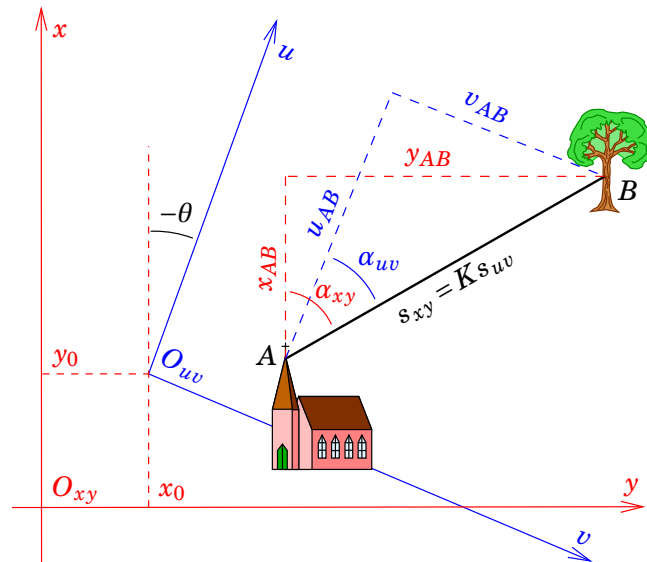
$$(x_A, y_A), (x_B, y_B), \quad (u_A, v_A), (u_B, v_B).$$

Tämän lisäksi on annettu pistejoukon koordinaatit vain  $(u, v)$ -koordinaatistossa:

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_i, v_i), \dots, (u_n, v_n).$$

<sup>12</sup>Ruots. *likformighetstransformation*, saks. *Ähnlichkeitstransformation*, ransk. *similitude*.





KUVA 3.14. Koordinaattien yhdenmuotoisuus- eli Helmertin muunnos tasossa.

Tehtävä on nyt laskea koko pistekentän yhdenmuotoisuusmuunnos:

$$(u_i, v_i) \mapsto (x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Katso kuva 3.14. Muunnos suoritetaan seuraavissa vaiheissa:

- 1) Origin *siirto*  $O_{uv} \mapsto O_{xy}$ , siirtoparametrit  $(x_0, y_0)$ . Origin siirtovektorin  $\mathbf{t}$  komponentit ovat  $(-x_0, -y_0)$   $(x, y)$ -akselistossa.
- 2) Koko  $(u, v)$ -koordinaattien akseliston *kierto* kulman  $\theta$  verran. Akseleiden kiertokulma on positiivinen myötäpäivään, mutta tulee *vähentää* pisteiden välisistä suuntakulmista, kun mennään  $(u, v)$ -järjestelmästä  $(x, y)$ -järjestelmään.  
(Kuvan tilanteessa  $\theta$  on negatiivinen.)
- 3)  $(u, v)$ -koordinaattien *mittakaavan muunnos*  $(x, y)$ -koordinaattien mittakaavaksi, kertomalla mittakaavakertoimella eli *mittakaava-suhteella*  $K$ .

Helmertin muunnosta tasossa kutsutaan myös *neliparametriseksi muunnokseksi*. Parametrit ovat  $x_0, y_0, \theta$  ja  $K$ .

Helmertin muunnoksen yleinen muoto on (kuva 3.14):

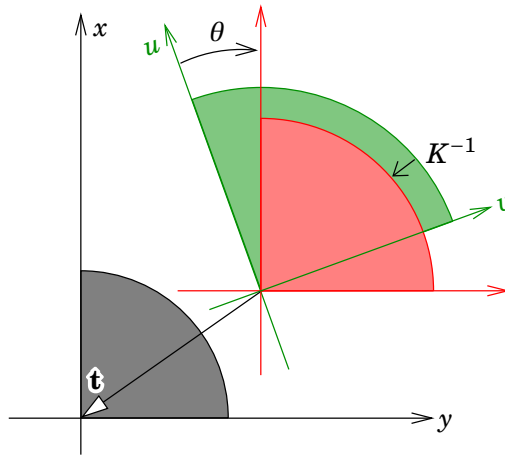
$$\begin{aligned} x &= x_0 + K \cos \theta \cdot u + K \sin \theta \cdot v, \\ y &= y_0 - K \sin \theta \cdot u + K \cos \theta \cdot v, \end{aligned} \quad (3.3)$$

matriisimuodossa — katso liite A:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$







KUVA 3.15. Helmertin tasomuunnoksen vaiheet koordinaattiakselien muutoksina: akselien kiertokulma  $\theta$ , akseliyksiköiden skaalaus  $K^{-1}$ , origon siirtovektori  $\mathbf{t}$ . Huomaa, että origon paikan, akseleiden suuntien ja akseliyksiköiden pituuksien muutokset ovat juuri päinvastaisia verrattuna siihen, mitä tapahtuu pisteiden koordinaateille ja niiden välisille suunta- ja etäisyyslukemille.



### 3.7 Muunnosparametrien määrittäminen

Muunnosparametrien määrittäminen yksikäsitteisesti vaatii vähintään *neljä "havaintoa"* — esimerkiksi kahden pisteen yhteensä neljä koordinaattia  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_B, y_B)$ . Silloin saadaan neljä yhtälöä:

$$x_A = x_0 + K \cos \theta \cdot u_A + K \sin \theta \cdot v_A,$$

$$y_A = y_0 - K \sin \theta \cdot u_A + K \cos \theta \cdot v_A,$$

$$x_B = x_0 + K \cos \theta \cdot u_B + K \sin \theta \cdot v_B,$$

$$y_B = y_0 - K \sin \theta \cdot u_B + K \cos \theta \cdot v_B,$$

taas matriisimuodossa:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_A & u_A \\ 0 & 1 & -u_A & v_A \\ 1 & 0 & v_B & u_B \\ 0 & 1 & -u_B & v_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ K \sin \theta \\ K \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Jos samoista pisteistä  $A$  ja  $B$  myös vanhat koordinaatit  $(u_A, v_A)$ ,  $(u_B, v_B)$  ovat tiedossa, voimme ratkaista tästä yhtälöstä neljä muunnosparametria  $(x_0, y_0)$  ja  $(K \sin \theta, K \cos \theta) \mapsto (K, \theta)$  yksiselitteisesti.



**Eromuunnos** Vähennyslasku antaa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} v_B - v_A & u_B - u_A \\ -(u_B - u_A) & v_B - v_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \sin \theta \\ K \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} v_{AB} & u_{AB} \\ -u_{AB} & v_{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \sin \theta \\ K \cos \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

loogisilla määritelmillä

$$\begin{aligned} x_{AB} &\stackrel{\text{def}}{=} x_B - x_A, & y_{AB} &\stackrel{\text{def}}{=} y_B - y_A, \\ u_{AB} &\stackrel{\text{def}}{=} u_B - u_A, & v_{AB} &\stackrel{\text{def}}{=} v_B - v_A. \end{aligned}$$

Järjestetään termit ovelasti uudelleen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_{AB} & u_{AB} \\ -u_{AB} & v_{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \sin \theta \\ K \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= K \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{AB} \\ v_{AB} \end{bmatrix}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Tämä yhtälö, *eromuunnos*, pätee mielivaltaisille pistepareille.

**Mittakaavasuhde** tai -kerroin saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$$K = \frac{s_{xy}}{s_{uv}} = \frac{\sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2}}{\sqrt{u_{AB}^2 + v_{AB}^2}}.$$

<sup>13</sup> **Kiertokulma** on <sup>13</sup> (positiivinen myötäpäivään, siis  $x$ -akselista  $y$ -akseliin):

$$\theta = \alpha_{uv} - \alpha_{xy} = \arctan \frac{v_{AB}}{u_{AB}} - \arctan \frac{y_{AB}}{x_{AB}}. \quad (3.6)$$

**Siirtovektorin** laskemiseksi lähdetään liikkeelle Helmertin eromuunnoksesta, yhtälö 3.5. Tutkitaan pistepari  $A$  ja  $O_{uv}$ , vanhan  $(u, v)$ -koordinaatiston origo. Pisteillä on uuden järjestelmän koordinaatit  $(x_A, y_A)$  ja  $(x_0, y_0)$  sekä alkuperäisen järjestelmän koordinaatit  $(u_A, v_A)$  ja  $(u_0, v_0) = (0, 0)$ . Silloin

$$u_{AO} = u_A - u_0 = u_A, \quad v_{AO} = v_A - v_0 = v_A,$$

<sup>13</sup>Unohdetaan hetkeksi kvadranttiongelman. Periaatteessa pitäisi lisätä termi  $k \cdot 200^\circ$ , jossa  $k$  on pieni kokonaisluku.



ja myös

$$x_{AO} = x_A - x_0, \quad y_{AO} = y_A - y_0.$$

Eromuunnos antaa nyt

$$\begin{bmatrix} x_A - x_0 \\ y_A - y_0 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \end{bmatrix},$$

eli siirtovektori on

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \end{bmatrix},$$

juuri etsityt siirtoparametrit.

Mielivaltaiselle pisteelle  $(x, y)$  Helmertin muunnosyhtälöt ovat nyt, kun kaikki muunnosparametrit on ratkaistu:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + K \cos \theta \cdot u + K \sin \theta \cdot v, \\ y &= y_0 - K \sin \theta \cdot u + K \cos \theta \cdot v, \end{aligned} \quad (3.3)$$

jo yllä annetut yhtälöt 3.3.

**Symbolinen matriisimuoto** Helmertin muunnos matriisimuodossa on

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Tämä voidaan kirjoittaa kompaktisti:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_0 + KR\bar{\mathbf{u}}, \quad (3.7)$$

jossa vektorien (sarakematriisien) ja matriisin määritelmät ovat

$$\bar{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Usein kirjoitetaan  $K = 1 + m$ , jossa  $m$  on mittakaavavääritysmä.

Yleensä tämä luku on pieni ja se ilmaistaan yksikössä ppm (*parts per million*).

Muunnosyhtälöitä 3.4 ja 3.7 kutsutaan yhdenmuotoisuus- eli *Helmertin muunnokseksi* tasossa.



**Esimerkki**

- 1) Annettuna pisteiden  $A$  ja  $B$  koordinaatit  $(u, v)$ -koordinaatistossa:

$$\begin{aligned} u_A &= 0 \text{ m}, & v_A &= 0 \text{ m}, \\ u_B &= 1500 \text{ m}, & v_B &= 1500 \text{ m}, \end{aligned}$$

ja  $(x, y)$ -koordinaatistossa:

$$\begin{aligned} x_A &= 2000 \text{ m}, & y_A &= 3000 \text{ m}, \\ x_B &= 3500,150 \text{ m}, & y_B &= 4500,150 \text{ m}. \end{aligned}$$

Olettaen, että järjestelmien  $(u, v)$  ja  $(x, y)$  välinen muunnos on Helmertin muunnos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

laske sen parametrit  $K$ ,  $\theta$ ,  $x_0$  ja  $y_0$ .

- 2) Annettuna pisteen  $C$  koordinaatit  $(u, v)$ -järjestelmässä:

$$u_C = 1000 \text{ m}, \quad v_C = 2000 \text{ m}.$$

Laske  $x_C$  ja  $y_C$ .

**Ratkaisu**

- 1) Näemme heti, että

$$\begin{aligned} u_{AB} &= 1500 \text{ m}, & x_{AB} &= 1500,150 \text{ m}, \\ v_{AB} &= 1500 \text{ m}, & y_{AB} &= 1500,150 \text{ m}. \end{aligned}$$

Tästä päätellään visuaalisesti, *eromuunnoksen* 3.5 avulla, että  $K = 1,0001$  ja  $\theta = 0$ .

Sen jälkeen pisteelle  $A$ :

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + 1,0001 \cdot u_A \implies x_0 = x_A - 1,0001 \cdot u_A = 2000 \text{ m}, \\ y_A &= y_0 + 1,0001 \cdot v_A \implies y_0 = y_A - 1,0001 \cdot v_A = 3000 \text{ m}. \end{aligned}$$

- 2) Lasketaan

$$\begin{aligned} x_C &= x_0 + 1,0001 \cdot u_C = 2000 \text{ m} + 1000,1 \text{ m} = 3000,1 \text{ m}, \\ y_C &= y_0 + 1,0001 \cdot v_C = 3000 \text{ m} + 2000,2 \text{ m} = 5000,2 \text{ m}. \end{aligned}$$





### 3.8 Datumit ja datumimuunnokset

Geodeettiset koordinaatit eivät ole vain matemaattisia suureita. Pisteiden välillä suoritetaan mittauksia maastossa, ja pisteiden koordinaatit lasketaan annettujen lähtöpisteiden eli *datumipisteiden* avulla. Lähtöpisteiden valinta on aina jossain määrin mielivaltaista. Jokainen tehty valinta luo *geodeettisen datumin*. Toisin sanoen, kun geodeettiset mittaukset tehdään Maan pinnan tietyllä osa-alueella käyttämällä tiettyä mittauspisteiden joukkoa, ja kun näistä valittujen lähtöpisteiden koordinaatit kiinnitetään määrättyihin arvoihin, saadaan tosielämän ratkaisu, joka edustaa vain tietyn vertausjärjestelmän *realisointia* eli toteutusta<sup>14</sup>.<sup>14</sup>

Koordinaatisto, vertauskehys eli *datumi* muodostetaan yleensä alueellisesti. Kun se kohtaa toisen, samalla tavalla muodostetun (mutta eri lähtöpisteisiin perustuvan) kehyksen, samojen pisteiden koordinaattiarvot eivät yleensä ole samoja. Esimerkiksi siinä, missä Suomen ja Ruotsin tarkkavaaitusverkot kohtaavat Tornionlaakson rajalla, saadaan samalle pisteelle kaksi eri korkeusarvoa, *jotka molemmat ovat oikein*.

Myös tasoverkkojen tapauksessa puhutaan datumeista, *tasodatumeista*: kun verkot kohtaavat rajoilla, saman pisteen tasokoordinaatit  $(\varphi, \lambda)$  eivät yleensä ole tarkasti samoja molemmissa datumeissa. Erot ovat klassisten kolmiomittausverkkojen tapauksessa kaarisekuntien luokkaa.

Eri datumeissa olevien pisteiden koordinaattien muuntamiseksi toisen datumin koordinaateiksi löytyy kirjallisuudesta sopivia *datumimuunnosyhtälöitä*.



#### 3.8.1 Esimerkki: korkeusverkko

Tutkitaan esimerkkinä korkeudenmittausta, *vaaitusta*. Suomen virallinen korkeusjärjestelmä vuoden 2007 syyskuun 25. päivään saakka, **N60**, perustuu tietyn pisteen korkeuteen. Tämä lähtö- eli datumipiste on Helsingin tähtitornin pihalla sijaitsevan graniittipaaden tietty hiottu pinta. Valinnassa vaikuttaa se historiallinen sattuma, että Helsinki on Suomen pääkaupunki. Datumipisteen korkeusarvo on valittu niin, että pisteiden korkeudet ovat melko tarkasti korkeuksia Helsingin sataman alkuvuo-

<sup>14</sup>Englanniksi koordinaattijärjestelmä muodollisena määritelmänä on *co-ordinate reference system*, kun taas sen realisointi maastossa, koordinaatisto, on *co-ordinate reference frame*. Esimerkiksi **ETRS** = *European Terrestrial Reference System* ja **ETRF** = *European Terrestrial Reference Frame*. Myös suomeksi vastaavat termit alkavat yleistyä: *vertausjärjestelmä* vastaan sen realisointi eli *vertauskehys*.



KUVA 3.16. Metsähovin tutkimusasemalla sijaitseva [N2000](#)-korkeusdatumin pääkiintopiste PP2000. Perustanut Geodeettinen laitos, nykyinen Maanmittauslaitoksen Paikkatietokeskus [FGI](#).



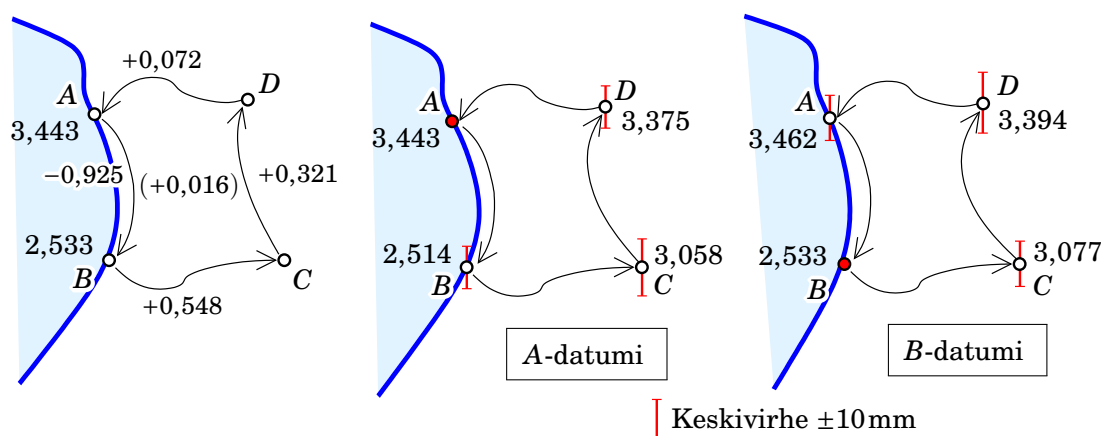
den 1960 keskimerenpinnan yläpuolella. Tieteellisesti Helsingin valinta oli mielivaltainen.

Suomen uusi korkeusjärjestelmä [N2000](#) käyttää lähtö- eli datumipisteensä 40 km Helsingistä länteen sijaitsevalla Metsähovin tutkimusasemalla olevaa pääkiintopistettä PP2000. Sen korkeusarvo on valittu niin, että korkeudet ovat Amsterdamin perinteikkään keskimerenpinnan [NAP](#):n suhteen. Myös Amsterdamin valinta oli historian eikä tieteen sanelema.

Valtakunnallinen tarkkavaaitus on tuonut virallisia korkeuksia kaikille Suomeen. Selvää on, että pisteelle lasketun korkeuden tarkkuus tässä järjestelmässä riippuu sen etäisyydestä Helsingistä. Kevon korkeus on selvästi heikommin tiedossa kuin Jyväskylän. Ja Turun korkeus on jonkin verran epätarkka, koska vaaitus Helsingistä Turkuun ei ollut absoluuttisen tarkka. Toisaalta Helsingin lähellä olevien pisteiden mitatut korkeudet ovat hyvinkin tarkkoja, koska *datumipiste*, Tähtitorninmäki tai Metsähovi, on niin lähellä.

<sup>15</sup> Kuvittele hetki, ettei Helsinki vaan Turku olisi Suomen pääkaupunki<sup>15</sup>





**KUVA 3.17.** Vaihtoehtoisia korkeusdatumeita  $A$  ja  $B$ .

ja että Suomen korkeusjärjestelmän datumipisteeksi olisi valittu merkki Turun tuomiokirkon seinällä. Silloin kaikki Turun lähistöllä olevat piste-  
korkeudet olisivat hyvin tarkkoja, mutta Helsingin alueen pisteet olisivat saman verran epätarkkoja kuin nykyjärjestelmässä Turun alueen pisteet: onhan vaaitus Turun ja Helsingin välillä jonkin verran epätarkka.

Tarkkuuskuvio riippuu näkökohdasta, valitusta *datumista*.

Kuvassa 3.17 on esitetty neljän pisteen vaaitusverkko. Annettuna — mitattuna — ovat korkeuserot  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  ja  $DA$ . Lisäksi on annettu rannikkopisteiden  $A$  ja  $B$  korkeudet keskimerenpinnasta, mitattuna mareografin eli vesiasteikon avulla.

- 1) Ensin tasoitetaan vaaitussilmukka, taulukko 3.1a.
- 2) Käytetään pistettä *A* datumipisteenä ja lasketaan pisteiden korkeudet<sup>16</sup>, taulukko 3.1b.
- 3) Toistetaan laskenta, mutta käyttäen pistettä *B* datumipisteenä, taulukko 3.1c.

Kuten nähdään ovat jälkimmäisessä tapauksessa kaikki lasketut korkeudet 0,019m suuremmat. Korkeuserot ovat tietenkin samat. Ero 0,019m on juuri pisteiden A ja B ”korkeuserojen ero” kahden menetelmän välillä: (1) vaaitus plus tasoitus ja (2) mareografit. Tämä ero johtuu vaaituksen ja mareografimittausten epävarmuudesta eli ”mittausvirheestä” ja siitä, että todellinen keskimerenpinta ei ole tasapotentialipinta.

<sup>15</sup> Näin olikin asian laita vuosina 1809–1812, ja epävirallisesti Ruotsin valtakunnan aikana.

<sup>16</sup> Keskivirheet taulukossa ovat keksittyjä, vaikkakin realistisen näköisiä.



TAULUKKO 3.1. Vaihtoehtoisia korkeusdatumeita A ja B.

(a)

Vaaitussilmukan tasoitus

Väli	Havaittu	Korjaus	Tasoitettu
<i>AB</i>	−0,925	−0,004	−0,929
<i>BC</i>	+0,548	−0,004	+0,544
<i>CD</i>	+0,321	−0,004	+0,317
<i>DA</i>	+0,072	−0,004	+0,068
Sulkuvirhe	+0,016	↑	0,000

(b)

Pisteiden korkeudet, datumi A

Piste	Korkeus	Keskivirhe
<i>A</i>	3,443	±0,000
<i>B</i>	2,514	±0,010
<i>C</i>	3,058	±0,014
<i>D</i>	3,375	±0,010

(c)

Pisteiden korkeudet, datumi B

Piste	Korkeus	Keskivirhe
<i>A</i>	3,462	±0,010
<i>B</i>	2,533	±0,000
<i>C</i>	3,077	±0,010
<i>D</i>	3,394	±0,014

*Datumiero* A-datumin ja B-datumin välillä on 0,019 m.

*Datumimuunnos* on

$$H_i^{(B)} = H_i^{(A)} + 0,019 \text{ m},$$

yleisemmin

$$H_i^{(B)} = H_i^{(A)} + \left( H_A^{(B)} - H_A^{(A)} \right).$$

Jokainen tasoitus tuottaa laskettujen arvojen tarkkuusarvioita eli *keskivirheitä*. Jos oletetaan, että annettuna arvona datumipisteen korkeusarvo on *virheetön* (keskivirhe nolla), kasvavat pistekorkeuksien keskivirheet, kun etäisyys datumipisteestä kasvaa. Taulukko 3.1 sisältää (mielikuvituksellisia) keskivirheitä, jotka käyttäytyvät juuri tällä tavoin. Ne on myös piirretty kuvassa 3.17 virhepylväiksi. Nähdään, että verkon tarkkuuskäyttäytyminen riippuu datumipisteen valinnasta.

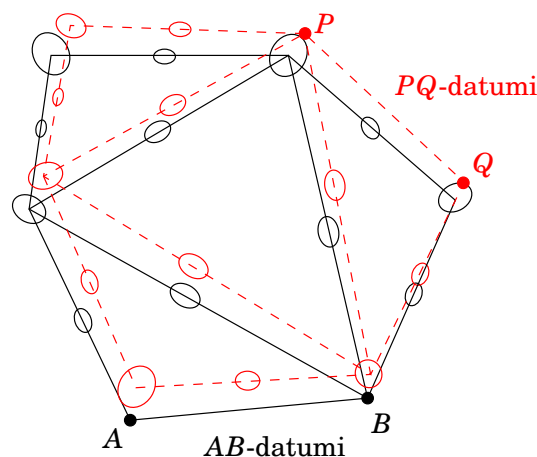


### 3.8.2 Tasokoordinaattien datumit

Kuten sanottu, myös tasoverkkojen tapauksessa on olemassa eri datumeita, *tasodatumeita*. Kuvassa 3.18 näkyy sama verkko sekä *AB*-datumissa että *PQ*-datumissa.







KUVA 3.18. Tasoverkon kaksi eri datumia,  $AB$ - ja  $PQ$ -tasodatumi lähtö- eli datumipisteineen. Pistevirhe-ellipsit ja pisteiden väliset (suhteelliset) virhe-ellipsit eri datumeissa on piirretty. Huomaa, miten virhe häviää datumipisteissä, joiden koordinaatit ovat osa datumin määritelmää eli määrätty arvot.

- $AB$ -datumi on luotu ottamalla pisteiden  $A$  ja  $B$  jo tiedossa olevat koordinaattien likiarvot *muodolliseksi totuudeksi* ja tasoittamalla koko verkko niitä muuttamatta. Näin saadaan lasketuksi muiden pisteiden, myös  $P$ :n ja  $Q$ :n, koordinaatit samassa  $AB$ -datumissa.
- $PQ$ -datumi taas on luotu samalla tavalla kiinnittämällä pisteiden  $P$  ja  $Q$  koordinaatit etukäteen annetuille likiarvoille ja tasoittamalla verkko niitä muuttamatta. Näin saadaan verkon muidenkin pisteiden sijainnit ratkaistuksi, nyt  $PQ$ -datumissa.

Kuvasta näkyy, että pisteiden koordinaatit  $AB$ -datumissa ja  $PQ$ -datumissa ovat erilaisia. Kuitenkin koko verkon *muoto* on samanlainen, riippumatta siitä, onko ratkaisun laskentaan valittu datumi  $AB$  vai datumi  $PQ$ . Tässä tapauksessa datumien välinen muunnos on yhdenmuotoisuusmuunnos eli *Helmertin muunnos*.

Pisteiden  $A$ ,  $B$ ,  $P$  ja  $Q$  etukäteen tiedossa olevat koordinaatit ovat yleensä peräisin aiemmasta verkkotasoituksesta, tähtitieteellisestä paikanmäärittäyksestä tai on luettu kartalta: ne ovat koordinaattien *likiarvot*. Datumien määrittäminen on siis sama kuin datumipisteiden valinta: pisteet, joiden koordinaattien likiarvot otetaan *muodollisena totuutena* mukaan verkon tasoitukseen.

Olisi sattuma, jos verkon laskenta  $AB$ -datumissa tuottaisi samat koordinaatit kuin laskenta  $PQ$ -datumissa. Erot eri tavalla laskettujen koordinaattien välillä ovat suuruuksiltaan verrattavissa käytettyjen koordi-

naattien likiarvojen *hyvyyteen* likiarvoina. Erot ovat usein niin pieniä, että muunnosparametrit ovat lähellä nollaa tai yhtä. Helmertin muunnoksessa 3.3:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + K \cos \theta \cdot u + K \sin \theta \cdot v, \\y &= y_0 - K \sin \theta \cdot u + K \cos \theta \cdot v,\end{aligned}$$

kiertokulma  $\theta$  on sen verran pieni, että  $\sin \theta \approx \theta$  ja  $\cos \theta \approx 1$ . Jos kirjoitetaan  $K = 1 + m$ , jossa  $m$  on mittakaavapoikkeama, on myös  $m$  pieni luku, ja saadaan

$$\begin{aligned}x &= x_0 + (1 + m)u + (1 + m)\theta v \approx x_0 + u + mu + \theta v, \\y &= y_0 - (1 + m)\theta u + (1 + m)v \approx y_0 - \theta u + v + mv,\end{aligned}$$

matriisiyhtälönä

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & \theta \\ -\theta & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

elegantti yhtälö, jonka toinen ja kolmas termi oikealla puolella ovat *pieniä*, koska sisältävät vain pienet muunnosparametrit  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $m$  ja  $\theta$ . Siis myös koordinaattierot  $x - u$  ja  $y - v$  ovat pieniä, kuten yllä jo todettiin.



### 3.9 Karttaprojektiot ja korkeusjärjestelmät kolmiulotteisessa maailmassa

Vaikka todellinen maapallomme ja sen painovoimakenttä ovat kolmiulotteisia ilmiöitä, joita voidaan kuvata ja käsitellä oikein vain kolmiulotteisesti, käytetään hyvin laajasti kuvaustapoja, jotka perustuvat ”kaksi-plus-yksi-ulotteiseen” ajatteluun. Tähän käytetään karttaprojektioita ja korkeusjärjestelmiä, jotka yhdessä kuvaavat maailmaa  $2D + 1D$ -koordinaattien  $(x, y, H)$  avulla.

Vaikka tässä on kyse kolmesta koordinaatista, ei voida puhua aidosti kolmiulotteisista koordinaateista, koska toisaalta  $(x, y)$  ja toisaalta  $H$  eivät ole vertailukelpoisia.

Tavallisten ihmisten — ja jopa maanmittarien — keskellä elää käsitteellinen ”kenkälaatikkomaailman” malli: maailma on silloin suorakulmainen, sivut osoittavat pohjoiseen ja itään, ja korkeuskoordinaatti on yksinkertaisesti etäisyys kenkälaatikon pohjasta, ”merenpinnasta”.



Tämä ajattelutapa olisi helppo tuomita. Muista kuitenkin, että *pienellä alueella kenkälaatikkomalli* on — voi olla — *hyväksyttävä approksimaatio*. Esimerkiksi kaupunkien sisällä käytetään plankarttoja ja suorakulmaisia koordinaatteja ilman vakavia seuraamuksia. Se, onko tämä approksimaatiotaso hyväksyttävä, edellyttää huolellista analyysia.

Jos  $(x, y, H)$ -esitystapa on hyväksyttävä, on se sijainnin ja korkeuden esitystapana yksinkertaisempi kuin Maan todellinen geometria, todelliset sijainnit suorakulmaisine geosentrisine koordinaatteineen ja todelliset korkeudet geopotentiaalilukuineen. Kuitenkin yleisessä tapauksessa se on itse asiassa monimutkaisempi sijainnin ja korkeuden esitystapa: karttaprojektoiden ja painovoimakentän monimutkaisuus tunkeutuu kaikkiin määritettyihin koordinaatteihin. Väärinkäsityksistä aiheutuvia virheitä on varsin helppo tehdä.

**Siksi** tarkassa tieteellisessä työssä geodesiassa pitää pitäytyä *geosentrisiin, kolmiulotteisiin koordinaatteihin* ja *geopotentiaalilukuihin*. ”Tasokoordinaatit” — tarkemmin sanoen, karttaprojektiokoordinaatit — ja metriset korkeudet on aina katsottava *johdannaisuuksiksi*, joiden perusteella ei saisi yrittää tehdä tarkkoja laskelmia.

Katso seuraava kuvio, jossa merkit “ $\longleftrightarrow$ ” kuvaavat käytettyjä operaatioita:

$$(X, Y, Z) \xleftrightarrow{\text{vertausellipsoidi}} (\varphi, \lambda, h) \begin{cases} (\varphi, \lambda) \xleftrightarrow{\text{karttaprojektio}} (x, y) \\ h \xleftrightarrow{\text{geoidimalli}} H \end{cases} \quad (3.8)$$

**Vertausellipsoidi** Koordinaattikonversio suorakulmaisten ja geodeettisten koordinaattien välillä on matemaattinen, eksakti operaatio. Vertausellipsoidin valinta on kuitenkin mielivaltaisen. Nykyisin [GRS80](#) on standardi. Suomessa on historiallisesti käytetty myös Hayfordin eli Kansainvälistä ellipsoidia 1924.

**Karttaprojektio** Matemaattinen, eksakti operaatio. Tarjolla on monta eri vaihtoehtoa.

**Geoidimalli** Korkeuden tyyppi voi olla ortometrinen, normaali (tai niiden kahden variantti) tai dynaaminen. Aina tarvitaan *geoidimalli* tai vastaava, katso osio [4.1](#).

Kuviossa [3.8](#) vasemmalla ovat abstraktimmat suureet, jotka ovat ihmisille vaikeita ymmärtää, kun oikealla ovat konkreettisemmat suureet,



joiden käyttö on lähempänä päivittäistä elämää.



### 3.10 Aikakoordinaatti

Geodesiassa käytetään kolmiulotteisten paikkakoordinaattien lisäksi muitakin koordinaatteja. Niistä ensimmäinen on *aika*. Aika kuvaa Maassa tapahtuvia muutoksia, joiden tutkimus kuuluu *geodynamiikan* alaan, josta enemmän osiossa 18.1. Nykygeodesian mittaustarkkuudella maapallo *elää ja muuttuu* jatkuvasti:

- Kiinteän Maan vuoroveden johdosta maaperä jalkojemme alla liikkuu jaksollisesti, kahdesti vuorokaudessa, ylös ja alas — jopa Suomessa parin desimetrin verran. Me emme sitä huomaa kiinteämmän vertailukohdan uupuessa: kaikki ympärillämme liikkuu ylös ja alas kanssamme.
- Laattatektoniikan ilmentymänä kaikki mannerlaatat liikkuvat taiseisesti. Liikkeen nopeus on luokkaa muutama senttimetri vuodessa ja GNSS-teknologian avulla tarkasti seurattavissa.
- Maan pyörähdysliike on epäsäännöllinen. Avaruusgeodeettisilla havaintomenetelmillä voidaan seurata pyörähdysakselin suunnan vaihteluita sekä kiinteän Maan suhteen — napaliike — että tähti-taivaan suhteen — prekessio, nutaatio — ja pyörähdysnopeuden vaihteluita — LoD, vuorokauden pituus. Ilmiötä kutsutaan yhteisellä nimellä ”Maan asentoparametrit” (EOP, *Earth orientation parameters*).
- Fennoskandiassa, Kanadassa ja muualla Maan pinta nousee hitaasti viime jääkauden jälkeen. Kyseessä on postglasiaalinen palautusliike eli ”*glacial isostatic adjustment*” (GIA).
- Löytyy muitakin, paikallisempia liikkeitä, osin ihmistoiminnan aiheuttamia.



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Miten karttaprojektiot luokitellaan sen perusteella, mitä ne vääristävät ja mitä ne säilyttävät?
- 2) Mikä piirre erottaa ”modernit” vertausjärjestelmät ”perinteisistä”?
- 3) Mitkä ovat erot vanhan KKJ-datumin ja uuden EUREF-FIN-datumin välillä Suomen alueella?



- 4) Nimeä ja kuvaile geodeettiset suorakulmaiset tasokoordinaatit ja geodeettiset napakoordinaatit tasossa. Miten konvertoit niiden välillä?
- 5) Kuvaile geodeettinen päätehtävä tasossa ja sen ratkaisu.
- 6) Kuvaile geodeettinen käänteistehtävä tasossa ja sen ratkaisu.
- 7) Kuvaile Helmertin muunnos tasossa. Montako vapaata parametria muunnos sisältää? Kuvaile ne.
- 8) Mikä on datumi ja miten se luodaan?
- 9) Kuvaile lyhyesti mitä ilmiöitä geodynamiikka tutkii.



### Harjoitus 3–1: Etäisyyksiä

Löytyy kahden Suomessa sijaitsevan pisteen koordinaatit: GNSS:n fundamentaaliasema Metsähovi (METS) ja Sodankylän geofysikaalisen observatorion GNSS-asema (SODA). EUREF:n datakeskus (ROB, EUREF Permanent GNSS Network) tarjoaa seuraavat likimääräiset ITRF-koordinaatit:

Station		$X$ (m)		$Y$ (m)	$Z$ (m)
METS	1	2892571,00	1311843,28	5512634,01	
SODA	2	2200147,00	1091638,20	5866870,60	

Tästä

- 1) laskemme leveys- ja pituusasteet  $\varphi$  ja  $\lambda$  käyttäen Maanmittauslaitoksen online palvelua Maanmittauslaitos, Paikkatietoikkuna. Sovellus pyytää kolmiulotteiset karteesiset koordinaatit ETRS89-järjestelmässä, mikä ei ole aivan sama kuin likimääräinen ITRF; uskotellaan, että se on sama.
- 2) Näistä lasketaan etäisyys GRS80-ellipsoidin pinnalla pisteiden välillä, eli ratkaistaan *geodeettinen käänteistehtävä*. Käytä NGS:n verkkosivu NGS, Computation utilities saadaksesi etäisyys  $s_1$ .
- 3) Vertausellipsoidin sijasta voidaan käyttää palloapproksimaatiota, Maan keskisäteen ollessa  $R = 6371,008$  km. Asemien METS ja SODA välinen etäisyys voidaan laskea käyttämällä yhtälöä<sup>17</sup> (pallon kosinissäntöä)

$$\cos \psi = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ja silloin metrinen etäisyys pallon pintaa pitkin on

$$s_2 = \psi R.$$



- 4) Vaihtoehtoisesti *jänne-etäisyys* palloapproksimaatiossa:

$$s_3 = 2R \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right).$$

- 5) Palataan Maanmittauslaitoksen verkkosivulle ([Maanmittauslaitos, Paikkatietoikkuna](#)) ja muunnetaan koordinaatit  $(\varphi, \lambda)$  kaksiulotteiseen *karttaprojektiojärjestelmään* [ETRS-TM35FIN](#).
- 6) Käyttäen nämä kaksiulotteiset koordinaatit  $(x, y)$  asemille METS ja SODA lasketaan asemien välinen etäisyys Pythagoraan lauseen avulla kahdessa ulottuvuudessa:

$$s_4 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- 7) Kaiken tämän jälkeen laske *jänne-etäisyys* (kolmessa ulottuvuudessa), myös Pythagoraan avulla, alkuperäisistä suorakulmaisista koordinaateista:

$$s_5 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}.$$

Kaikki nämä etäisyydet ovat erilaisia. Jotkut erot ovat pieniä, toiset huomattavia. Vie harjoitus loppuun selittämällä, mistä kaikki nämä erot ovat peräisin, ja *piirrä kuva*, johon kaikki etäisyydet on merkattu.

Laske millimetrin tarkasti.

<sup>17</sup>Tarkkaavainen lukija on jo huomannut, että lyhyillä etäisyyksillä  $\psi$  tämä yhtälö tuottaa kosinin, joka on lähellä yhtä, minkä seurauksena menetetään tarkkoja desimaaleja, kun  $\psi$  saadaan arccos-funktiosta.

Voidaan johtaa kyseisen yhtälön ”puolikulmaversio” seuraavasti: sijoita

$$\begin{aligned}\cos \psi &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ \cos(\lambda_2 - \lambda_1) &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2},\end{aligned}$$

joka antaa

$$\begin{aligned}1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right) = \\ &= (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = \\ &= \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2},\end{aligned}$$

josta

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}, \quad (3.9)$$

pallokosinisäännön puolikulmaversio, joka käyttäytyy hyvin myös pisteille, jotka sijaitsevat lähellä toisiaan (verrattuna Maan kokoon).





# Korkeuden mittaus ja vaaituskoje

# 4

Lattamiehentie, 01260 Vantaa

Lattamiehentie, 80100 Joensuu

Vaakitsijantie, 90650 Oulu

---

Katuosoitteita



## 4.1 Korkeus, geopotentialiaali ja geoidi

Korkeudet ilmaisevat pisteiden sijainnit pystysuunnassa Maan paikallisen *painovoimavektorin*, vertikaalin eli luotiviivan, suuntaan.

Intuitiivisesti tämä perustuu Maan muodon naiiviin ”kenkälaatikkomalliin”, jossa korkeus on kolmas koordinaatti, suora, metrinen etäisyys kenkälaatikon pohjasta, merenpinnasta.

Kenkälaatikkomallia kutsutaan myös ”litteän Maan approksimaatioksi”: jossain mantereen pinnan alla on vertauspinta eli taso, joka yhtyy keskimerenpintaan. Korkeus on etäisyys metreinä tästä tasopinnasta.

Todellisuudessa Maa ei ole litteä ja vertauspinta on kaareva, jopa kumpuileva. Vertauspintaa kutsutaan *geoidiksi*. Se on Maan painovoimakentän *tasapotentialialipinta*, pinta jonka jokaisella pisteillä on sama *geopotentialin*, Maan painovoimakentän potentiaalin, arvo.

Painovoiman suunta, *luotiviiva*, on kaikkialla *kohtisuorassa* tätä pintaa vasten. Pisteiden etäisyyttä tästä pinnasta mitattuna luotiviivaa pitkin kutsutaan sen *ortometriseksi korkeudeksi*. Näin ollen ortometrisellä korkeudella on yksinkertainen geometrinen tulkinta, ja se on tietysti *metrinen* suure.



### 4.1.1 Geopotentialiaali

*Fysikaalinen geodesia* on geodesian haara, joka tutkii Maan painovoima-

kenttää ja painovoimapotentiaalia. Geopotentialia  $W$  voitaisiin pitää viidentenä ”koordinaattina” kolmen paikkakoordinaatin  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ja ajan jälkeen. Geopotentialia kuvaa pisteiden *energiatasoa* suhteessa merenpintaan. Tämä vastaa populaarikäsitteeseen ”korkeus”. Meillä on päivittäisessä elämässä tapana ilmaista korkeus metrisenä suurena... mutta oikeasti meitä kiinnostaa korkeuteen liittyvä, potentiaalinen, *energia*. Painovoiman vaikutus kaikkeen päivittäiseen toimintaan on niin vahva, että ”korkeudenmääritys”, geopotentialin tutkimus, määrittäminen ja esitys muodostavat suuren osan käytännön geodesiasta ja maanmittaustoiminnasta.

**Vesi** ”Korkeus” eli potentiaali edustaa *energiaa*. Energia voidaan ottaa talteen tai varastoida — esimerkiksi vesivoima. Kyseessä voi olla myös tuhoisa energia — tulvat — johon on varauduttava. Viemärien pitää viettää riittävästi, jotta ne toimivat.

**Ilma** Ilman painetasot seuraavat aika tarkasti geopotentialin tasoja. Ilmiötä käytetään hyväksi barometrisessä korkeudenmäärityksessä. Myös lentokone mittaa ”korkeuttaan” käyttämällä ilmanpaineanturia.

**Liikenne** Painovoima vaikuttaa liikenneväylien suunnitteluun. Kaltevuudet eivät saa olla liian jyrkkiä, vaan pyrkimyksenä ovat rajalliset potentiaalini eli energiatason vaihtelut koko väylää pitkin. Vesiväylien tapauksessa tämä toteutuu itsestään luonnollisella tavalla.

Geopotentialia liittyy kiinteästi painovoimaan. Geopotentialin saman arvon pintoja, *tasapotentialipintoja* kutsutaan kansanomaisesti ”vaakatasoiksi”. Vapaasti virtaava neste — merivesi, järvi, ilma — asettuu tasapotentialipinnan mukaiseksi. Meressä hydrostaattinen paine on vakio painovoimakentän tasapotentialipinnoilla, samoin kuin ilmakehässä barometrinen paine — ainakin likimäärin. Häiriötekijät ovat veden suolaisuus- ja veden tai ilman lämpötilaerot sekä niiden aiheuttamat virtaukset.

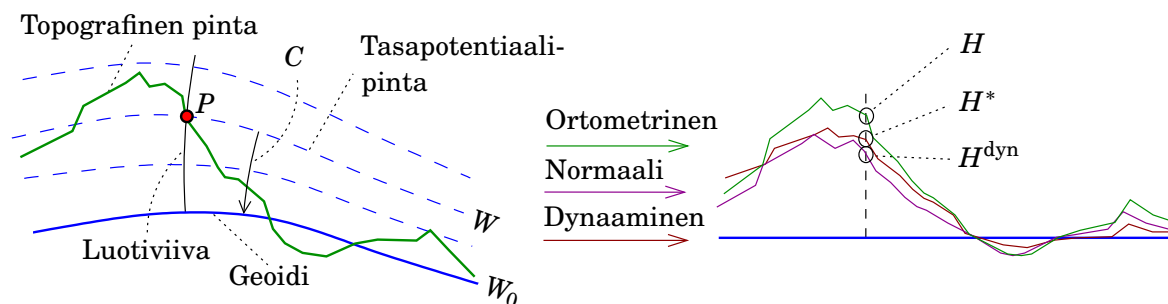


#### 4.1.2 Metriset korkeudet

Korkeuksia yritetään ”inhimillistää” samanlaisella tavalla kuin mitä karttaprojektiot tekevät sijaintitiedoille. Keksitään tapa, jolla pisteen korkeus ”merenpinnan yläpuolella” voidaan ilmaista *metrisenä* suurena, korkeutena  $H$  jostain *vertauspinnasta*, tavallisesti keskimerenpinnasta.







KUVA 4.1. Eri korkeustyytit kuvaavat geopotentiaalilukuja  $C$  eri tavalla metriksiksi korkeuksiksi (erot liioiteltu).

Ensimmäinen askel on aina laskea geopotentialiarvojen ero tarkasteltavan pisteen ja keskimerenpinnan välillä, pisteen *geopotentialiluku*  $C$ . Tämä luku on positiivinen keskimerenpinnasta ylöspäin.

Valitettavasti, aivan kuten karttaprojektoiden tapauksessa, ei ole olemassa ratkaisua, joka olisi kaikissa suhteissa tyydyttävä. Aina jotain vääristyy.

Samalla tavalla kuin karttaprojektioissa, on olemassa myös eri *korkeustyypppejä*, kuten

- ortometrinen korkeus  $H$
- normaalikorkeus  $H^*$
- dynaaminen korkeus  $H^{\text{dyn}}$ .

Kaikilla on hyviä ja huonoja ominaisuuksia.

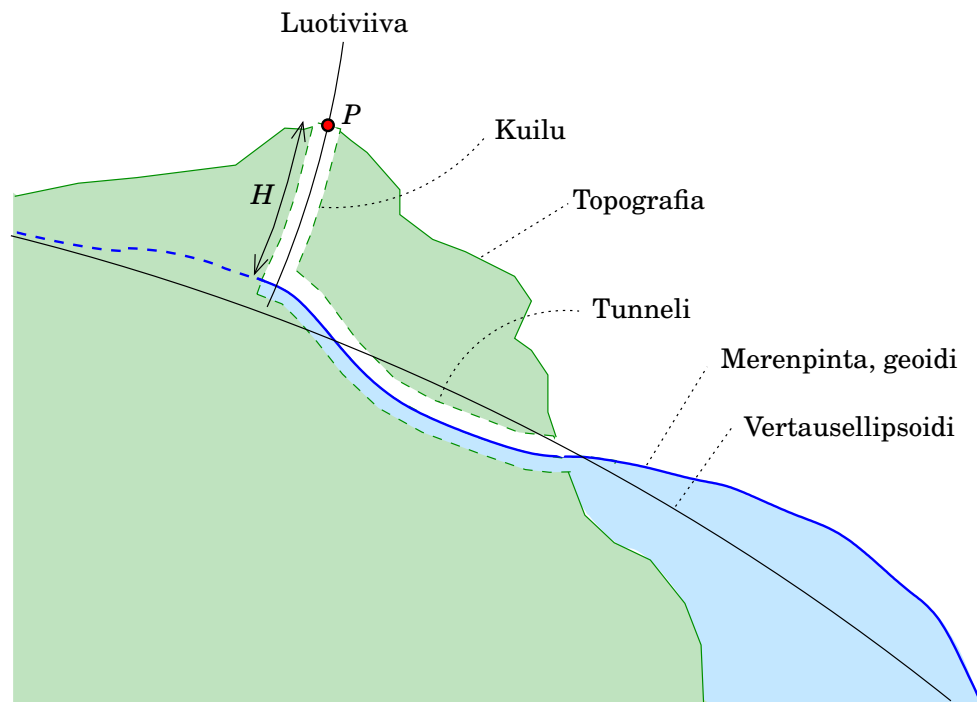
Aiemmin, geometrysten koordinaattien kohdalla (osio 2.8), tutustuimme vertausellipsoidiin sidottuihin koordinaatteihin, joista yksi oli *korkeus vertausellipsoidista*  $h$ . Tämä koordinaatti kuvaa pisteen sijaintia pystysuunnassa ja on tavallaan myös pisteen korkeus. Se lasketaan kuitenkin *vertausellipsoidista*, pinnasta, joka ei ole päivittäisessä elämässä fysikaalisesti käytettävissä vertauspintana. Se ei myöskään kuvaa energiatasoa verrattuna merenpintaan, kuten  $H$ ,  $H^*$  ja  $H^{\text{dyn}}$  (ja tietysti geopotentialiluvut  $C$ ) tekevät.

Jos tämä kaikki tuntuu tässä vaiheessa vaikealta ja teoreettiselta, kannattaa palata myöhemmin kurssissa tähän osioon ja lukea se uudelleen.



## 4.2 Ortometrinen korkeus

Ortometriset (kreik. ”oikein mitattu”) korkeudet  $H$  vastaavat parhaiten käsitteeseen ”korkeudet merenpinnan yläpuolella”. Ne ovat periaatteessa vain metrisiä korkeuksia *geoidin* yläpuolella. Geoidi on se painovoima-



KUVA 4.2. Ortometriset korkeudet ovat metrisiä etäisyyksiä *geoidista*, siitä vesipinnasta, joka muodostuisi, jos merivesi pääsisi vapaasti liikkumaan topografian alla mielikuvituksellisen tunneliverkoston kautta. Ortometristä korkeutta  $H$  voitaisiin siinä tapauksessa suoraan mitata *luotiviivaa* pitkin kuvatulnaisen kuilun kautta.

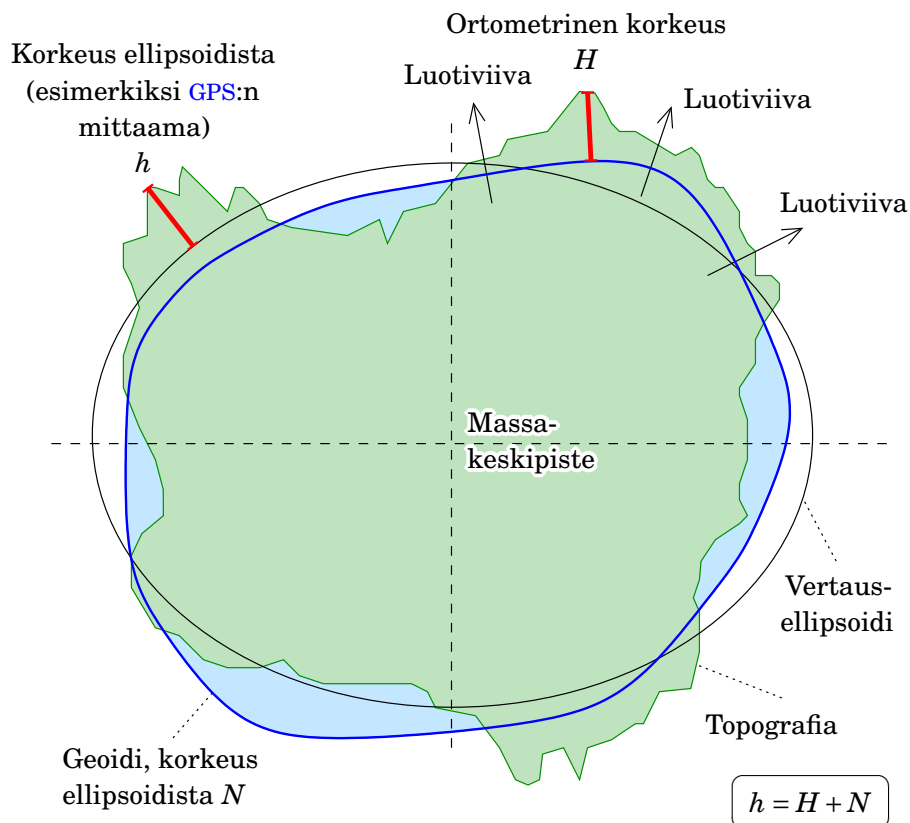


kentän tasapotentialipinta, joka on keskimäärin samalla tasolla kuin keskimerenpinta. Toisin sanoen keskimerenpinta jatkettuna mannermassojen alle.

Jos mantereiden alle voitaisiin kaivaa tunneliverkosto (kuva 4.2) merenpinnan tasolla, vesi leviäisi verkostoon niin, että sen pinta olisi geoidin fysikaalinen realisointi. Pisteiden ortometrinen korkeus olisi sen *etäisyys tästä nestepinnasta*. Tämä suora fysikaalinen tulkinta on syy, miksi monet geofyysikot, ja monet maat — Suomi niiden joukossa ennen vuotta 2007 — ovat valinneet ortometrisen korkeusjärjestelmän.

Kuvatunlaisen tunneliverkoston rakentaminen ei ole tietenkään käytännöllistä. Sisämaassa geoidia realisoidaan *laskennallisesti*, laskemalla läpi korkeusmittaus- eli *vaaitusverkko* alkaen valitusta rannikkopisteestä tai -pisteistöstä. Näin saadaan ortometrisiä korkeuksia koko maahan, kaikkialle, mihin vaaitusverkko ulottuu.

Suomessa oli vuoteen 2007 saakka käytössä virallisena korkeusjärjestelmänä **N60**-järjestelmä eli *-datumi*, jonka nollataso on Helsingin keskimerenpinta vuoden 1960 alussa. **N60**-korkeudet ovat hyvällä tarkkuudel-



KUVA 4.3. Keskeiset vertauspinnat ja korkeuskäsitteet.

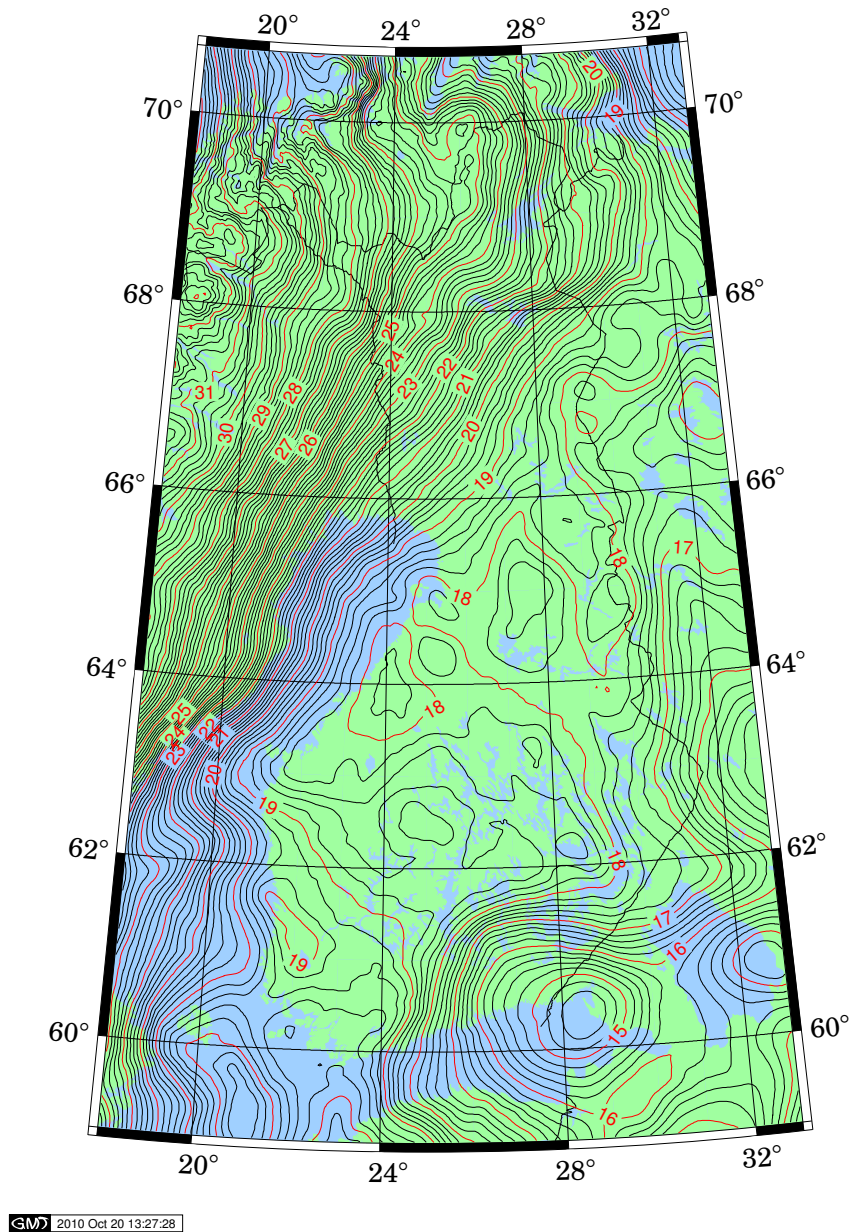
la ortometrisia. Vuonna 2007 otettiin käyttöön N2000-järjestelmä, nollatasona keskimerenpinta Amsterdamin virallisen NAP-korkeusdatumin (*Normaal Amsterdams Peil*) mukaan. N2000-korkeudet ovat *normaalikorkeuksia*. Normaalikorkeuksien määritelmä eroaa hieman ortometristen korkeuksien vastaavasta. Suomessa ero on käytännön kannalta lähes merkityksetön.

## 4.3 Korkeuden määrittäminen ja vaaitus

### 4.3.1 Eksoottiset korkeudenmäärittämenetelmät

Suorin tapa mitata korkeuseroja on realisoida painovoimakentän tasapotentiaalipinta *nestepinnan* avulla. Näin voidaan siirtää geopotentialiarvoja paikasta toiseen.

- o Tanskassa ja Hollannissa on käytetty *hydrostaattista vaaitusta*, jossa pitkää, tislattua vedellä täytettyä letkua eli putkea käytetään geopotentialin ("korkeuden") tason siirtämiseksi saaresta toiseen tai mantereeseen ja saaren välillä. Mittausten matkat ovat olleet kymmeniä kilometrejä.



KUVA 4.4. Suomen geoidimalli [FIN2000](#) (data © Maanmittauslaitos). Kartan geoidin korkeudet on laskettu geosentrisestä vertausellipsoidista [GRS80](#). Yksikkö m.



- Käyttämällä *vesiasteikkoja* sisävesillä voidaan siirtää korkeuksia hydrostaattisesti. Kuten myös letkutekniikassa, on tässä otettava huomioon päätepisteiden välinen ilmanpaine-ero sekä tuulen ja virtausten vaikutus. Menetelmää, joka toimii parhaiten jääpeitteen alla, on kokeiltu muun muassa Alankomaissa (IJsselmeer, Rijkswaterstaat 1996–97, [Reijnoudt, 1996](#)) ja Suomessa.



- Myös barometria eli ilmapuntaria on perinteisesti käytetty korkeuserojen mittaamiseen. Huolellinen menettelytapa, joka ottaa huomioon sään mukanaan tuomat luonnolliset ilmanpainevaihtelut, antaa parhaimmillaan noin metrin tarkkuuden. Katso [Heiskanen ja Härmälä \(1963\)](#) sivut 84–87.

Merivirtausten geofysikaalista mallinnusta on kokeiltu muun muassa Ahvenanmerellä.

Mainittava on myös trigonometrinen linjavaaitus, katso kuva 6.8 ([Taalo, 1995](#)).

Eräs *hi-tech*-menetelmä potentiaalien mittaamiseksi käyttää tarkkoja atomikelloja ja yleisen suhteellisuusteorian ennustamaa painovoiman aiheuttamaa kellojen hidastusilmiötä. Tällä hetkellä on laboratorioteknologiana olemassa *optisia hilakelloja*, optisilla taajuuksilla toimivia atomikelloja, joilla olisi senttimetrin tarkkuusvaatimusta vastaava noin  $1 : 10^{18}$  suhteellinen tarkkuus.

Toinen *hi-tech*-menetelmä, joka on jo käytössä ([Gruber ym., 2014](#)), on tarkkojen, korkeaa erotuskykyä omaavien *geopotentialimallien* rakentaminen. Mallien avulla voidaan laskea pisteen tarkka geopotentiaali heti, kun satelliittipaikannus on määrittänyt pisteen tarkan geosentrisen sijainnin. Jo päättynyt satelliittipainovoimamissio [GOCE](#) (2009–2013) on avain tähän.

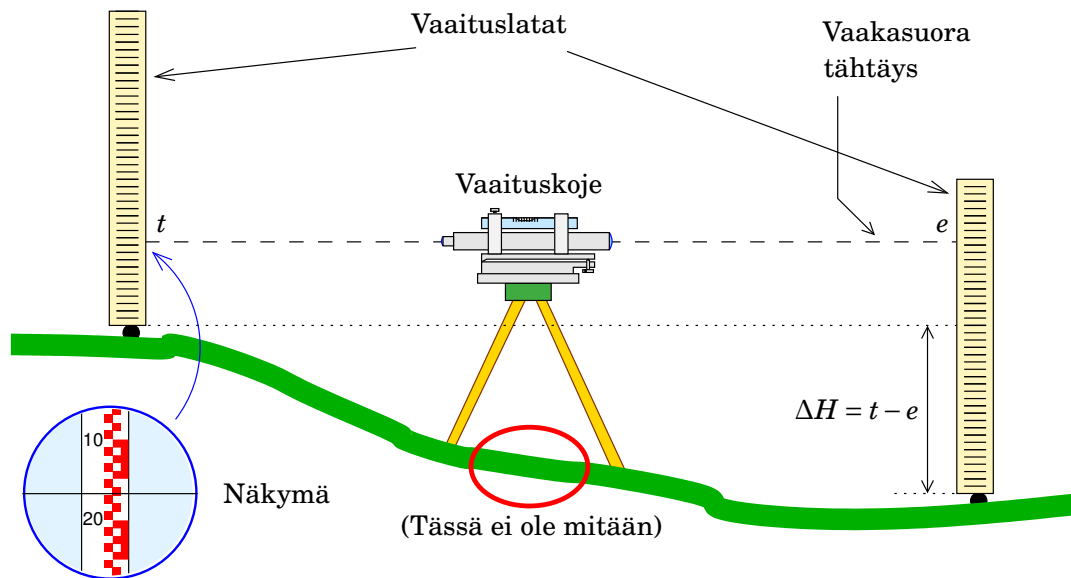


#### 4.3.2 Vaaitus

Jo mainittu *vaaitus* on vakiintunut menetelmä keskimerenpinnalta laskettujen korkeuksien määrittämiseksi. Vaaituksella mitataan kahden pisteen välinen korkeusero, kuva 4.5. Yhdellä mittauksella mitattava pisteväli on lyhyt. Ketjuttamalla pistevälejä jono- eli *linjavaaitukseksi* voidaan määrittää korkeuseroja kaukana toisistaan olevien pisteiden välillä ja suorittaa laajojen alueiden korkeuskartoituksia.

Suomessa, kuten muuallakin, vaaitusverkko kattaa koko maan ja antaa mahdollisuuden määrittää pisteiden korkeuksia verkon *korkeusjärjestelmässä*. Vaaitusverkot muodostavat *hierarkian*: Geodeettisen laitoksen aiemmin mittaama ja ylläpitämä tarkkavaaitusverkko kattaa koko maan, mutta on harva. Verkon silmukat ovat pituuksiltaan satoja kilometrejä. Maanmittauslaitoksen alemman luokan vaaitukset tihentävät tätä verkkoa, ja paikalliset toimijat — kunnat, rakentajat — kytkevät omia vaaitusverkkojaan tähän järjestelmään. Näin saadaan viralliset korkeudet kaikkien käyttäjien ulottuville.





KUVA 4.5. Vaaituksen geometria.

Maastokartoilla esiintyvät korkeuskäyrät ovat virallisessa järjestelmässä, aiemmin **N60**, nyt **N2000**.



#### 4.3.3 Korkeusjärjestelmän luominen

Geometrisen linjavaaituksen antamat korkeuserot  $\Delta H$  saa summata yhteen *vain pienen alueen sisällä*, jossa paikallinen painovoima on vakio. Suuremmilla alueilla korkeuserot  $\Delta H$  on ensin muunnettava *geopotentialieroiksi*  $\Delta C$ :

$$\Delta C = g \cdot \Delta H,$$

jossa  $g$  on paikallinen painovoima. Sen jälkeen pätee geopotentialieroille suljetun silmukan ympärillä, että

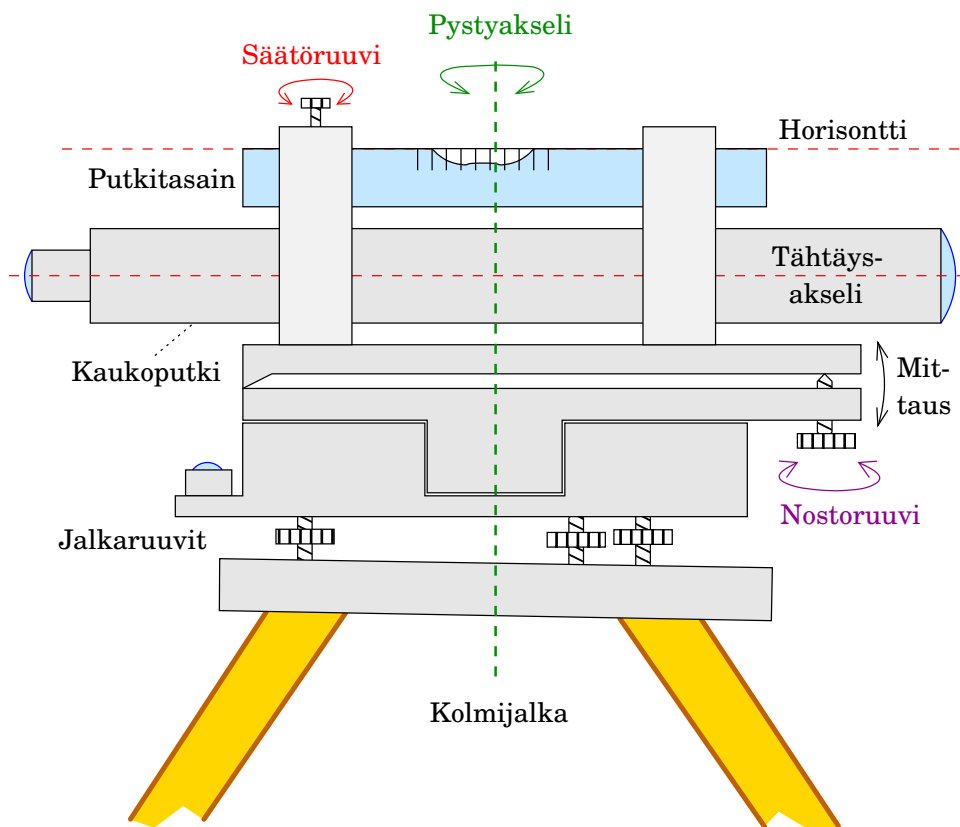
$$\sum_{\text{sulj. silm.}} \Delta C = 0,$$

vaikka raoille korkeuseroille

$$\sum_{\text{sulj. silm.}} \Delta H \neq 0!$$

Toisin sanoen, kun korkeuserojen summa  $\sum_A^B \Delta H$  riippuu valitusta polusta pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$  — eikä siis ole yksiselitteinen — on taas potentiaalierojen summa  $\sum_A^B \Delta C$  riippumaton polun valinnasta. Yksiselitteisenä suurena geopotentiali sopii paremmin alueen korkeusjärjestelmän perusteeksi.





KUVA 4.6. Vaaituskoje.

## 4.4 Vaaituskoje

### 4.4.1 Rakenne ja toiminta

Vaaitus (*geometrinen vaaitus*, kuva 4.5) perustuu vaakasuoraan tähtäykseen: vaaituskojeen mittauskaukoputken optinen akseli eli *tähtäysakseli* on vaakasuora. Tämän aikaansaamiseksi kojeessa on *tasain*. Sekä tasain että kaukoputki on kytketty kojeen runkoon.

Perinteinen vaaituskoje (kuva 4.6) sisältää muun muassa mittauskaukoputken, pienen rasiatasaimen likimääräistä tasausta varten, ja tarkan putkitasaimen. Kojeseen kuuluu myös jalusta (kolmijalka) ja jalkaruuvit. Hyvin säädetyllä vaaituskojeella kaukoputken optinen akseli, *tähtäysakseli* — linja, jonka okulaarin hiusviivaristikko määrittää — on samansuuntainen tasaimen määrittämän vaakatason eli *horisontin* kanssa.

Vaaituskoje on tasattava uudelleen jokaisella kojeasemalla. Monessa vaaituskojeessa on erillinen *nostoruuvi* tarkkaa tasausta varten. Tarkka tasaus suoritetaan ennen jokaista eteen- ja jokaista taaksemittausta.

Tähtäysakselin ja putkitasaimen horisontin tarkka samansuuntaisuus





TAULUKKO 4.1. Vaaituskojeiden luokitus.

Kojetyyppi	Vaaitustyyppi
Rakennusvaaituskoje	Rakennus-, maarakennusvaaitus
Keskiluokan koje	Insinööri-, rakennusvaaitus
Korkeamman luokan koje	Korkeusrungon vaaitus
Korkeimman luokan koje	Tarkkavaaitus

saadaan aikaan *säätöruuvien* avulla kojeen tarkistuksen yhteydessä.



#### 4.4.2 Luokitus

Vaaituskojeet luokitellaan *tarkkuuden, käyttötarkoituksen ja rakenteen* mukaan kasvavan tarkkuuden järjestyksessä, taulukko 4.1.

*Tarkkavaaituksesta* puhutaan, jos edestakainen mittaustarkkuus kilometrin matkalla on alle 0,5 mm. Tämän tarkkuusluokan kojeilla on jo optinen vaaitusmikrometri, katso kuva 4.17. Mittauskaukoputken koko ja suurennus kasvavat kojeen tarkkuusluokan mukaan, 20×-suurenuksesta 40×-suurenukseen. Myös vaaituslatta valitaan tarkkuusluokkaa vastaavasti, katso taulukko 4.2.

Vaaituskojeista kertoo **Tikka (1991)**, sivut 73–80.



#### 4.5 Mittauskaukoputki

*Mittauskaukoputki* on osana monessa optisessa geodeettisessa mittauskojeessa, kuten teodoliitissa, luku 5, ja vaaituskojeessa.

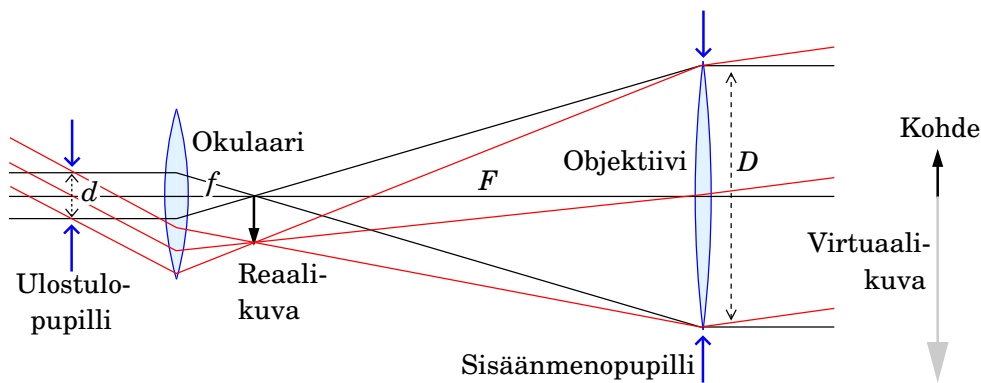
*Kaukoputki* on koje, joka esittää kaukaisen kohteen suurennettua ja antaa yksityiskohtaisempaa kuvaa. Yöllä käytettävät kaukoputket myös keräävät mahdollisimman paljon valoa himmeistä kohteista kirkkaan kuvan esittämiseksi.

Kuvan 4.7 kaukoputken objektiivin läpimitta, aukko eli *sisäänmenopupilli* on  $D$  ja polttoväli  $F$ . Käytetyn okulaarin polttoväli on  $f$ . Jos kohde on äärettömyydessä, objektiivi muodostaa sen reaalikuvan polttotasossa ja okulaari projisoi sen suurennettuna virtuaalikuvana äärettömyyteen. *Suurennus* on suhde  $\mu = F/f$ .

Kaikki kaukoputkesta lähtevä valo kulkee *ulostulopupillin* kautta, jonka läpimitta on  $d = D/\mu$ . Ulostulopupilli on okulaarin muodostama sisäänmenopupillin kuva. Esimerkiksi kiikareilla, joiden tunnusluvut ovat  $7 \times 50$ , on  $D = 50$  mm,  $\mu = 7 \times$  ja  $d \approx 7$  mm. Nuoret ihmiset, joiden pupillien







KUVA 4.7. Kaukoputki.

halkaisija yön aikana on 8mm, voivat laittaa silmänsä ulostulopupillien kohdalle ja käyttää hyödyksi kaikkea sisään tulevaa valoa.

Mittauskaukoputken tehtävät ovat

- antaa terävä kuva tähtäyskohteesta eli vaaituslatasta
- muodostaa tähtäysakseli sijoittamalla okulaarissa oleva hiusviivaristikko<sup>1</sup> kaukana olevan vaaituslatan kuvan päällä.

Molemmat tehtävät edellyttävät tarkkaa *fokusointia*, linssien liikettä kaukoputken akselia pitkin, tarkan kuvan aikaansaamiseksi sekä kohdeesta että hiusristikosta, kuva 4.8.

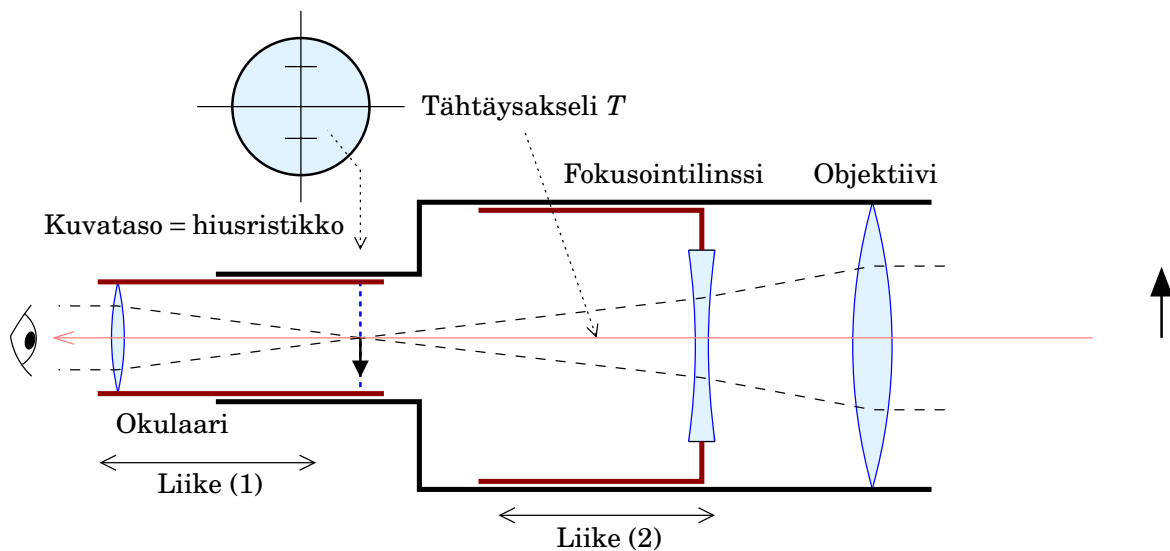
Fokusointi suoritetaan seuraavasti, tavallisesti kiertämällä kaukoputkeen kiinnitettyjä säätörenkaita tai -ruuveja:

- 1) Kierretään okulaaria siten, että hiusviivaristikon kuva näkyy terävänä.
- 2) Kierretään kojeen fokusointiosaa siten, että myös tähtäyskohteen kuva näkyy terävänä.

Tällöin objektiivin muodostama kohteen kuva, okulaarin<sup>2</sup> polttotaso ja hiusviivaristikon taso yhtyvät.

<sup>1</sup>Hiusviivaristikko on nykyisin tavallisesti lasilevyyn kaiverrettu kuvio. Vielä 1930-luvulla käytettiin hämähäkin pesäverkosta saatua lankaa! Katso [Bedini \(2005a,b\)](#). Hiusviivaristikon keksijänä pidetään astrometrikko William Gascoigne (1612–1644), joka havaitsi vahingossa hämähäkinseittien sopivuuden tähän tarkoitukseen. Hän kaatui Englannin sisällissodassa.

<sup>2</sup>Tämä pitää paikkansa vain, jos kohde on äärettömyydessä ja havaitsijan silmä on virheetön. Tarkemmin sanottuna okulaari + mittajaan mahdolliset silmälasit + hänen silmänsä oma, elävä optiikka projisoivat terävän kuvan hiusristikosta ja kohteen kuvasta verkkokalvolle.



KUVA 4.8. Mittauskaukoputki ja sen fokusointi. Tutkittava objekti on oikealla (hyvin kaukana!), havaitsijan silmä vasemmalla. Mittauskaukoputkea käytetään monessa optisessa geodeettisessa mittauskojeessa, kuten teodoliitissa, luku 5, ja vaaituskojeessa.

Vaaituksessa valitaan tavallisesti yhtä pitkät etäisyydet etu- ja taakse-  
lattoihin. Jos se ei ole mahdollista maaston vuoksi, on syytä joka kojease-  
malla ennen jokaista mittausta *fokusoida huolellisesti*. Ellei, voi syntyä  
*parallaksi*: kaukoputken optisen akselin näennäinen suunta riippuu ha-  
vaitsijan silmän asennosta okulaariin nähden. Havaitseminen huonosti  
fokusoidun putken kautta myös väsyttää silmää.

*On aina fokusoitava tarkasti!*

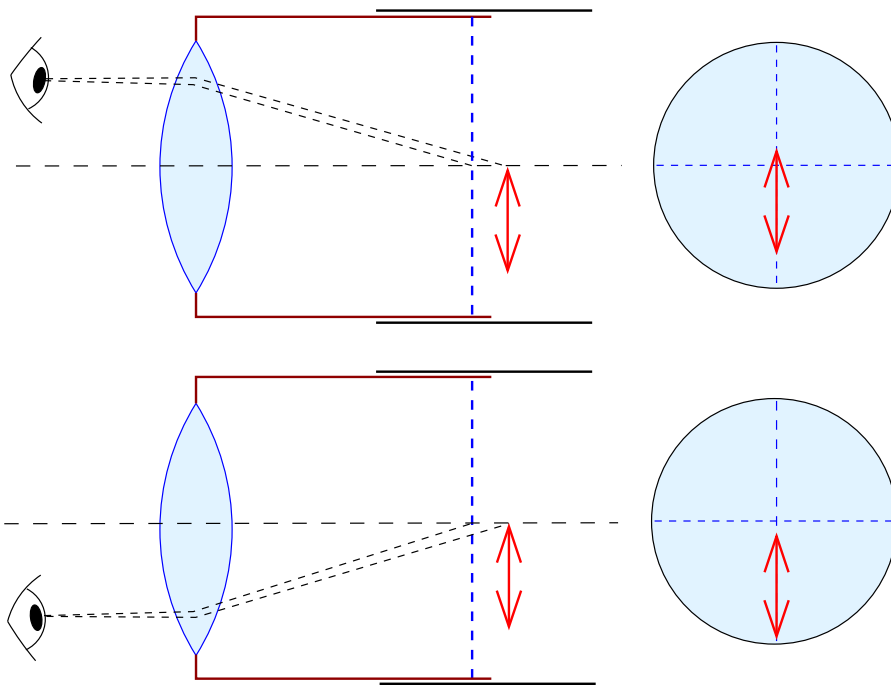
Silmälasit voi ottaa pois, jos ne ovat tavalliset eivätkä sylinteri- (astigma-  
<sup>3</sup> tismi) tai prismalasit<sup>3</sup> (piilokarsastus), koska liki- tai kaukonäköisyyden  
voi korjata okulaarin fokusoinnin avulla.



## 4.6 Putkitasain

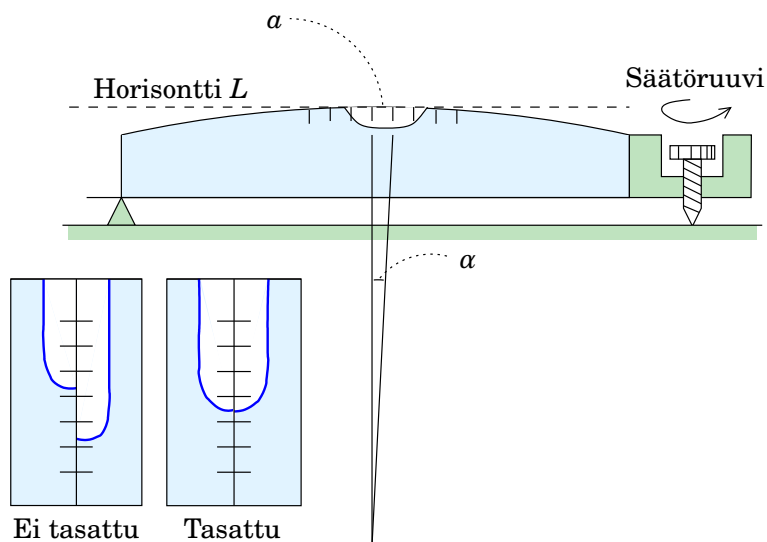
Putkitasaimen rakenne on selostettu kuvassa 4.10. Kuvassa näkyvää  
säätöruuvia käytetään vain kojeen säätämisessä, harvoin kentällä. Sen  
tarkoitus on saada tasaimen akseli eli *horisontti L* ja kaukoputken täh-  
täysakseli *T* (kuva 4.8) tarkasti samansuuntaisiksi. Tasaimen akseli on  
vaakasuorassa, kun kupla on keskellä, mikä on mittauksen edellytys.

<sup>3</sup>Prismalasit ovat relevantteja vain käytettäessä binokulaarisia kiikareita.

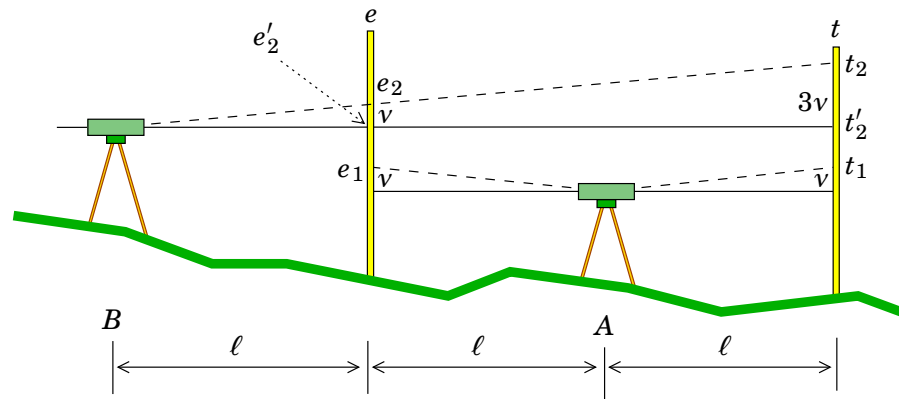


KUVA 4.9. Mittauskaukoputken parallaksi. Jos kuva ja hiusviivaristikko eivät ole samassa tasossa, aiheuttaa silmän liike okulaarin suhteen niiden keskinäisen siirtymisen.

Putkitasaimen tehtävä on auttaa havaitsijaa saamaan vaaituskojeen tähtäysakseli vaakatasolle, kohtisuoraan paikallista painovoimaa vastaan. Sen avulla tasataan koje mittaussuunnassa jokaisen mittausarvon



KUVA 4.10. Putkitasain. Ylhäällä rakenne, alhaalla vasemmalla kupla prismajärjestelmän kautta katsottuna kohdistustasaimessa. Kulma  $\alpha$  on osa-arvo.



KUVA 4.11. Kenttätarkistuksen geometria (Kukkamäen menetelmä).

lukemisen yhteydessä.

Etäisyys  $a$  on tasaimen jakoviivojen väli. Yleensä  $a \sim 2\text{ mm}$ . Tasaimen herkkyyttä ilmaisee kulma  $\alpha$  eli *osa-arvo*.

*Kohdistustasaimessa* saadaan heijastinprismajärjestelmän avulla kuplan vastakkaisten puolikkaiden kuvat näkymään vierekkäin, jolloin tasauksen tarkkuus paranee.



## 4.7 Vaaituskojeen tarkistus ja säätö



### 4.7.1 Kenttätarkistus

Tietäin välein on tarkistettava, että vaaituskojeen tähtäysakseli  $T$  on *samansuuntainen* tasaimen akselin eli horisontin  $L$  kanssa. Ympäristön vaikutuksesta jokainen koje ”elää” ja muuttuu esimerkiksi lämpötilan ja ilmanpaineen vaihtelujen sekä käsittelyn ja kulumisen seurauksena.

Tarkistus tehdään vaaitushavaintojen avulla (kenttätarkistus): mittauasetäisyydeksi  $\ell$  valitaan 25–50 m, riippuen sääoloista: mittaukset on paras suorittaa pilvisen sään aikana.

Tarkistusmenetelmä perustuu siihen, että keskipisteestä  $A$  mitattuna mittaustulos eli korkeusero on oikea, kun taas pisteestä  $B$  mitattuna mittaustulos sisältää virheen  $2v$ , jossa  $v$  on tähtäysakselin ja tasaimen horisontin välisen suuntaeron aiheuttama virhe latan kohdalla etäisyydellä  $\ell$ . Saadaan helposti

$$\Delta h_A = (t_1 - v) - (e_1 - v) = t_1 - e_1,$$

$$\Delta h_B = (t_2 - 3v) - (e_2 - v) = t_2 - e_2 - 2v.$$



Nämä korkeuserot ovat *samat*. Tästä ehdosta ratkaistaan  $v$ :

$$t_1 - e_1 = t_2 - e_2 - 2v \implies v = \frac{1}{2} ((t_2 - e_2) - (t_1 - e_1)).$$

Kuvassa näkyy, että

$$e'_2 = e_2 - v, \quad t'_2 = t_2 - 3v.$$

Nämä lukemat ovat nyt laskettavissa. Tämä mahdollistaa tähtäysakselin ja tasaimen horisontin välisen erisuuntaisuuden korjaamisen kentällä siihen tarkoitetun *säätöruuv*in avulla.



#### 4.7.2 Vaaituskojeen säätö

Kun kenttätarkistuksen tuloksena tiedetään, että lattalukema on  $v$ :n verran pielessä, menetellään kojeen säätämiseksi oikein näin:

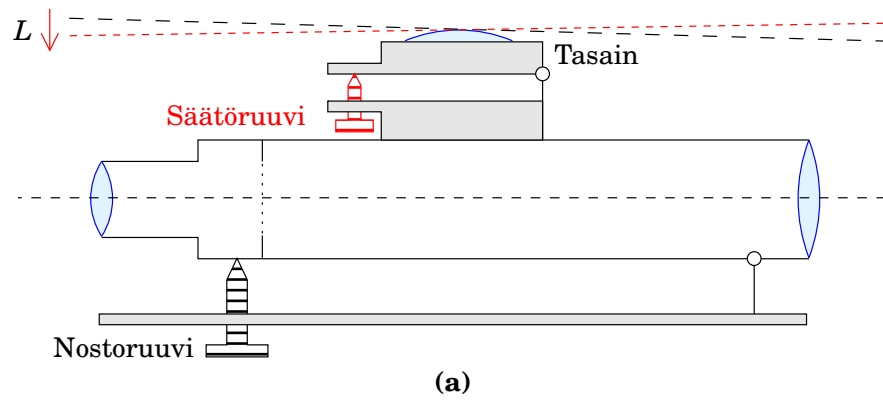
- Kojessa on *putkitasaimen* säätöruuvi, joka kallistaa tasaimen kaukoputken suhteen (kuva 4.12a). Kaukoputken ja putkitasaimen yhdistelmä on kiinnitetty runkoon *nostoruuv*in välityksellä.
  - 1) Tasataan koje ensin karkeasti jalkaruuvien, sitten tarkasti nostoruuvien avulla, koko ajan katsellen putkitasainta.
  - 2) Otetaan lattalukema  $e$ .
  - 3) Siirrytään *nostoruuv*in avulla lattalukemaan  $e' = e - v$ , jossa  $v$  on saatu kenttätarkistuksesta.

**Huom!** Jalkaruuvien käyttöä tulee *välttää*, koska silloin koje voi kallistua myös poikittaissuunnassa. Jalkaruuvithan eivät ole linjassa mittauskaukoputken tähtäysakselin kanssa. Niiden ainoa rooli on kojeen likimääräinen tasaus rasiatasaimen avulla.

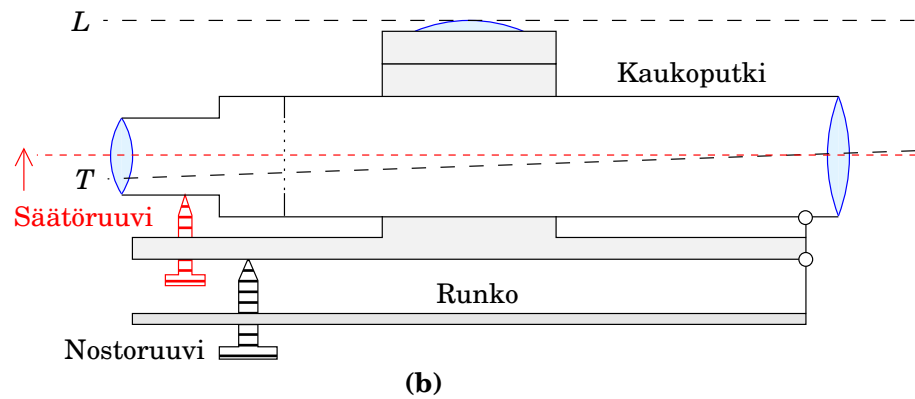
- 4) Nyt putkitasaimen kupla ei ole enää keskellä. Käytä tasaimen *säätöruuvia* saadaksesi kuplan keskelle. Sen jälkeen  $L \parallel T$ .
- Kojessa on *mittauskaukoputken* säätöruuvi: mittauskaukoputki kallistuu tasaimen suhteen (kuva 4.12b). Kaukoputken ja putkitasaimen yhdistelmä on taas kiinnitetty runkoon *nostoruuv*in välityksellä.

Samanarvoinen, suosittu tekninen ratkaisu on säätöruuvi, joka siirtää hiusviivaristikkolasia pystysuunnassa kuvatasossa (kuva 4.12c).

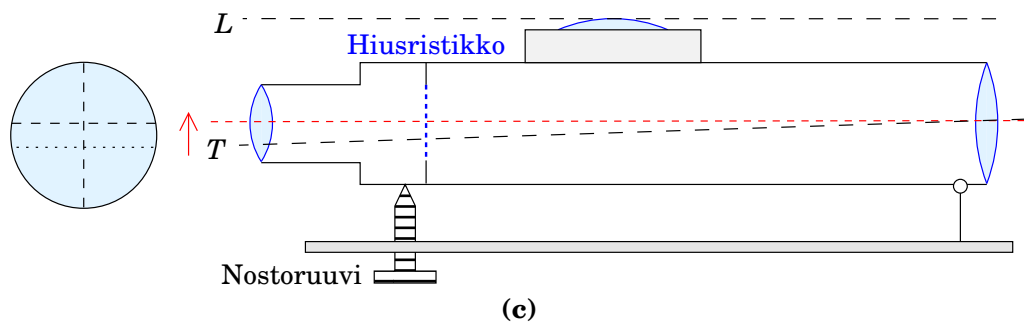




Kojeessa on putkitasaimen säätöruuvi



Kojeessa on kaukoputken säätöruuvi

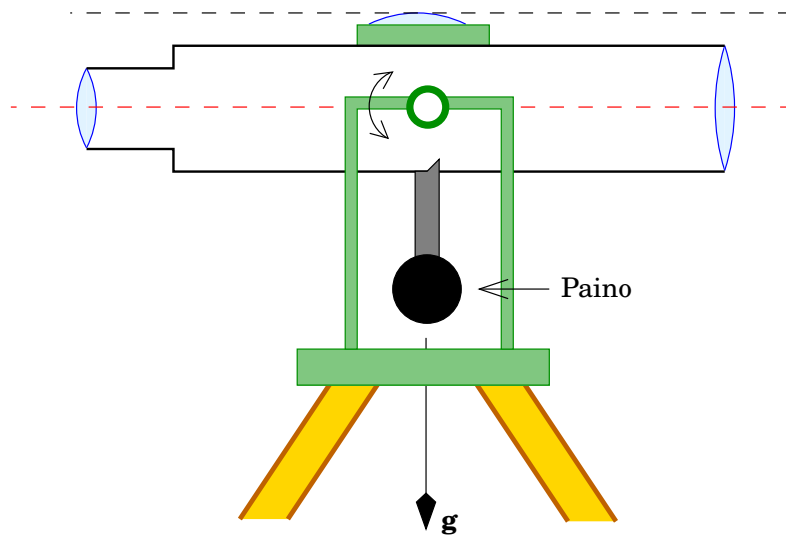


Kojeessa on hiusviivaristikon säätö



KUVA 4.12. Vaaituskojeen horisontin säätö.

- 1) Tasataan koje.
- 2) Otetaan lattalukema  $e$ .
- 3) Siirrytään kaukoputken (tai hiusviivaristikollasin) säätöruuvin avulla uuteen lattalukemaan  $e' = e - v$ .
- 4) Putkitasaimen kupla on edelleen keskellä!



KUVA 4.13. Vanhan itsetasaavan vaaituskojeen toimintaperiaate. Tällä tavoin rakennettu koje ei ole kovin käytännöllinen.



## 4.8 Itsetasaava koje

Itsetasaavat kojeet eli automaattivaaituskojeet käyttävät hyväkseen *painovoimaa* vaakasuuntaisen tähtäyksen saamiseksi.

Ensimmäiset mallit käyttivät painovoimaa koko mittauskaukoputken tasaamiseksi heiluriperiaatteen mukaan (kuva 4.13). On selvää, että sellaista kojetta on hankala käyttää kenttäolosuhteissa tuulen ja havait-sijan läheisyyden aiheuttamien häiriöiden vuoksi.

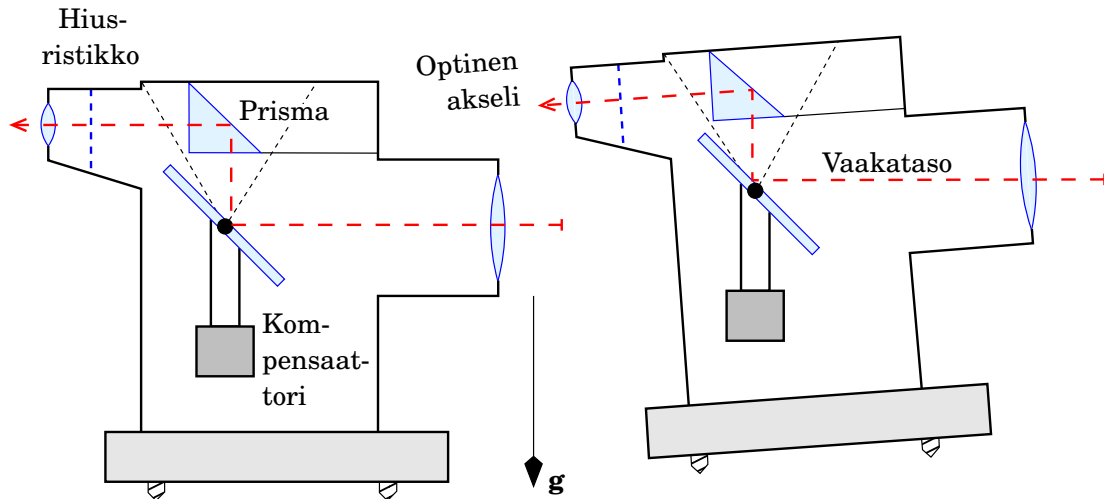
Nykykojeissa käytetään heilurina vain valonsädettä ohjaavaa prismaa tai peiliä. Se ripustetaan kaukoputken sisälle: kaukoputkeen rakenne-taan *heilurikompensoattori*. Toimiakseen kojeen on oltava jo likimäärin tasattu, esimerkiksi rasiatasaimen avulla.

Itsetasaavan vaaituskojeen periaate näkyy kuvasta 4.14.

Heilurikompensoattorin toimintaperiaate selitetään käsitteellisesti kuvassa 4.15, jossa säteen polku on taitettu auki. Kuva näyttää tilanteen mittauskaukoputken kiinnitetyssä koordinaatistossa.

Kaukoputken pieni kallistus pois vaakatasosta aiheuttaa sisään tu-levalle valonsäteelle kallistuksen  $\alpha$ . Jotta kohteen kuva kuitenkin jäisi samaan paikkaan kaukoputken kuvatasossa, taittaa kompensoattori valonsäteen kulman  $2\alpha$  verran, olettaen että objektiivin ja kompen-saattorin välinen etäisyys  $s$  on sama kuin kompensoattorin ja kuvatason välinen etäisyys, toisin sanoen, kompensoattori on juuri niiden keskel-lä. Vapaasti riippuva peili kääntyy kaukoputken suhteen määrällä  $\alpha$  ja valon heijastussuunta muuttuu määrällä  $2\alpha$ , juuri kuten oli tarkoitus.





KUVA 4.14. Nykyaikainen itsetasaava vaaituskoje.

Katso [Kahmen ja Faig \(1988\)](#) sivut 334–336.

Kompensaattorikojeiden vahvuutena on niiden käyttömukavuus. Kuitenkin alussa esiintyi teknisiä ongelmia, kuten peilin ripustuksen magneettisuus ([Kukkamäki ja Lehmuskoski, 1984](#)). Nämä ongelmat lienevät jo ratkaistu.

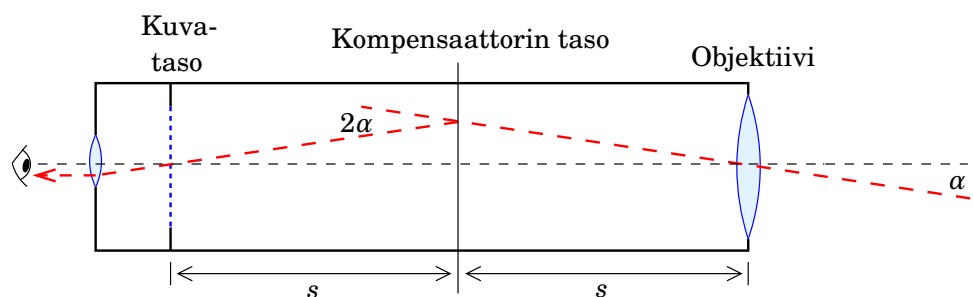


#### 4.9 Digitaalivaaituskoje

Nykyisin käytetään yleisesti digitaalivaaituskojeita, koska niiden tuoma mittauksen automatisointi säästää kustannuksia. Mittaukset tallennetaan suoraan kojeen muistiin ja tarvittavat tarkistukset tehdään heti.

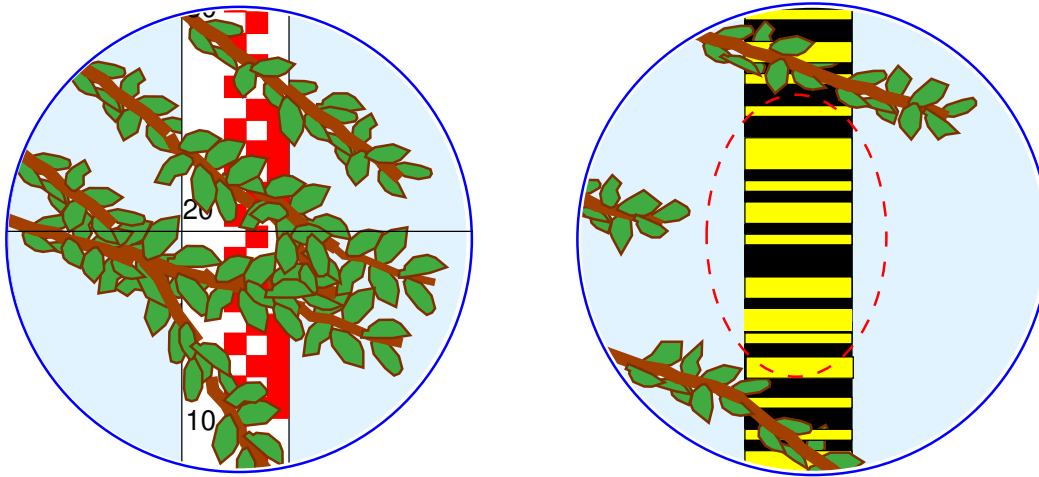
Digitaalivaaituskojeen kanssa käytetyn latan *viivakoodi* on ainakin periaatteessa samanlainen kuin kauppataavaroiden viivakoodi. Korkeusarvoa voidaan lukea koneellisesti kojeen CCD-ilmaisimen ja prosessorijärjestelmän avulla. Sivutuloksena saadaan karkea etäisyys eli tähtäysväli, ja varoitusmerkki, jos eteen ja taakse -välit eroavat toisistaan liikaa.

Toisin kuin perinteinen vaaituslatta, jolla mittaus kohdistuu korkein-



KUVA 4.15. Heilurikompensaattorin toimintaperiaate.





KUVA 4.16. Perinteinen vaaituslatta on mahdollista lukea, vaikka se olisi oksien peitossa. Viivakoodilatta on häiriöalttiimpi.

taan kahteen viivan reunaan, käytetään digitaalilatasta eli viivakoodilatasta aina *kokonaista aluetta*, kooltaan 30cm Zeiss (Trimble) DiNi12-kojeen tapauksessa. Tästä on sekä etuja että haittoja.

**Etu** Mittauksessa käytetään jonkinlaista usean lattaviivan reunan keskiarvoa. Siksi viivojen valmistustarkkuus ja latan kalibrointitarkkuus ovat vähemmän kriittisiä. Latat kestävät kulumista käyttökelpoisina kauemmin.

#### Haitat

- Koko käytettävän lattavälin on oltava näkyvissä. Metsäisillä alueilla tämä voi aiheuttaa ongelmia.
- Kalibrointi on aina tehtävä *järjestelmäkalibrointina*: koje ja latat kalibroidaan ”mustana laatikkona”, yhdessä. Toisaalta lattaviivakalibrointia ja järjestelmäkalibrointia yhdistämällä voidaan rekonstruoida, miten koje painottaa käyttämänsä viivat, ja näin saada musta laatikko raolleen.

Digitaalinen vaaitusmenetelmä on laajassa käytössä jopa tarkkavaaituksessa, ja teknologia on ollut myös aktiivisen tutkimuksen aiheena (Takalo *ym.*, 2001; Takalo ja Rouhiainen, 2004).



## 4.10 Vaaituslatta

*Vaaituslatta* on metrinen asteikko, jolla korkeuserot kahden pisteen välillä mitataan vaaituskojeen avulla. Asteikon jaotukselle löytyy monta



vaihtoehtoa, kuva 4.17:

**E-jaotus** Kaiken yksinkertaisinta. E-jaotuksen heikkous on, että kirkas valkoinen pikkuneliö näyttää hieman suuremmalta kuin tumma punainen pikkuneliö — Helmholtzin<sup>4</sup> kirkkausharha. Kun millimetrit interpoloidaan visuaalisesti, syntyy helposti pientä systematiikkaa.

**Shakkilautajaotus** Tässä yllä mainittu heikkous on korjattu.

**Viivajaotus** Käytetään tarkkavaaituslatoissa. Viivojen jakoväli on 10 tai 5 mm.

Tarkkavaaituskojeessa on *optinen vaaitusmikrometri*, jolla saavutetaan suurempi tarkkuus kuin silmämääräisesti jakoviivoja interpoloimalla olisi mahdollista. Mikrometri mittauskaukoputken objektiivin edessä sisältää kierrettävän lasilevyn, jonka avulla saadaan hiusristikon vaakaviiva latan erään jakoviivan päälle. Jakoviivan lukuarvo antaa karkean lukeman, mikrometrilevyn kiertoasteikko täydentää sen tarkaksi lukemaksi.

**Viivakoodijaotus** Digitaalisten vaaituskojeiden kanssa käytettäväksi.

Latat on usein valmistettu puusta, paremmat alumiinista. Tarkkavaaituksessa käytetään ”invarlattaa”, jossa jaotusviivat on maalattu invarnauhaan, joka on jousen<sup>5</sup> avulla kiinnitetty puu- tai alumiiniseoskehikkoon. Tarkkavaaituslatassa käytetään puolen senttimetrin jaotusta — ”lattayksikkö” (l.y.) on 5 mm. Latassa on kaksi jaotusta hieman siirrettyinä toisiinsa nähden, lukukontrollia varten ja lukuvirheiden satunnaistamiseksi. Joskus jaotukset ovat latan eri puolella: ”kääntölatta”.

Hienompaan vaaituslattaan on aina kiinnitetty *rasiatasain*. Latan on oltava tarkasti pystysuunnassa, kun sitä luetaan!

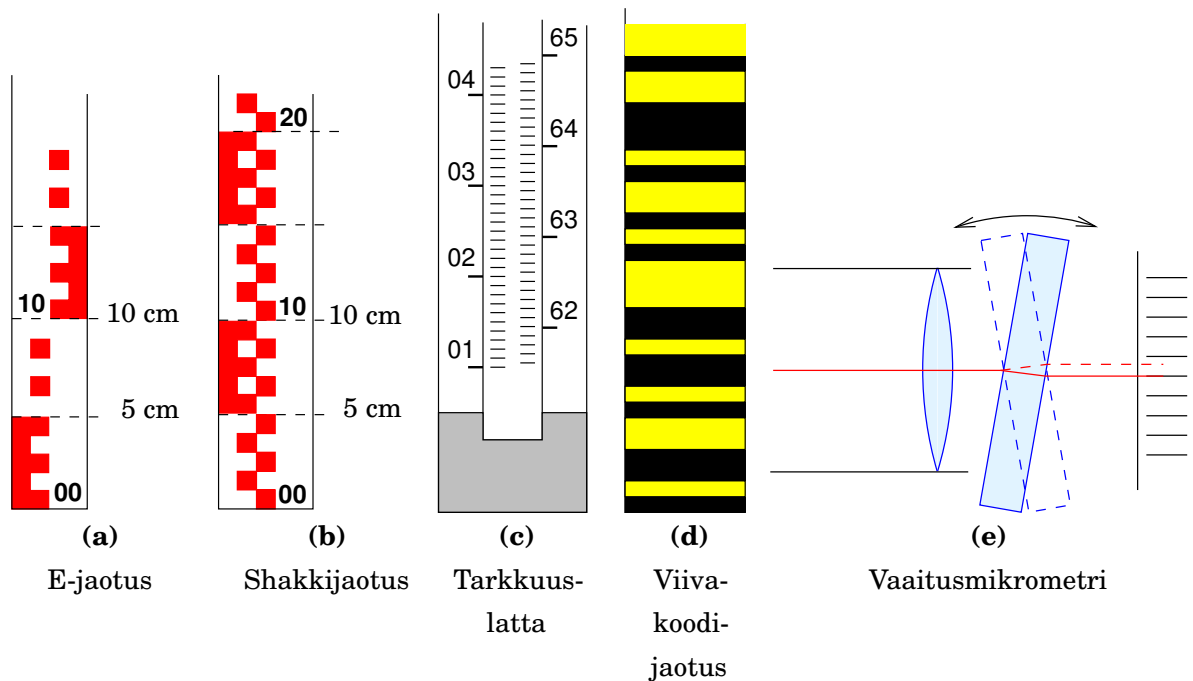
Latat luokitellaan käyttötarkoituksen mukaan, katso taulukko 4.2, joka on laadittu Keski-Euroopan käytännön mukaan.

*Itselaskevalla* latalla eli pintavaaituslatalla on seuraavat ominaisuudet, katso kuva 4.21:

- Jaotus kasvaa ylhäältä alas.

<sup>4</sup>Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) oli saksalainen lääkäri ja fyysikko sekä näön tutkija.

<sup>5</sup>Jousen voima tunnetaan — 200 N — ja sen vaikutus invarnauhan pituuteen voidaan laskea. Invarin lämpölaajenemiskerroin on lähellä nollaa, ja metalli, toisin kuin puu, ei ole herkkä kosteudelle.

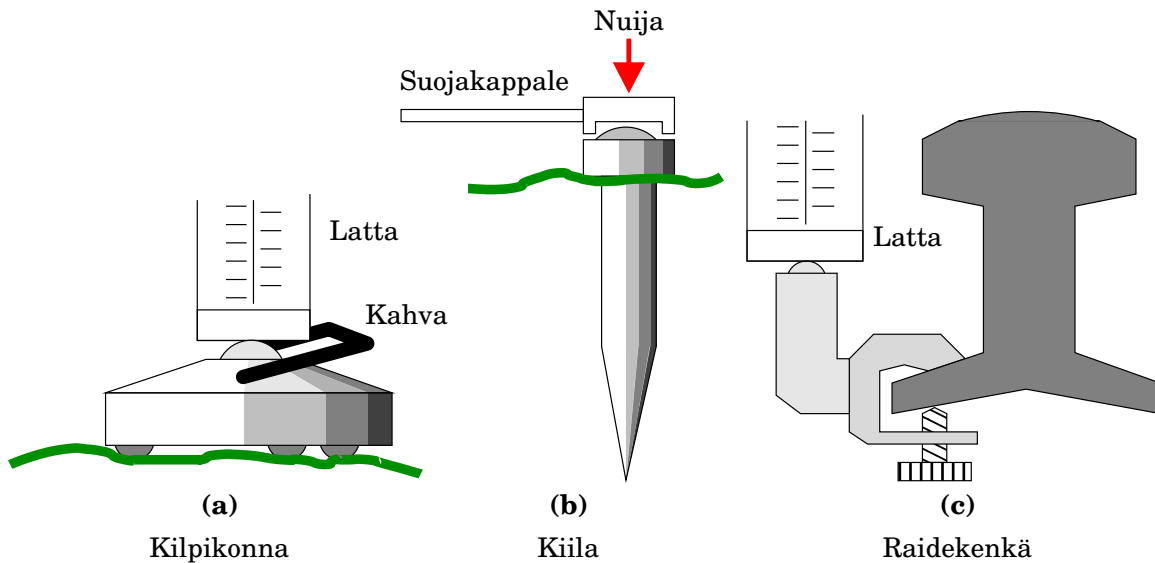


KUVA 4.17. Latta-asteikon jaotusvaihtoehtoja: E-jaotus, shakkilautajaotus, tarkkuuslatta, viivakoodijaotus. Oikealla objektiivin eteen laitettava optinen vaaitusmikrometri.

- Alapäässä on aseteltava jalka, joka voidaan vetää ulos tunnetulla pisteellä, jotta saadaan oikea metrin osa-arvo näkyviin. Sen jälkeen lähdetään maastoon kartoittamaan pisteiden korkeuksia. Katso

TAULUKKO 4.2. Vaaituslattojen luokitus.

Lattatyyppi	Pituus (m)	Muu
Yksinkertainen	3–5	Kokoontaitettava tai -työnnettävä, puusta tai alumiinista, 2–4-osainen, E-jaotus
Runkomittauslatta. Saksaksi <i>Zweiskalenlatte</i>	3	Jäykkä, puusta tehty, shakkilauta- tai viivajaoitus, kaksoisjaotus- tai kääntölatta, rasiatasain
Tarkkavaaituslatta	3	Puu- tai alumiinirunko ja invarnauha, jossa kaksoisjaotus
Viivakoodilatta	3	Alumiini, invarnauha. Käytetään digitaalivaaituskojeen kanssa
Teollisuuslatta		Kaksiasteikkoinen erittäin tarkka viivalatta
Itselaskeva latta		Katso alaosio 4.11.2



KUVA 4.18. Vaaituksen väliaikaisia latanalustoja: kilpikonna, kiila, raidekenkä.

**Tikka (1991, sivu 81).**

Tarkkuutta vaativassa työssä käytettävät latat tulisi kalibroida säännöllisesti, ainakin ennen ja jälkeen kenttäkautta. Digitaaliset vaaituskojeet ja niiden käyttämät viivakoodilatat tulisi kalibroida *järjestelmänä*.

Sopiviksi *latanalustoiksi* kelpaavat kiintopisteen lisäksi väliaikaiset maahan nuijatut puukepit ja vastaavat. Vakiintuneita latanalustoja on piirretty kuvassa 4.18. Kiilaa käytetään kun maaperä on pehmeä; kilpikonaa käytetään kovalla pinnalla. Raidekenkää käytetään rautatievaaituksen yhteydessä. Se voidaan jättää paikalleen kun juna kiittää ohi. Ensimmäisen ja toisen tarkkavaaituksen aikana monet vaaituslinjat kulkivat rautateitä pitkin, sittemmin on vaaittu enenevässä määrin valtateitä pitkin.

Vaaituslatoista **Tikka (1991)** sivut 80–82.

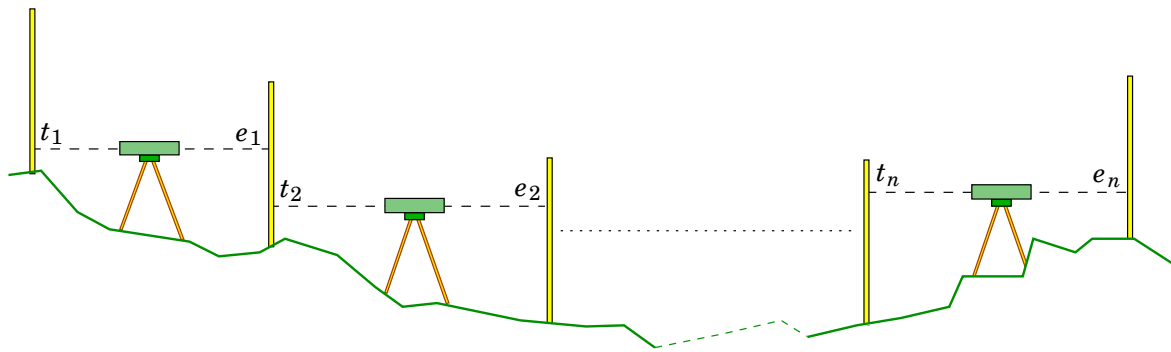


## 4.11 Vaaitusmenetelmät



### 4.11.1 Linjavaaitus

Linja- eli jonovaaitusmenetelmää käytetään runkomittauksessa. Sen tarkoitus on tuoda virallinen korkeusjärjestelmä valtakunnan kaikkien käyttäjien lähelle, esimerkiksi kartoitusmittausten vertaustasoksi.



KUVA 4.19. Linjavaaitus.

*Tarkkavaaitusverkko* on valtakunnallinen korkeusrunko. Se toteutetaan hierarkkisesti verkon vaiheittaisena tihennyksenä, osio 8.3.

Korkeudet lasketaan käyttäjäkuntaa varten valtakunnallisessa korkeusjärjestelmässä. Suomen kolmannen eli viimeisen tarkkavaaituksen korkeudet laskettiin vielä N60-järjestelmään, nykyisin valtakunnallinen korkeusjärjestelmä on N2000. Kaikki vaaitusverkon laskennat suoritetaan kuitenkin ensin *geopotentialiluvuissa*, joista lasketaan joko ortometrisia korkeuksia (N60) tai normaalikorkeuksia (N2000).

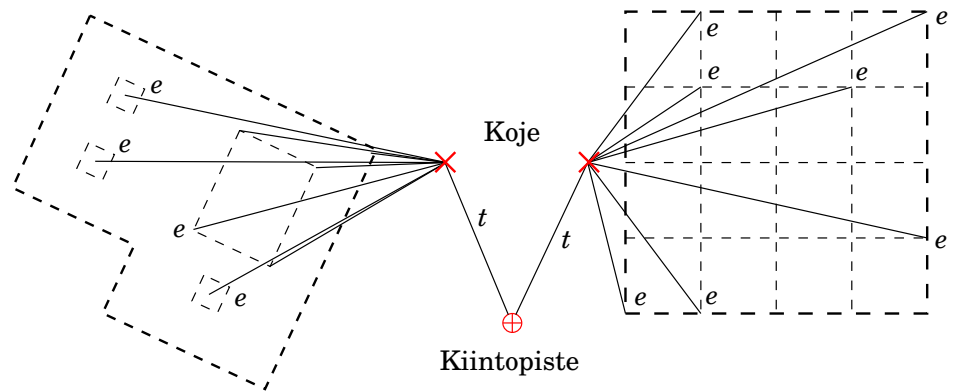
Linjavaaitus tapahtuu peräkkäisten kojeasemien mittauksia (kuva 4.19) summaamalla korkeuseroksi<sup>6</sup>:

6

$$\Delta H = (t_1 - e_1) + (t_2 - e_2) + \dots + (t_n - e_n) = \sum_{i=1}^n (t_i - e_i).$$

- Linja kulkee tunnetulta pisteeltä tunnetulle pisteelle. Joskus tämä on mahdotonta, ja silloin puhutaan ”piikistä”. Tässä tapauksessa mitataan huolellisesti edestakaisin: *kontrolli*.
- Hyvin suunniteltu vaaitusverkko sisällyttää kaikki mittaukset ja pisteet sulkeutuviin silmukoihin: *kontrolli*.
- Sää- ja kojevirheiden minimoimiseksi valitaan tähtäysvälit eteen ja taakse mahdollisimman samanpituisiksi:  $\ell_{\text{taakse}} \approx \ell_{\text{eteen}}$ . Tähtäysvälit eivät saa myöskään olla liian pitkiä: esimerkiksi tarkkavaaituksessa 50 m, kuitenkin riippuen sääolosuhteista. Pilvisellä säällä voi käyttää pidempiä tähtäysvälejä; aurinkoisen sään vahvan väreilyn aikana tähtäysvälit on lyhennettävä (Kääriäinen, 1966).
- Jos vaaituslinja kulkee rauta- tai valtatieä pitkin, pitää *turvallisuusjärjestelyjen* olla kunnossa.

<sup>6</sup>Kaava on eksakti vain pienellä alueella, jossa painovoima on vakio. Katso osio 4.1.



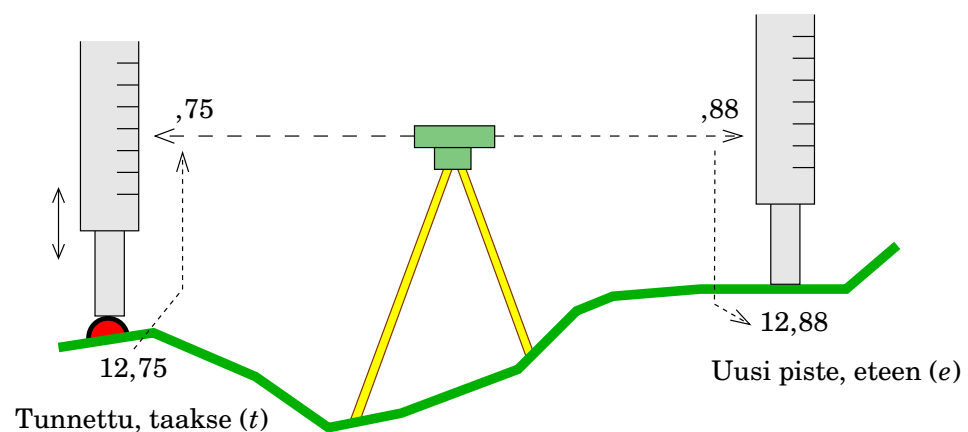
KUVA 4.20. Pintavaaitus. Yksi taaksepäin ( $t$ ) -havainto, monta eteenpäin ( $e$ ) -havaintoa.



#### 4.11.2 Pintavaaitus

Pintavaaitus on selostettu kuvassa 4.20. Tällä menetelmällä kartoitetaan kokonaisen alueen korkeustilanne käyttämällä yhtä tunnettua lähtöpistettä. Mitattavien pisteiden joukossa on oltava myös vähintään toinen tunnettu piste: *kontrolli*.

Pintavaaitus on kuin luotu *itselaskevan vaaituslatan* käyttöön, katso kuva 4.21. Lähtöpisteessä vedetään latan jalka ulos, kunnes vaaituskojeessa näkyy oikea metrin desimaaliosa: jos pisteen korkeudeksi tiedetään 12,75 m, vedetään jalka ulos kunnes havaitsija näkee kaukoputkessaan luvun  $\langle n \rangle,750$ , jossa  $\langle n \rangle$  on kokonaisten metrien lukumäärä. Jalka ruuvataan kiinni ja latta siirretään ensimmäiselle havaintopisteelle. Havaitsijan tulee hoitaa kokonaiset metrit: murto-osat näkyvät suoraan kaukoputkessa.



KUVA 4.21. Itselaskeva vaaituslatta. Miten lattajalka asetetaan oikeaan pituuteen.



Pintavaaituksen tuloksia tarvitaan ja käytetään

- rakennustyömaan korkeustilanteen kartoituksessa ennen perustusten rakentamisen aloittamista
- digitaalisten maastomallien luomiseksi paikallisesti ja korkealla erotuskvyyllä
- siirrettävien maamassojen määrän laskemiseksi.

Jotta pintavaaituksesta olisi hyötyä, pitää mitattujen pisteiden likimääräinen tasosijainti olla määritettynä jollain muulla tavoin.

Kunnon *kontrolli* on tärkeä: lähtöpisteen lisäksi olisi mittauksessa otettava mukaan muitakin korkeuksiltaan tunnettuja pisteitä. Väärä lähtökorkeus siirtyisi sellaisenaan koko alueelle, mikä olisi esimerkiksi viemäröinnin kannalta kohtalokas ja kallis virhe.



### 4.11.3 Tekninen vaaitus

**Asennusmittaus** teollisuudessa ja rakennustyömailla kuuluu *insinöörigeodesian* alaan.

- Ääritapaus: CERNin hiukkastörmäytin LHC Genevessä, ympärysmitta 27 km, tarkkuus millimetrien luokkaa (Schrock, 2014).
- Paperikoneet, telakat.
- Tierakentaminen, sillat, tunnelit, rautatiet.

**Muodonmuutosten mittaus ja seuranta** Vaaitus on tähän tarkoitukseen vain yksi monesta menetelmästä: muodonmuutokset eli deformaatiot ovat tavallisesti kolmiulotteisia. Katso osio 18.1.

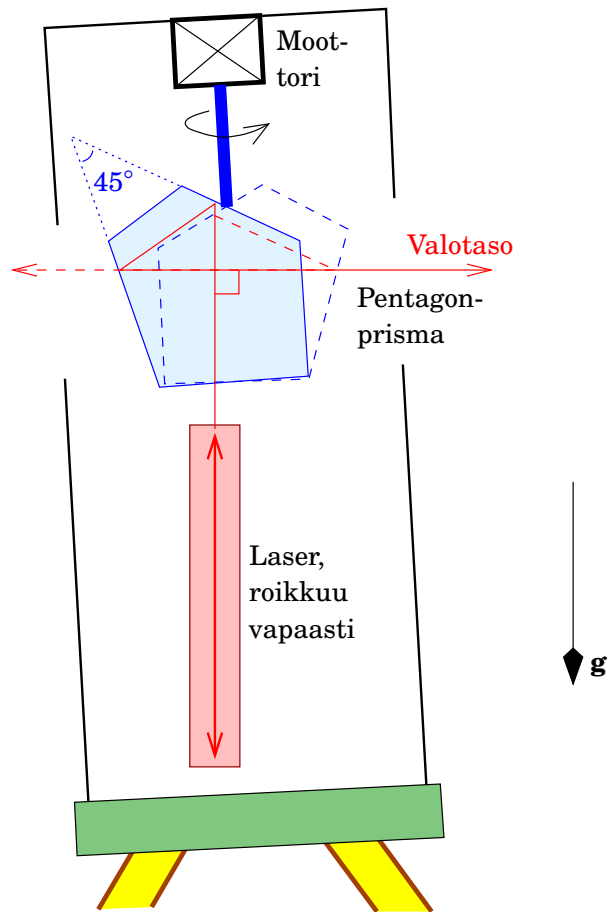
- Ääritapaus: postglasiaalinen maannousu.
- Maakaasun, öljyn tai juoma- tai kasteluveden pumppaamisen aiheuttamat muodonmuutokset, antropogeeninen maan vajoaminen, esimerkkinä Venetsia.
- Patojen, vesialtaiden, siltojen, korkeiden teräsrakenteiden deformaatiot.
- Vanhoja rakennuksia ja arkeologisia kohteita, Pisan torni ja Vasa-laiva (Vasamuseet, Rörelsemätningar).



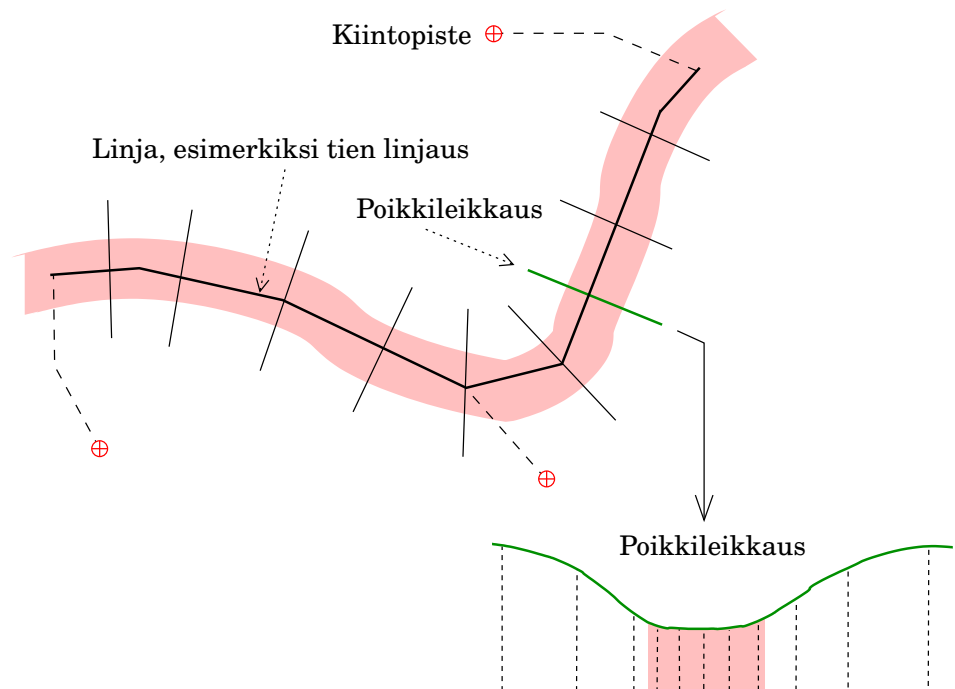
### 4.11.4 Profiilien ja poikkileikkausten vaaitus

Profileja ja poikkileikkauksia mitataan rakennustöiden, erityisesti tie-, rautatie- tai kanavarakennustöiden yhteydessä.





KUVA 4.22. Lasertason toimintaperiaate.



KUVA 4.23. Profili ja poikkileikkauksia.



**Profilili** on maanpinnan pitkittäisleikkaus tiettyä reittiä, yleensä suunniteltua tietä, rautatietä tai vesiväylää<sup>7</sup> pitkin.

Työ alkaa merkitsemällä reitti maastoon. Merkit laitetaan 25, 50 tai 100 metrin välein, sekä maaston taitekohtiin. Merkit numeroidaan: numerolaput laitetaan sivulle työmaasta. Korkeudet mitataan rakennusvaaituskojeella.

Sidosmittauksia alueen korkeusrungon kiintopisteisiin tehdään vähintään kaksi, alku- ja päätepisteen kohdalla. Jos kahden kiintopisteen käyttö ei ole mahdollista, on tarkistuksen vuoksi suljettava silmukka eli mitattava edestakaisin. Sulkuvirheet jaetaan vaaittujen matkojen suhteessa.

**Poikkileikkaus** on maanpinnan poikkittäisleikkaus, kohtisuorassa profililinjaa vasten. Taitekohdissa jaetaan kulma tasan. Poikkileikkaukset ovat tyypillisesti 20–50 m pitkiä. Poikkileikkausten tarkoitus on antaa tukea suunnittelutyölle ja mahdollistaa siirrettävien maamassojen määrän laskeminen. Poikkileikkausten korkeusmittaus suoritetaan pintavaaituksen tavoin. Pisteiden tiheys valitaan maaston ja käyttötarkoituksen mukaan.



#### 4.11.5 Lasertaso

Pintavaaitukseen käytetään usein *lasertasoa*, kuva 4.22. Lasertasot ovat heilurikompensoittoristabiloituja kojeita, joissa laservaloa heitetään pyörivän *pentagonprisman*<sup>8</sup> kautta ympäristöön muodostamaan vaakatasoa.

Kojeet ovat käteviä rakennustyömailla, jossa ne realisoivat vaakatason, jonka käyttäjä voi saada näkyviin kepin avulla. Hiekan levittäminen, lattian asennus tai seinän muuraaminen suoraksi helpottuvat. Sopivalla, liikutettavalla vastaanotinlaitteella varustettu latta antaa suoraan sen alla olevan pisteen korkeusarvon.

Lasertaso voidaan tavallisesti myös saada tuottamaan laservalosta tehty *pystytaso*. Tämäkin on rakennustyömaalla usein arvokasta.



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on ortometristen korkeuksien vertauspinta?

<sup>7</sup>Tässä tapauksessa käytetään rinnakkaislinjaa.

<sup>8</sup>Prisman sisällä on kaksi heijastavaa pintaa, joiden välinen kulma on 45°. Kulma sisään menevän ja ulos tulevan säteen välillä on näin aina 90° eli 100°.



KUVA 4.24. Metsähovin tutkimusasema ilmasta. Google Maps™. Googlen käyttöehtojen mukaisesti. Kuvat © 2019 Google, © 2019 Maxar Technologies. Karttatiedot © 2019 Google.



- 2) Mikä on geoidipinnan ja luotiviivan poikkeamien välinen suhde?
- 3) Miten vaaituskojeen (tai teodoliitin) *tähtäysakseli* on määritelty?
- 4) Miten fokusoidaan mittauskaukoputki?
- 5) Mikä on parallaksi, ja miten se vältetään?
- 6) Mitä jaotusvaihtoehtoja on olemassa vaaituslatoille?
- 7) Nimeä kolme standardivaaituslatanalustaa.
- 8) Mikä on vaaituksessa lattamiehen eli latan pitäjän rooli?
- 9) Kuvaile Kukkamäen vaaituskojeen kenttätarkistusmenetelmä. Mikä on tarkistuksen tarkoitus?
- 10) Selosta, miten automaattinen eli itsetasaava vaaituskoje toimii. Piirrä kuva!
- 11) Kuvaile, miten lasertaso toimii.



#### Harjoitus 4–1: Korkeuksia

Aiemmin annettiin Metsähovin tutkimusaseman GPS-antennin maantieteelliset eli geodeettiset koordinaatit (GRS80-vertausellipsoidilla), yhtälö 2.5:

$$\varphi = 60^{\circ} 13' 2'', 89046, \quad \lambda = 24^{\circ} 23' 43'', 13336, \quad h = 94,568 \text{ m.} \quad (2.5)$$



- 1) Käytä UNAVCON verkkosivun geoidimallia (UNAVCO, EGM96 geoid calculator), jonka tarkkuus on  $\pm 25$  cm Suomen alueella, määrittääkseen geoidikorkeus  $N$  Metsähovin kohdalla. Vaihtoehtoisesti käytä Karney, joka antaa myös uudempaa mallia EGM2008.
- 2) Laske korkeus  $H$  ”merenpinnan yläpuolella” mallin EGM96 mukaan. Tarvitsemasi yhtälö löytyy kuvasta 4.3.
- 3) Ilmasta nähtynä Metsähovin tutkimusasema on kuvan 4.24 näköinen. GNSS-antenni METS on kiinnitetty korkean teräsverkkomaston huippuun kuvan oikealla puolella.

Pääkiintopisteen PP2000, kuva 3.16, korkeus N2000-järjestelmässä, siis merenpinnan yläpuolella, on 54,4233 m. Oleta, että tämä on myös maaston likikorkeus teräsverkkomaston lähellä,  $\pm 1$  m.

*Kysymys:* kuinka korkea on teräsverkkomasto?

- 4) Käytä Google Mapsiä ja mittaa maston jalan leveys- ja pituusaste. Vertaa yllä olevien leveys- ja pituusarvojen kanssa. Kuinka suuret ovat erot? Analysoi tulos.





# Teodoliitti



Our money's all spent, to the deuce it went!  
The landlord, he looks glum,  
On the tap-room wall, in a very bad scrawl,  
He has chalked to us a sum.  
But a glass we'll take, ere the grey dawn break,  
And then saddle up and away —  
Theodolite-tum, theodolite-ti, theodolite-too-ral-ay.

---

Kansanlaulusta ”*The Old Survey*”, noin 1905 ([The Institute of Australian Culture, 2012](#))

TEODOLIITIN KEKSI LUULTAVASTI englantilainen Leonard Digges. Keksin­nön julkaisi hänen poikansa Thomas maanmittausoppikirjassaan *Pan-tometria* vuonna 1571. Nimen alkuperä on epäselvä. Ensimmäisillä teodoliiteilla ei ollut kaukoputkea, jonka mahdollisesti keksi — oikeammin, yritti patentoida — vasta vuonna 1608 Hans Lippershey Alankomaissa.

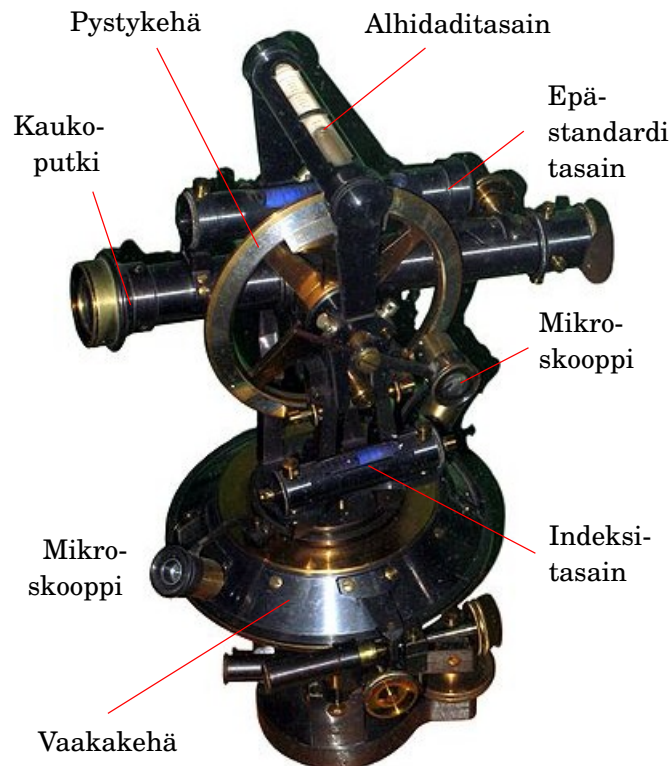
Teodoliitti on kulmamittausskoje, joka mittaa *vaaka- ja pystykulmia* paikallisen horisonttitason (vaakatasen) ja luotiviivan (painovoiman suunnan) suhteen. Nykykojeet, elektroniset takymetrit, osaavat myös mitata etäisyyksiä. Tässä niitä kaikkia kutsutaan ”teodoliiteiksi”.



## 5.1 Vaakakulmat ja zeniittikulmat

Teodoliittimittaukset tehdään aina Maan painovoimakentässä. Teodoliitin pystyakseli tasataan paikallisen luotiviivan suuntaiseksi. Suunnat ja suuntaerot voidaan luonnollisissa kojekoordinaateissa ilmaista vaaka- ja pystykulmina.

Olkoon (kuva 5.2) kojeesta katsottuna pisteiden *A* ja *B* välillä suuntaero. Pisteet projisoidaan luotiviivaa pitkin kojeen paikalliselle vaaka-



KUVA 5.1. Vanhanaikainen teodoliitti. Huomaa ulkoiset vaaka- ja pystykehät sekä lukemamikroskoopit. Pohjakuva [Wikimedia Commons, Exploration theodolite](#).



tasolle, tuloksena pisteet  $A'$  ja  $B'$ . Pisteiden  $A'$  ja  $B'$  välinen suuntaero, kulma  $\alpha$ , on pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen *vaakakulma*. Sekä vaakasuunnat että vaakakulmat lasketaan positiivisiksi myötäpäivään.

Kulmat  $\zeta_A$  ja  $\zeta_B$  ovat pisteiden  $A$  ja  $B$  pysty- eli *zeniittikulmat*.

**Vaakakulma** Säteiden  $OA$  ja  $OB$  projektioiden  $OA'$  ja  $OB'$  muodostama kulma  $\alpha$  vaakatasossa.

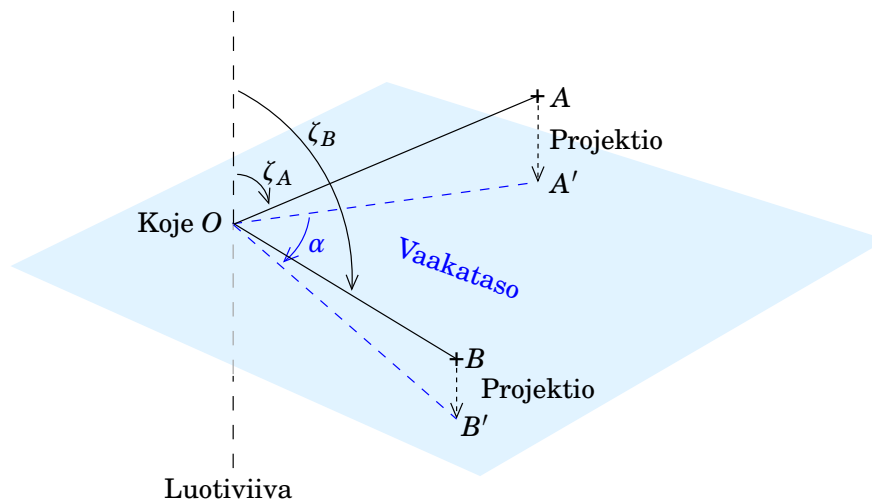
**Zeniittikulma** Luotiviivan ja säteen  $OA$  ( $\zeta_A$ ) tai  $OB$  ( $\zeta_B$ ) muodostama kulma. Zeniittikulma on aina positiivinen.

*Luotiviiva* eli vertikaali, vapaasti riippuvan luotinarun suunta, on Maan painovoimavektorin paikallinen suunta. Luotiviiva osoittaa Maan massakeskipisteeseen, mutta *vain likimäärin*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Likimäärin, pääasiallisesti koska Maa on pyörähdysellipsoidi eikä pallo. Litistyneisyyden aiheuttama luotiviivan suunnan poikkeama Maan massakeskipisteen suunnasta on suurimmillaan jopa  $11'$  leveysasteella  $\pm 45^\circ$ .

Luotiviiva on myös erittäin lievästi kaareva. Tämän lisäksi on olemassa paikallisia,





KUVA 5.2. Vaakakulma ja zeniittikulma.



## 5.2 Teodoliitin akselit

Teodoliitilla on *kolme akselia*, kuva 5.3:

- pystyakseli (engl. *standing axis*). Pystyakselin on oltava paikallisen luotiviivan eli painovoimavektorin suuntainen
- vaaka-akseli (engl. *trunnion axis*), jonka ympäri kaukoputki kääntyy
- tähtäysakseli eli kollimaatioakseli (ruots. *siktaxel*), mittauskaukoputken akseli, joka kulkee okulaarin hiusviivaristikon läpi.

Teodoliitilla on kaksi *kehää*, vaaka- ja pystykehä, kuva 5.3.

Teoreettinen tavoite hyvin säädetylle teodoliitille:

- $V$ ,  $P$  ja  $T$  leikkaavat samassa pisteessä.
- $P \perp V$ . Ellei, virhettä kutsutaan *tappikaltevuudeksi* (ruots. *horisontalaxelns lutning*, engl. *trunnion-axis tilt*).
- $T \perp V$  (muttei  $T \perp P$ ! Miksei?). Virhettä kutsutaan *kollimaatiovirheeksi*.
- $V$  ja  $P$  kulkevat pysty- ja vaakakehän keskipisteiden kautta. Ellei, puhutaan *jakokehän epäkeskisyydestä*.

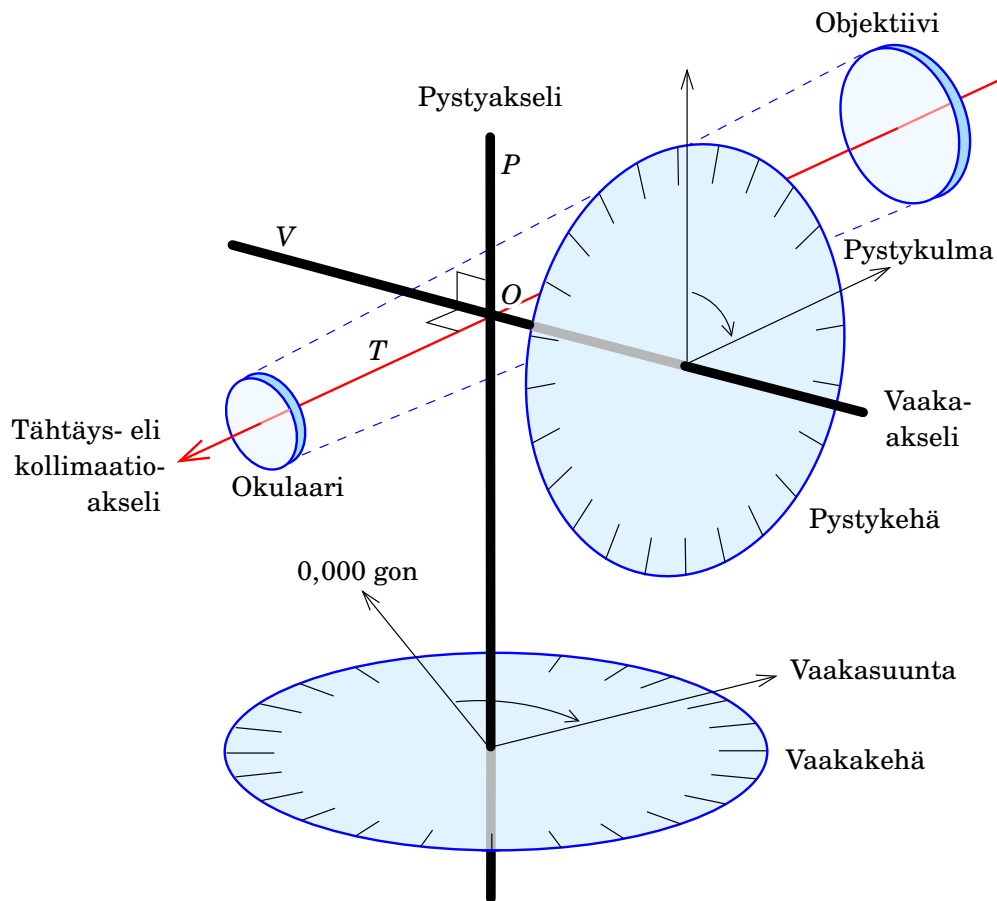


## 5.3 Teodoliitin rakenne

Katso kuva 5.4.

vaihtelevia luotiviivan poikkeamia pyörähdysellipsoidin pintanormaalista, suuruusluokkaa muutamasta kaarisekunnista tasaisella maastolla yli kaariminuuttiin vuoristossa.





KUVA 5.3. Teodoliitin akselit ja kehät.



### 5.3.1 Mittauskaukoputki

Teodoliitin mittauskaukoputki on periaatteessa samanlainen kuin vaatuskoeen (kuva 4.8), monimutkainen linssistä, prismoista ja peileistä koostuva yhdistelmä. Putki kääntyy vaaka-akselin ympäri, ja sen mukana liikkuu joko pystykehä itse tai pystykehän indeksi ja lukemamikroskooppi, kojetyypistä riippuen.

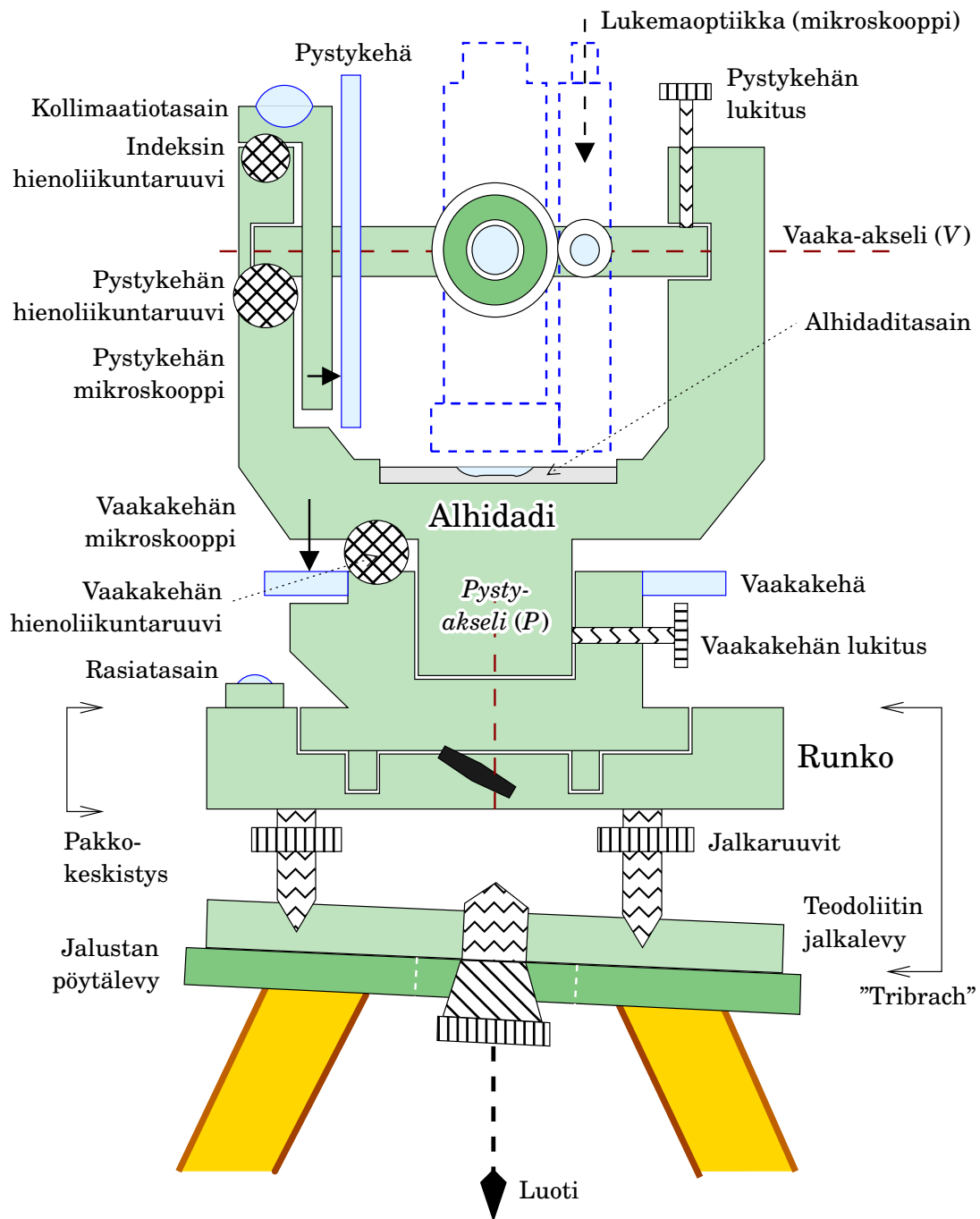


### 5.3.2 Lukemalaitteet

Teodoliitti sisältää vaaka- ja pystykehän lukemalaitteet:

- Tavallisesti kuvat johdetaan prismojen avulla mittauskaukoputken okulaarin viereiseen mikroskooppiokulaariin havaitsijan työn helpottamiseksi.
- Asteikkomikroskooppi ja optinen mikrometri ovat keinoja suuremman lukemataarkkuuden saamiseksi, katso [Kahmen ja Faig \(1988\)](#) sivut 66–67.





KUVA 5.4. Teodoliitin rakenne.

- Kohdistusmikroskoopissa lukemat otetaan kahdesta vastakkaisesta paikasta vaaka- tai pystykehässä. Tässä tapauksessa käytössä on aina myös optinen mikrometri (Kahmen ja Faig, 1988, sivut 72–76).



### 5.3.3 Alhidadi

Alhidadi (arab. *al-idhâdah*, viivoitin) on teodoliitin keskeinen osa, joka kääntyy pystyakselin ympäri vieden kaukoputken mukanaan. Se sisältää putkitasaimen, *alhidaditasaimen*, teodoliitin tarkaksi tasaamiseksi, katso alaosio 5.4.4.



### 5.3.4 Runko

Teodoliitin *runko* on kiinteä osa, johon vaakakehä on kiinnitetty ja johon alhidadi on laakeroitunut.

- Runko sisältää pakkokeskistys- eli jalkaruuvilaitteen (engl. *tri-brach*).
- Rungon yläosa istuu *pakkokeskisesti* laitteeseen: se voidaan irrottaa ja palauttaa tarkasti samaan paikkaan.
- <sup>2</sup> ◦ Pakkokeskistyslaite kiinnitetään jalustan pöytälevyyn ison ruuvin<sup>2</sup> avulla. Pöytälevyn keskellä on iso pyöreä reikä ja mekanismi, joka luo vaakasuuntaista liikkumavaraa *keskistystä* varten.
- Jalkaruuvit ovat teodoliitin *tasausta* varten: teodoliitin pysty akseli orientoidaan paikallisen luotiviivan suuntaiseksi.
- Rasiatasainta käytetään apuna likimääräisessä tasauksessa, kun alhidaditasain auttaa tarkassa tasauksessa.
- Riippu- eli naruluodin kiinnitys ja optinen luoti tai laserluoti ovat keskistystä varten.



## 5.4 Teodoliitin käsittely maastossa

Kalliina hienomekaanis-optisena kojeena teodoliittia tulee aina käsitellä sopivalla kunnioituksella:

- Kuljetus, etenkin pitemmällä matkalla, tapahtuu aina kantokotelossa.
- Aurinkovarjo on kojetta, ei havaitsijaa varten. Se suojaa myös jonkin verran sateelta.
- Kojetta ei koskaan osoiteta suoraan Aurinkoon päin: hiusviivaristikkolasi poksahdaisi ja koje olisi korjattava ja uudelleen kalibroitava. Lisävaurioita syntyy, jos kojeessa on etäisyysmittari.

<sup>2</sup>Ruuvi on geodeettisen standardin mukaan  $\frac{5}{8}$  tuumaa, 11 kierrettä tuumassa.



KUVA 5.5. Pakkokeskistyslaite eli -alusta.

- *Huolellinen kirjanpito* on tärkeää: kirjoitetaan ylös kaikki, mikä voi olla aiheellista, esimerkiksi sääolot (*metatieto*).

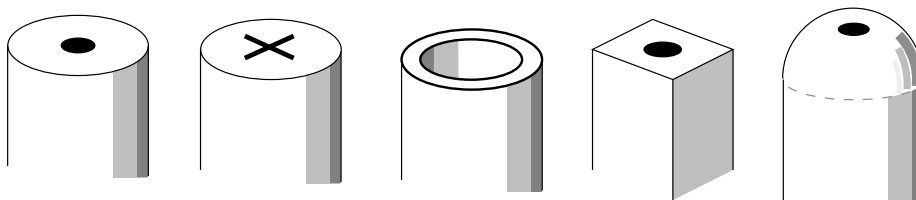
#### 5.4.1 Maastomerkit ja pistekortit

Toisin kuin vaatuskoje, on teodoliitti laitettava tarkasti mitattavan pisteen yläpuolelle, jotta teodoliittimittaus kohdistuisi pisteeseen.

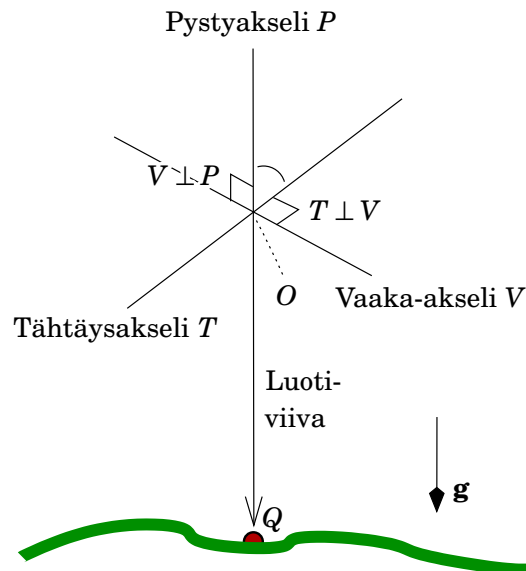
Kuvassa 5.7 piste *Q* on maastoon merkitty, keskusmerkillä varustettu mittauspiste. Kuvassa 5.6 on muutama esimerkki käytössä olevista maastomerkkityypeistä.

Maastomerkin tyypin valinta on tehtävä niin, että

- Piste on selkeästi ja yksiselitteisesti määritetty. Jos on tarkoitus tehdä sekä tarkka paikanmäärittäminen vaakatasossa että korkeuden mittaus, on sopivinta käyttää teräksistä pallopääpulttia, jossa on pieni reikä keskellä.



KUVA 5.6. Eri maastomerkkityyppejä.



KUVA 5.7. Teodoliitin akselit.  $Q$  on maastoon merkitty piste.

- Merkki kestää sään ja ympäristön vaikutusta — routaa! Kallio-merkki on paras. Rautainen merkki on syytä ”mönjätä” (ruostesuojamaali; lyijymönjää ei enää suositella myrkyllisyytensä vuoksi).
- Merkki on helppo löytää — pistekortti!
- Pistenumero on merkitty maastomerkin päälle tai maalattu (ja hakattu!) sen viereen.

Aina kun luodaan maastomerkki myöhempää käyttöä varten, on laadittava pisteestä *pistekortti*, jonka avulla merkki löytyy kymmenienkin vuosien jälkeen. Pistekortti voi sisältää seuraavia tietoja:

- Merkin etäisyys lähimaisemassa olevaan, vähintään kolmeen pysyväksi uskottuun kohteeseen — puut, rakennusten nurkat, jne. — nauhalla mitattuna. Pistekorttiin piirretään merkin ja vertauskohtien keskinäinen sijainti.
- Lähestymiskartta, johon merkitty auton kilometrilukemat, tienviivat, maiseman kuvaus ja muita hyödyllisiä yksityiskohtia.
- Tarkat koordinaatit käsi-GNSS:ää varten.
- Valikoidusti valokuvia.



#### 5.4.2 Keskistys ja tasaus

Jotta kulmat pisteeltä tulevat mitatuiksi oikein, suoritetaan kaksi toimenpidettä: *keskistys* ja *tasaus*.



**Keskistys** Kuvassa 5.7, pisteiden  $Q$  ja  $O$  eli maastomerkin ja teodoliitin akselien leikkauspisteen on oltava samalla luotiviivalla.

**Tasaus** Teodoliitin pystyakselin  $P$  tulee olla luotiviivan suuntainen. Silloin, kun koje pyöritetään pystyakselin ympäri, vaaka-akselin  $V$  kulma luotiviivan kanssa pysyy vakiona: ihanteellisesti, ilman tappikaltevuutta,  $100^\circ$ . Vaaka-akseli on siis aina vaakatasossa.

Keskistys ja tasaus suoritetaan useimmiten *vuorottaisesti*, kunnes haluttu lopputulos on saavutettu.



#### 5.4.3 Karkea keskistys

- Jalusta pystytetään oikeaan paikkaan, silmämääräisesti ja jalkojen pituuksia muuttelemalla.
- Katsotaan myös silmämääräisesti, että jalustan pöytälevy on vaakasuorassa.



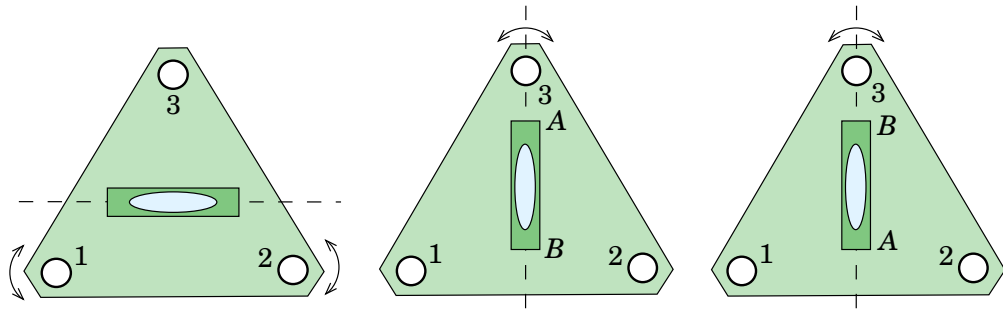
#### 5.4.4 Tarkka tasaus

Teodoliitin tarkka tasaus alhidaditasaimen avulla suoritetaan seuraavissa vaiheissa, katso kuva 5.8:

- 1) Karkea tasaus tehdään rasiatasaimen avulla.
- 2) Tasataan ensin jalkaruuvien 1–2 suuntaan, kääntämällä ruuvit yhtäaikaa vastakkaisiin suuntiin. Otetaan tarvittaessa huomioon tasaimen *nollavirhe* vaiheesta 4.
- 3) Käännetään alhidadi  $100^\circ$  ja tasataan myös tähän suuntaan jalkaruuvien 3 avulla.
- 4) Käännetään alhidadi  $200^\circ$ . Jos alhidaditasain on säädetty oikein, pitäisi kuplan olla keskellä. Ellei, siirretään kupla takaisin poikkeaman *puoliväliin*, siis tasapainoasemaan, jalkaruuveilla. Tasaimen *nollavirhe* on puolet kuplan siirtymästä vaiheiden 3 ja 4 välillä.
- 5) Toistetaan 2–4 kunnes tasaus ei enää muutu.

Varmista, että kupla liikkuu vapaasti eikä sen pää ota tasaimen reunaan kiinni.

Jos kohdassa 4 löytynyt poikkeama on suuri, on alhidaditasain säädön tarpeessa.



KUVA 5.8. Teodoliitin tarkka tasaus alhidaditasaimen avulla.



#### 5.4.5 Tarkka keskistys

Keskistysmenetelmä riippuu luodin tyypistä. Yleisin luotityyppi on *optinen luoti*.

Mitään luoti ei ole äärettömän tarkka. Myös kojeen korkeuden mittaaminen merkin yläpuolella on virhealtis toimitus. Näistä syistä käytetään erikoismittauksissa, kun tarkkuusvaatimus on alle millimetrin, pysyvästi peruskalliolle tai syvälle alustalle (routaa!) rakennettuja kojepilareita kolmijalkojen sijasta.

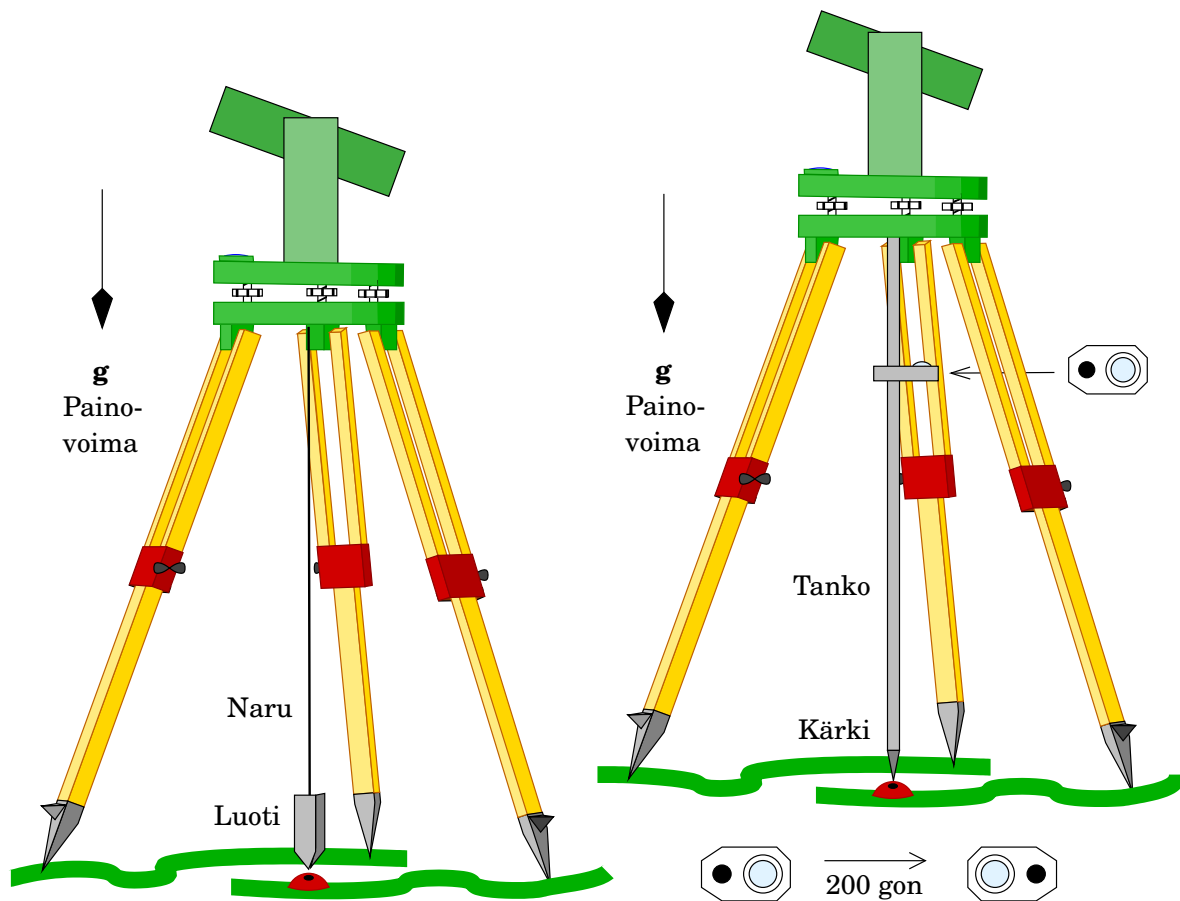
#### Riippuluoti

- Perinteinen.
- Kiinnitys siten, ettei keskistys tasattaessa muutu.
- Keskistys: *siirretään* teodoliitin pakkokeskistyslaite jalustan pöytälevyä pitkin siten, että luodin kärki osoittaa maassa olevaan merkkiin. Ruuvataan teodoliitin kiinnitysruuvi kiinni. Pöytälevyn keskusreikä antaa liikkumavaraa.
- Tasaus teodoliitin jalkaruuveilla.

Haittana: tuuliherkkä.

#### Sauvaluoti

- Teleskooppimainen putki, jonka yläpää kiinnitetään pakko-keskistyslaitteeseen (jalustan pöytälevyn keskusreiän läpi), ja alapää asetetaan tarkasti keskusmerkille.
- Sauvassa on rasiatasain.
- Keskistys:
  - 1) Siirretään pakkokeskistyslaite niin, että sauvan rasiatasaimen kupla on keskellä.
  - 2) Kierretään tasain 200<sup>g</sup> sauvan vastakkaiselle puolelle:



KUVA 5.9. Riippuluoti ja sauvaluoti.

jos kupla pysyy keskellä, on keskistys suoritettu.

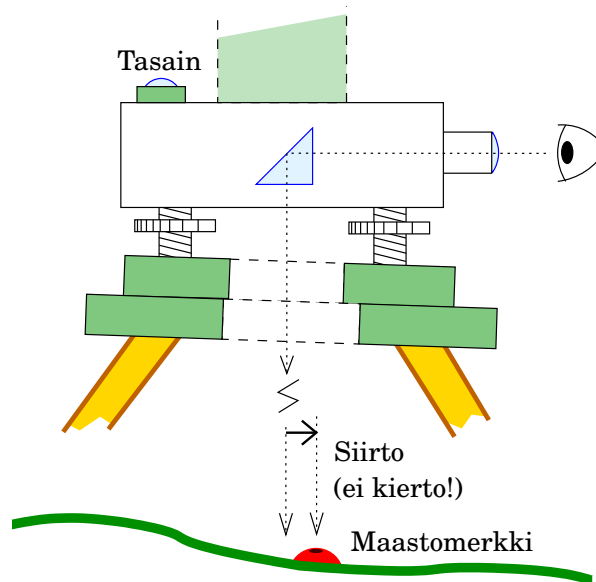
- 3) Ellei, siirretään pakkokeskistyslaite niin, että kupla menee puolet matkasta takaisin keskipaikkaan, siis *tasapainoasemaan*.

Sauvaluoti sisältyy tiettyntyyppiseen jalustaan (Kern), jollaisia käytetään usein tarkoissa insinöörimittauksissa.

### Optinen luoti

- Pakkokeskistyslaitteen — tai teodoliitin — sivussa on pieni prismalla varustettu kaukoputki, joka katsoo suoraan alaspäin. Kaukoputken okulaarin polttotasossa on hiusviivaristikko tai vastaava eli *indeksi*. Katso kuva 5.10.
- Pakkokeskistyslaitteen on oltava tasattuna rasiatasaimella.
- Keskistys- ja tasausmenetelmä optista luotia käyttäen (kuva 5.12):

- 1) Pakkokeskistyslaitteen jalkaruuveilla laitetaan aluksi



KUVA 5.10. Optinen luoti.

indeksi merkin päälle — tasaus siis menetetään!

- 2) Kahta jalustan jalan pituutta säätämällä saadaan rasiatasaimen kupla taas keskelle. Pakkokeskistyslaite suorittaa *kiertoliikkeen* kolmannen jalan kärjen ympäri ja indeksin paikka merkin kuvan päällä muuttuu vain vähän.
- 3) Yhdensuuntaissiirrolla — löysätään hieman pakkokeskistyslaitteen isoa ruuvia — saadaan optisen luodin indeksi uudelleen merkin päälle.

*Huom!* Siirretään, *ei saa kiertää*, koska silloin tasaus muuttuu!

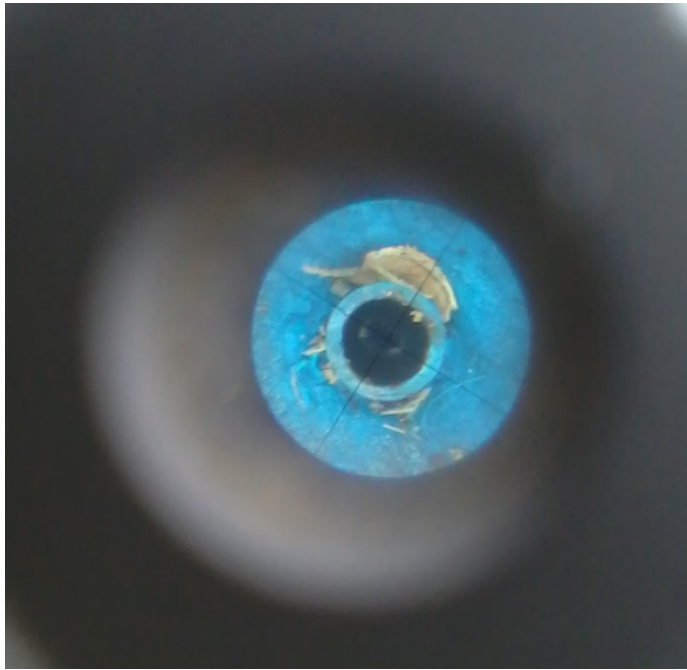
- Koska käytännössä sekä tasaus **3** että indeksin paikka **2** kuitenkin aina hieman muuttuvat, *toistetaan* menettely **1–3** kunnes haluttu lopputulos on saavutettu. Onneksi menettely suppenee nopeasti.



#### 5.4.6 Ongelmatilanteita

Normaalisti yllä kuvattu keskistys- ja tasausmenetelmä johtaa nopeasti tyydyttävään tulokseen. Tosielämän kenttätöyssä tulee kuitenkin aina vastaan patologisia tilanteita, kuten kuvassa **5.13**. Ohjeistus näitä tilanteita varten jätetään sikseen.



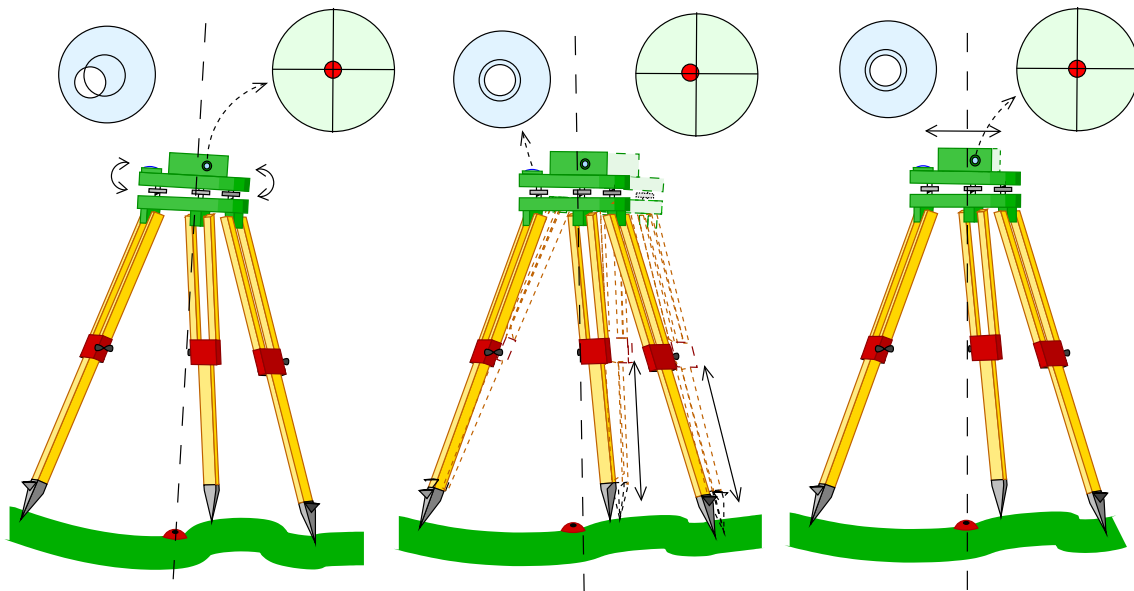


KUVA 5.11. Kiintopiste (putkipiste) nähtynä optisen luodin kautta. Fokusoinnin jälkeen sekä kohde että hiusviivaristikko näkyvät terävinä.



#### 5.4.7 Pakkokeskistys

Tarkassa mittaustyössä käytetään *pakkokeskistyslaitteita*<sup>3</sup>: koje ja tähys<sup>3</sup>



KUVA 5.12. Optista luotia ja rasiatasainta käytetään yhtäkaa keskistyksen ja tasauksen aikaansaamiseksi.





KUVA 5.13. Ongelmatilanne.

sopivat samaan laitteeseen, kuva 5.14. Näin voidaan eliminoida useasta jalustan keskistämisestä johtuvat virheet.

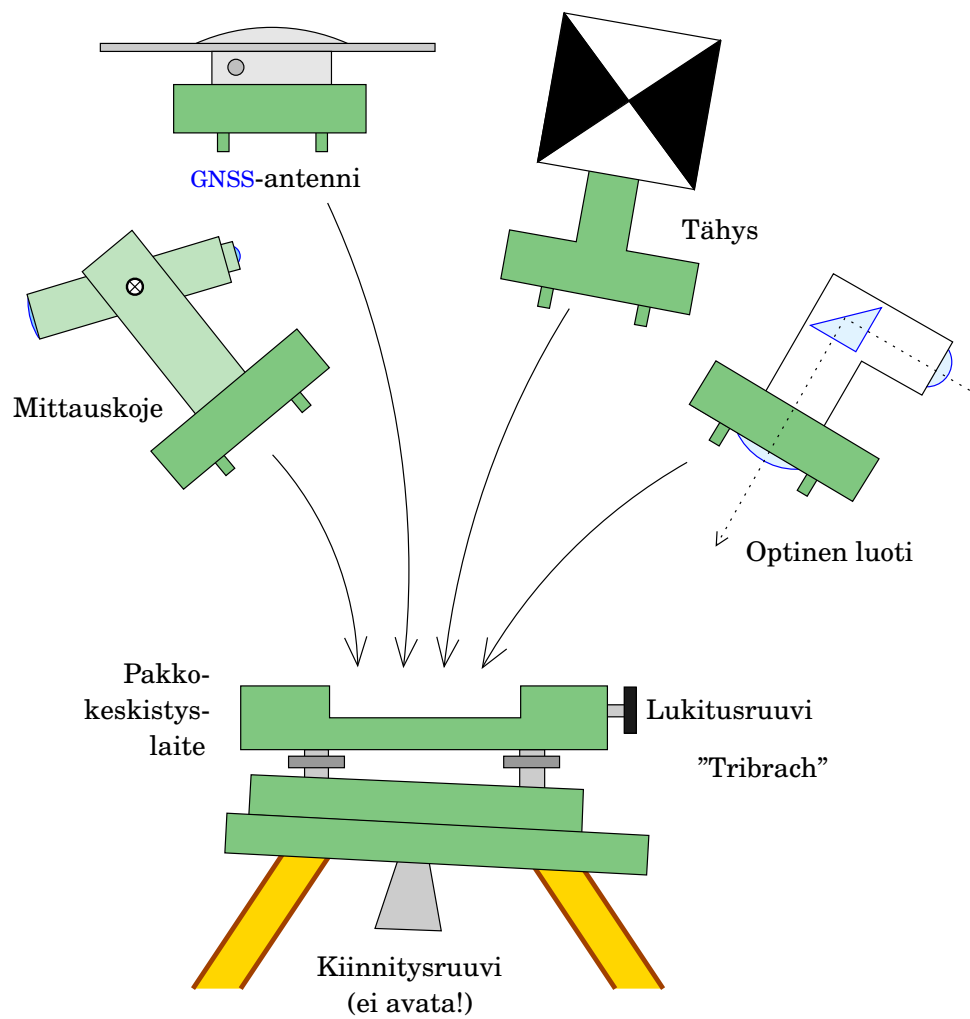
Oikein tarkoissa mittauksissa, kuten insinöörigedesian mittauksissa, käytetään *erillistä optista luotia*. Lyhyillä matkoilla keskistys voi olla suurin virhelähde.

Mittauksessa huolehditaan siitä, että jokainen sivu mitataan molempaan suuntaan: kolmen pisteen verkossa menettely voi olla kuvan 5.15 mukainen. Jokaisesta kojeasemasta mitataan kaikkiin (lähellä oleviin) tähyksellä varustettaviin pisteisiin.

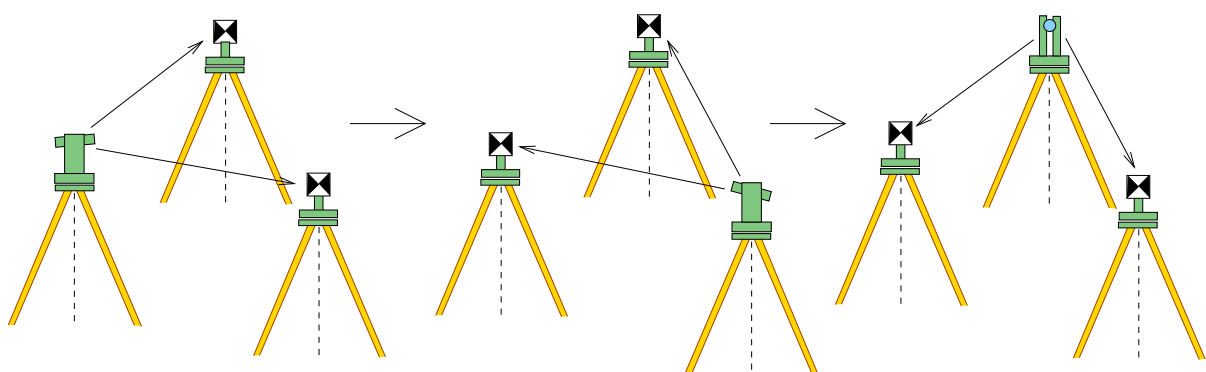
Pakkokeskistys on myös käyttökelpoinen tilanteissa, joissa mitataan samalla pisteellä sekä satelliittitekniikalla (GNSS) että terrestrisellä kojeella. Antenni kiinnitetään silloin välikappaleen kautta pakkokeskistyslaitteeseen, kuva 5.14.

---

<sup>3</sup>engl. *tribrach*, ruots. *trefot*.



KUVA 5.14. Pakkokeskistystyksen periaate. Koje ja tähys sopivat samaan laitteeseen.



KUVA 5.15. Verkon mittaus pakkokeskistystä käyttäen.



#### 5.4.8 Optisen luodin tarkistus

Yleisin käytetty luoti on optinen luoti — vaikka laserluoti on voittamassa alaa. Laserluoti toimii käytännössä samalla tavalla kuin optinen luoti, valo vain kulkee toiseen suuntaan (Crawford, 2009).

Optisen luodin heikkous on, että se on säädettävä niin, että se katsoo suoraan alaspäin, kun tasaimen kupla on keskellä. Ongelma on samanlainen kuin vaaituskojeen tähtäysakselin ja putkitasaimen horisontin yhdensuuntaisuuden vaatimuksen kanssa, kuva 4.12. Tämä säädetty ominaisuus voidaan helposti menettää laitteen käsittelyssä. Siksi se on säännöllisin välein *tarkistettava*.

Eräs tarkistusmenetelmä on kuvattu kirjassa Kahmen ja Faig (1988), sivuilla 95–96:

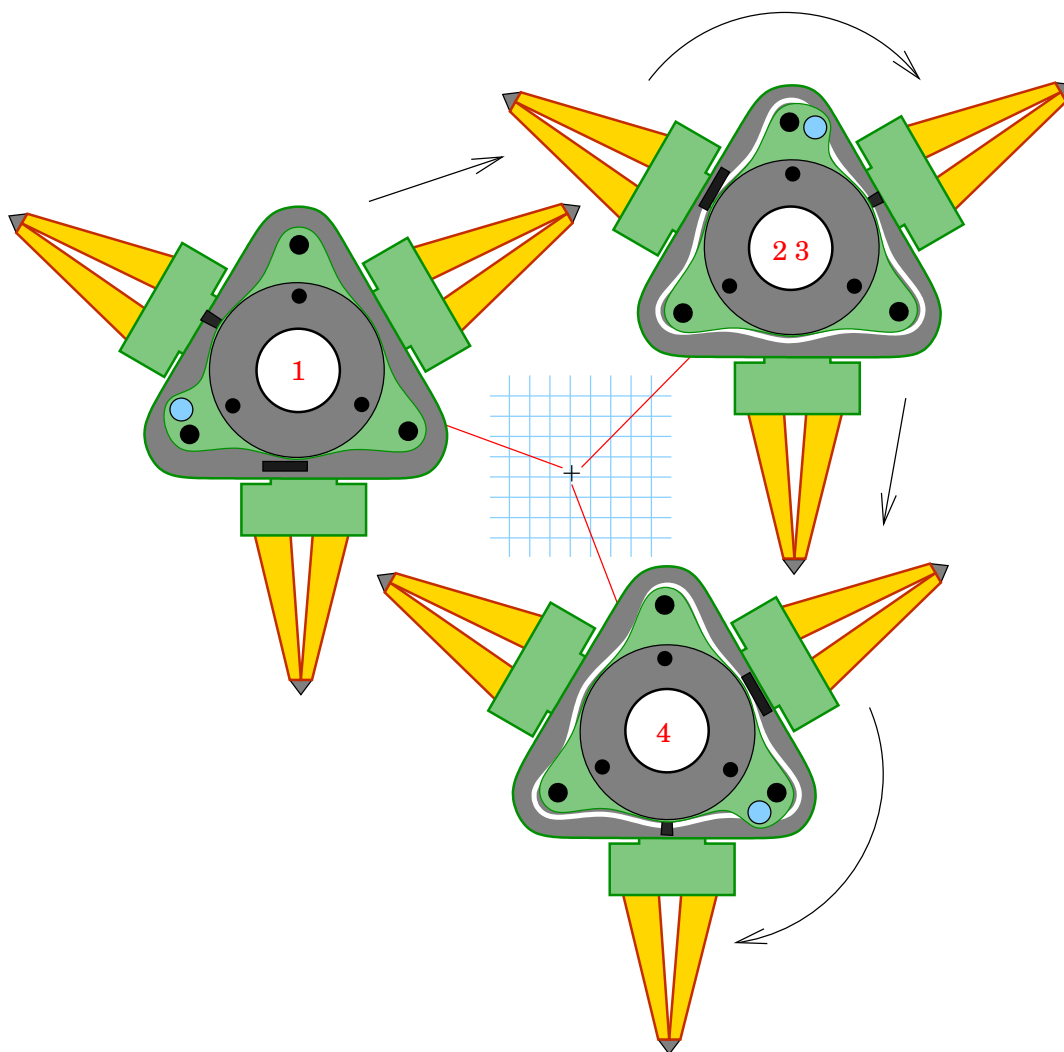
- 1) Laitetaan pakkokeskistyslaite — tai koko teodoliitti, jos optinen luoti on sisäänrakennettu — jalustaan, tasataan se ja merkitään luodin okulaarissa näkyvä piste lattialle teipattuun ruutupaperiin.
- 2) Pakkokeskistyslevyn ulkoreuna merkitään lyijykynällä tai liidulla jalustan pöytälevyyn.
- 3) Pakkokeskistyslaite irrotetaan jalustasta, käännetään  $120^\circ$  ja laitetaan huolellisesti takaisin piirretyn ulkoreunan sisään. Tasataan, ja merkitään taas lattialle luodin okulaarin hiusviivaristikon alla näkyvä piste.
- 4) Toistetaan 3.
- 5) Jos kohdissa 1, 3 ja 4 piirretyt pisteet lattialla ovat identtisiä, on luoti säädetty oikein. Ellei, okulaarin hiusviivaristikko siirretään sen säätöruuveja käyttäen kolmen lattialla olevan pisteen painopisteen päälle.

Ei-säädetyn optisen luodin käyttö tekee sen avulla kerätyn havaintoaineiston arvottomaksi. Sädön säännöllinen tarkistus, vaikkapa ennen ja jälkeen kenttätöön, on yhtä tärkeää kuin teodoliitin kojekorkeuden mittaaminen merkin yläpuolella.



#### 5.4.9 Tähtäys ja kohdistus

- Fokusointi on, kuten vaaituskojeella, tehtävä aina huolellisesti.
- Havaintotyön alussa hiusviivaristikko tarkennetaan okulaaria säätämällä. Jos silmälaseissa on tavalliset vahvuudet, ne voi jättää pois, kuten jo selostettiin osiossa 4.5.

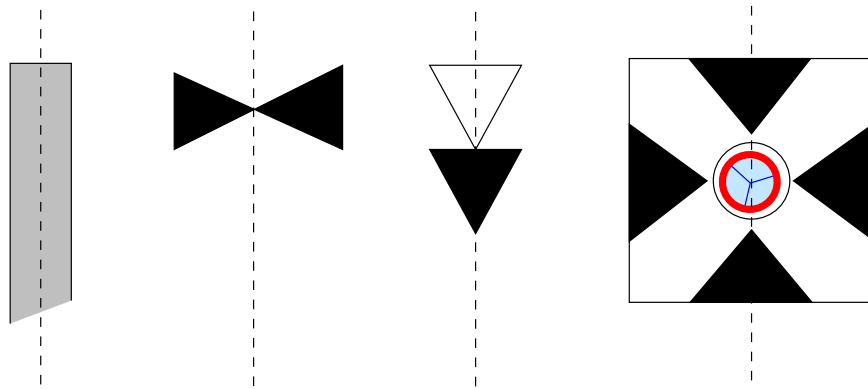


KUVA 5.16. Optisen luodin tarkistus. Luoti tulee säätää näin, että se osoittaa aina kolmen pisteen painopisteeseen, mustaan ristiin.

- Jokaisen kohteen kohdalla tarkennetaan tähys huolellisesti foku-  
sointiruuvin avulla.
- Tarkoissa mittauksissa sarjahavaintojen aikana ei saa fokusoida  
uudelleen, koska silloin kollimaatio muuttuu hieman. Tämä edel-  
lyttää, että kaikki kohteet ovat riittävän kaukaisia.

Ongelmatilanteita:

- Tähys on *ohut*, esimerkiksi hyvin kaukana, ja jää osin hiusviiva-  
ristikon viivan peittämäksi. Tämä ei ole ongelma, jos ristikko on  
kuvan 5.18a näköinen.
- Tähyksen toinen puoli on varjossa, kun Auringon valo tulee sivusta  
(kuva 5.18b).



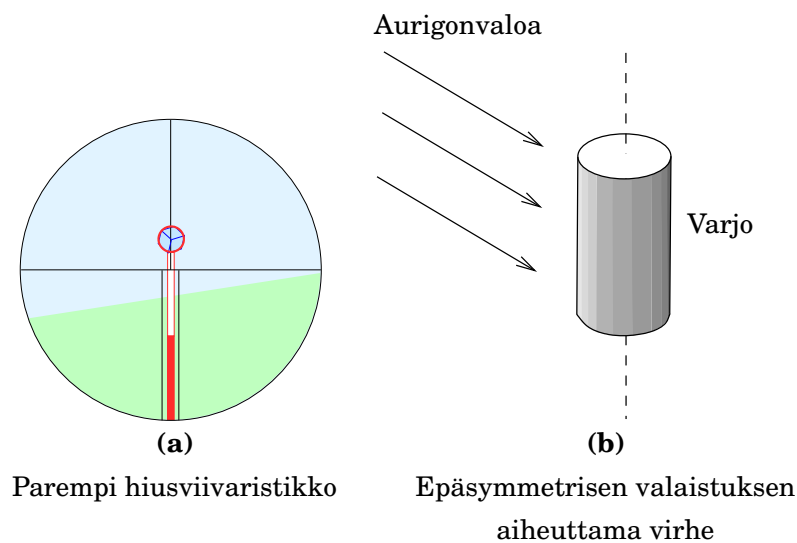
KUVA 5.17. Hyviä tähyksiä vaakakulmien mittauksessa.

Mustavalkoiset tähykset ovat aina parhaita.



## 5.5 Havaintojen lukeminen

Vaativissa teodoliittimittauksissa on hyvä käytäntö mitata aina *molemmassa kojeasennossa*<sup>4</sup>, kojeasento I ja kojeasento II. Kojeella on kaksi kojeasentoa, koska sillä on kaksi akselia: kääntämällä molempien akselien ympäri 200 goonin verran saadaan mittauskaukoputki taas osoittamaan samaan kohteeseen. Tämä redundanssi<sup>5</sup> mahdollistaa mo-



KUVA 5.18. Kohdistus. Vasemmalla parempi hiusviivaristikko. Tässä on käytettävissä sekä yksinkertainen viiva että kaksoisviiva. Oikealla epäsymmetrisen valaistuksen vaikutus.



<sup>4</sup>Kahden kojeasennon teodoliitin keksi todennäköisesti amerikkalainen William J. Young Philadelphiasta vuonna 1831.

nen systemaattisen virheen eliminoinnin. Ykkösasento, ”*face left*”, siis pystykehä kaukoputken vasemmalla puolella havaitsijasta katsottuna, antaa pystykulmia lähellä  $100^\circ$ , jos tähtäys on lähellä vaakatasoa. Kakkosasento, ”*face right*”, antaa arvoja lähellä  $300^\circ$ .

Perinteistä sarjahavaintomenetelmää, joka vähentää edelleen monia kojevirheitä, ei enää käytetä:

- Ensimmäisen luokan eli valtakunnallisten runkoverkkojen mittaus on siirtynyt kokonaan satelliittipaikannukseen.
- Digitaaliset kulmamittaustekniikat suorittavat sarjahavaintomenetelmää vastaavan mittausmenetelmän automaattisesti ilman havaitsijan väliintuloa.



### 5.5.1 Jakokehät ja teodoliittien luokitus

Teodoliittien jakokehät (engl. *graduation circles*, ruots. *cirklar*) valmistetaan yleensä lasista. Läpimitta on 60–100 mm, tarkimpien kojeiden tapauksessa 250 mm. Pääasteikon jakoväli on 1, 0,5, 0,2 tai 0,1 gon, kojeen tarkkuusluokasta riippuen. Perinteinen menetelmä piirtää tiiviin viivakuvion ”jaotuskoneella” lasin päälle laitettuun vahakerrokseen. Viivat syövytetään lasiin hapolla ja täytetään väriaineella. Tämä oli pitkään tarkasti varjeltu sveitsiläinen liikesalaisuus (Penry ja Ingram, 2013).

Teodoliitit luokitellaan, perinteisesti ja hieman epävirallisesti, minuuttiteodoliiteiksi (”*one-minute theodolite*”), sekuntiteodoliiteiksi (”*one-second theodolite*”) ja tarkkuusteodoliiteiksi. Niiden tarkkuusrajoja ei ole selvästi määritelty: yksi lähde (Simonen, 2012) antaa  $> 1$  mgon minuuttiteodoliiteille, 0,5 – 1,0 mgon sekuntiteodoliiteille ja  $< 0,5$  mgon tarkkuusteodoliiteille. Katso myös Anon. (1971).



### 5.5.2 Lukemalaitteet ja hienolukumenetelmät

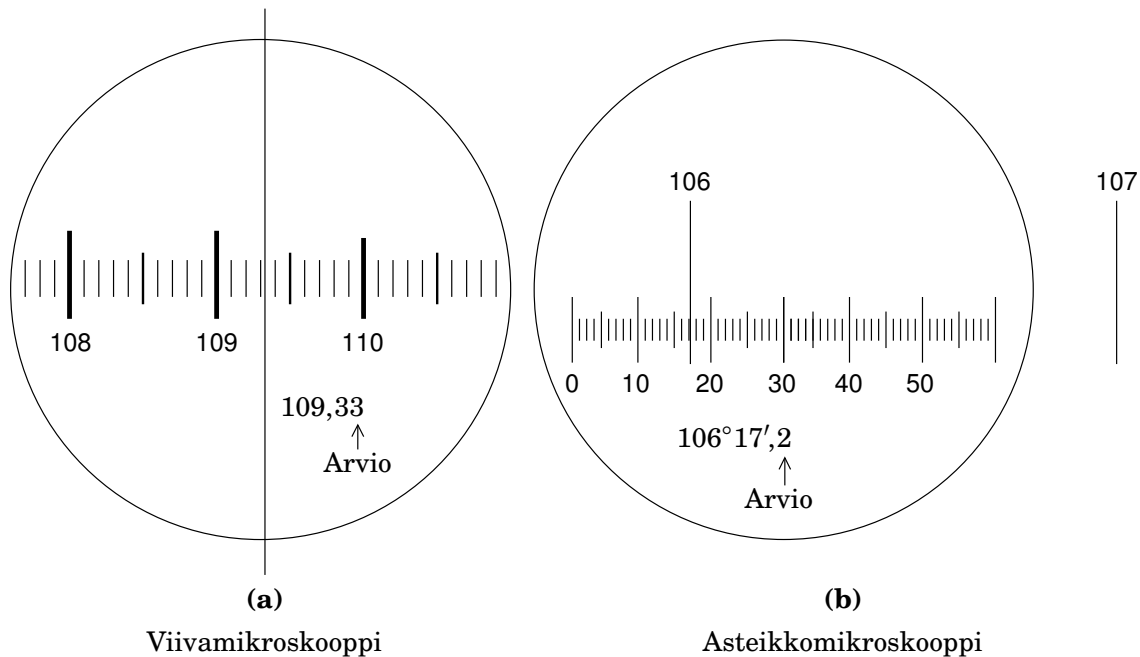
Lukemalaite *suurentaa* jakokehän asteikon kuvan mikroskoopin avulla. Sillä *interpoloidaan* hienolukema pääasteikon lukemien väliin.

Lukemamikroskoopit jaetaan kahteen tyyppiin (kuva 5.19):

- Viivamikroskooppi:
  - Pääasteikon suurennus ja indeksiviiva.
  - Hienolukemat arvioidaan visuaalisesti, tarkkuus noin kymmenesosa jakoväliä.

<sup>5</sup>Katso teoreettinen tausta Wikipedia, 3D rotation group, Topology.





KUVA 5.19. Lukemamikroskoopin eri tyypit.

o Asteikkomikroskooppi:

- Lisäasteikko, jonka pituus on sama kuin pääasteikon jakoväli: yleensä pääjakoväli on 1 gon, lisäasteikon jakoväli 0,01 gon, 100 jakoviivaa.
- Lisäasteikon indeksinä käytetään pääasteikon jakoviivaa.

Viivamikroskooppia voidaan varustaa *optisella mikrometrillä* paremman lukematakkisuuden saavuttamiseksi, kuva 5.20.

Kun lasia kierretään kulman  $\alpha$  (oletettu pieneksi) verran, siirtyy valonsäde yhdensuuntaisena matkan<sup>6</sup>

$$\Delta = D \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right) \approx \alpha D \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

verran, jossa  $n$  on lasin taitekerroin. Lasilevyn kiertomekanismeissa on asteikko, joka osoittaa arvon  $\Delta$  pääasteikon kulmayksiköissä.

Pääasteikon jakoviivat ovat kaksoisviivoja, joten kohdistus on helppoa.

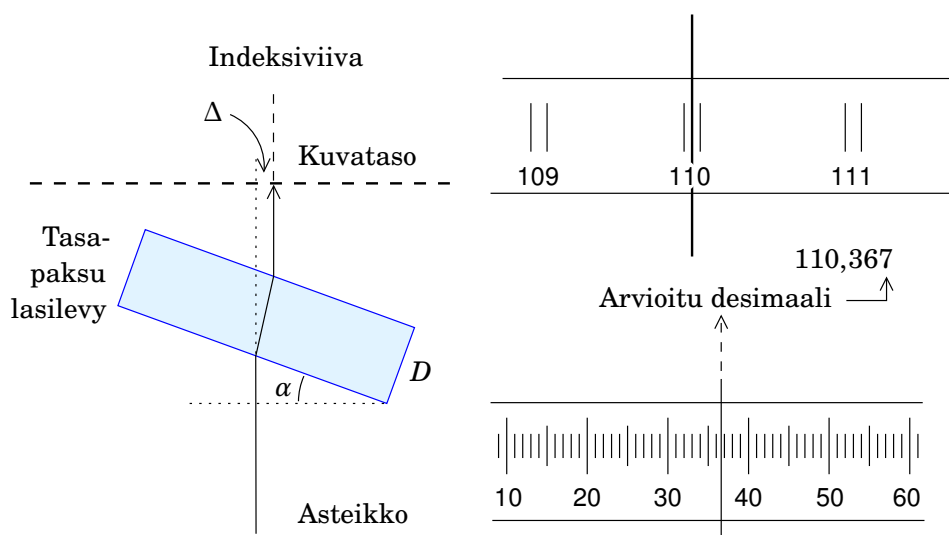
*Noonio* (*nonius*) (engl. *vernier*) ei enää käytetä teodoliiteissa. Kirjassa [Heiskanen \(1943\)](#) kerrotaan, että portugalilainen Pedro Núñez (Petrus

<sup>6</sup>Koska

$$\left. \begin{array}{l} PQ = D \sin \alpha, \\ PQ' = D \sin \alpha' = D \frac{\sin \alpha}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow Q'Q = D \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$







KUVA 5.20. Optinen mikrometri ja sen lukeminen.

Nonius) keksi nooniota edeltäneen laitteen jo 1542, ja ranskalainen Pierre Vernier nykynoonion vuonna 1631. Katso myös [Kahmen ja Faig \(1988\)](#) sivu 65.

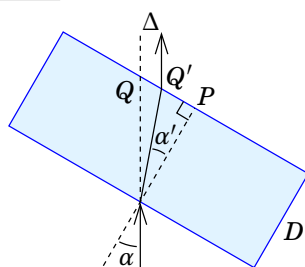


### 5.5.3 Jakokehän lukeminen

- Luetaan *yksi* kehäpaikka, kuva 5.21.
- Tarkkuusteodoliitissa* luetaan samanaikaisesti *kaksi vastakkaista kehäpaikkaa*. Näin jakokehän epäkeskisyysvirhe kumoutuu. Katso kuva 5.22. Karkea lukema otetaan kehältä, hienolukema mikrometrilta:  $244 + 0,4 + 0,0617$  (jossa 7 arvioitu) eli 244,4617.

Yhtä kehälukemaa käytetään minuuttiteodoliiteissa, kun kahden vastakkaisen lukeman menetelmä eli kohdistusmikroskoopin käyttö löytyy tavallisesti sekunti- ja tarkkuusteodoliiteista.

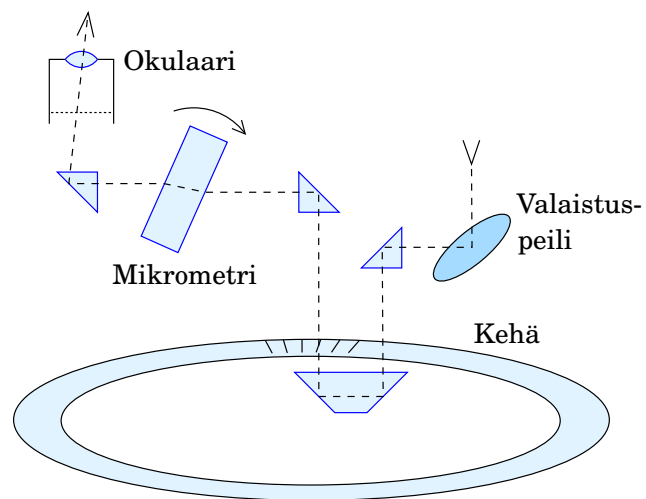
Vaaka- ja pystykehien lukemiseen käytetään samoja menetelmiä.



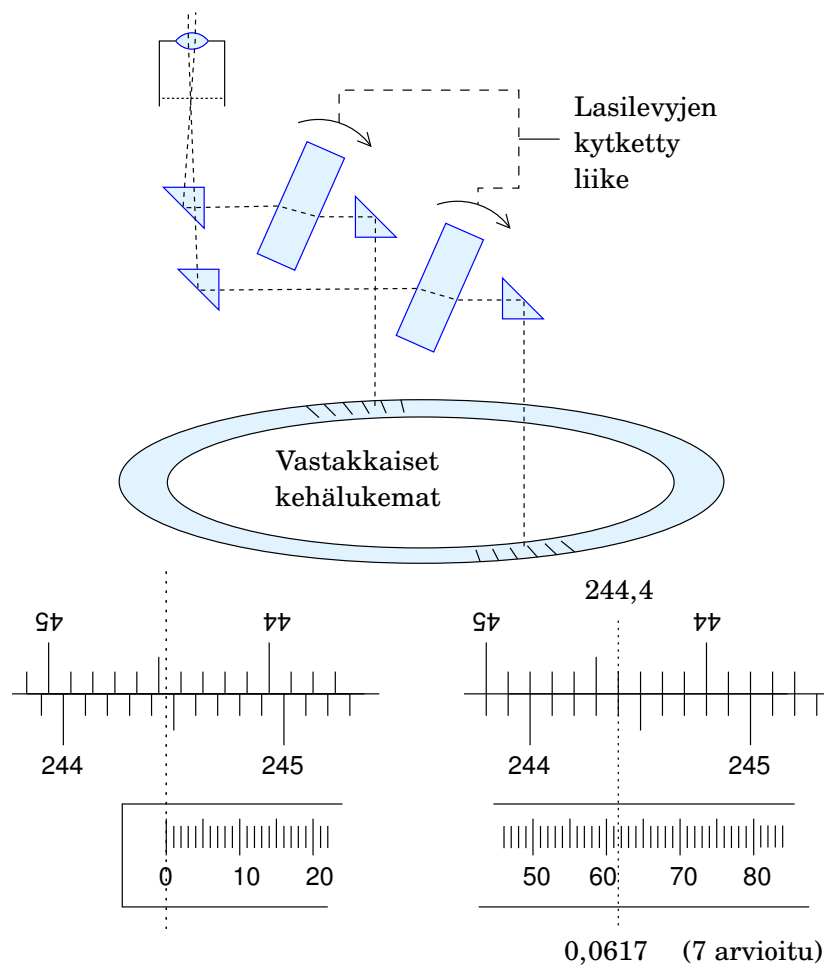
seuraa, että

$$\Delta = Q'Q \cos \alpha = D \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$





KUVA 5.21. Jakokehän lukeminen. Yksi kehäpaikka.



Ennen mikrometrin kohdistusta... ja kohdistuksen jälkeen.



KUVA 5.22. Jakokehän lukeminen. Kaksi vastakkaista kehäpaikkaa.



Yleensä pystykehän läpimitta on pienempi kuin vaakakehän, joten lukematarkkuus on vastaavasti heikompi.

Lukemalaitteeseen kuuluu lisäksi

- *Lukemamikroskooppi*, johon optiikan kaikki lukemat ohjataan. Mikroskoopin näkökentässä näkyvät tavallisesti sekä vaaka- että pystylukemat. Pitää olla tarkkana, että valitsee oikeat ja halutut lukemat. Usein pystylukema on merkitty V-kirjaimella (*Vertical*) ja vaakalukema H-kirjaimella (*Horizontal*) tai merkinnällä Hz. Tässä on suomen kielessä sekoittamisen vaara!
- *Valaistusjärjestelmä*:
  - peili, jota kääntämällä valo ohjataan lukemaoptiikkaan
  - peilin paikalle tai omaan kantaan kiinnitettävä valaisin paristoineen.

Optisista teodoliiteista löytyy lisää kirjasta **Tikka (1991)** sivut 21–35.



## 5.6 Teodoliitin kojevirheet

Teodoliitin kojevirheet jakautuvat seuraaviin ryhmiin:

- Akselivirheet:
  - Akselit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vasten: *kollimaatiovirhe* ja *tappikaltevuus*, alaosiot 5.6.1 ja 5.6.2.
  - Akselit eivät leikkaa samassa pisteessä.
- Epäkeskisyysvirheet:
  - jakokehien epäkeskisyys
  - mittauskaukoputken epäkeskisyys.
- kehien jaotusvirheet.

Epäkeskisyys- ja jaotusvirheet ovat nykyteodoliiteissa pieniä.

Kojevirheitä ei yleensä pystytä korjaamaan, määrittämään kyllä — *kalibrointi*.

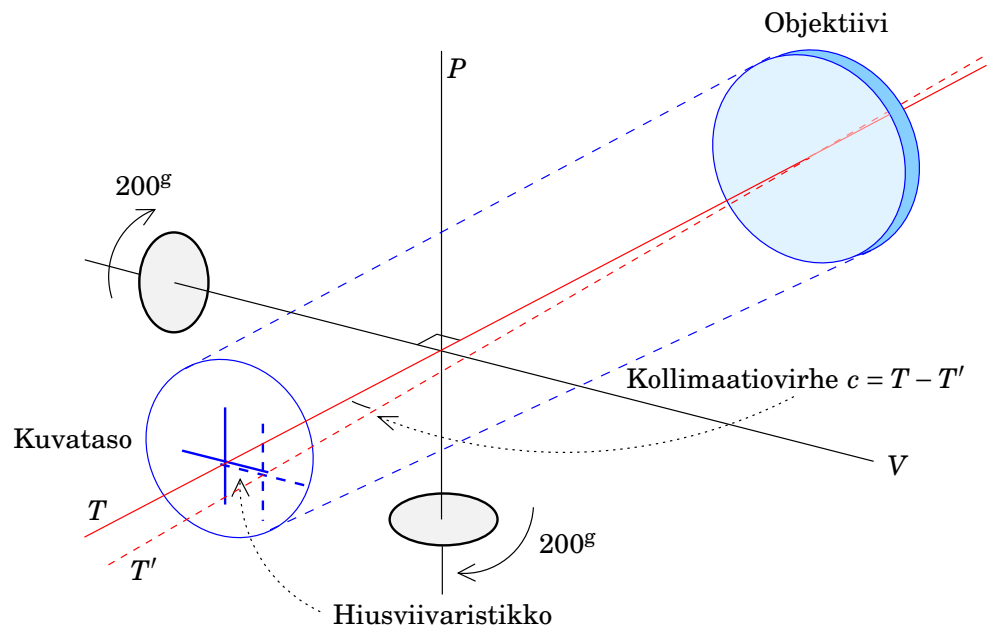


### 5.6.1 Kollimaatiovirhe

Eniten vaikuttaa *kollimaatiovirhe*, joka on helppo määrittää ja korjata. Kollimaatiovirhe on sellainen, että tähtäysakselin  $T$  ja vaaka-akselin  $V$  välinen kulma ei ole suora:  $T \not\perp V$ .

Mittauskaukoputken hiusviivaristikko realisoi tähtäysakselin  $T$  (tarkemmin,  $T$  on objektiivin optisen keskuksen ja hiusviivaristikon läpi





KUVA 5.23. Tähtäysakselin säätäminen hiusviivaristikon siirtämisellä.

menevä suora, kuva 5.23). Siksi hiusviivaristikkoa siirtämällä säädetään  $T \perp V$ .

- Jos kollimaatiovirhettä ei ole ( $c = 0$ ), ensimmäisessä ja toisessa kojeasennossa saman tähtäyskohteen  $A$  lukemat ovat  $a_1$  ja  $a_2$ , jossa  $a_1 = a_2 \pm 200^g$ .
- Jos on kollimaatiovirhettä ( $c \neq 0$ ) ja kaukoputki käännetään ykkösasennosta kakkosasentoon ( $200^g$  sekä vaaka-akselin että pysty-akselin ympäri),  $A$  ei näy hiusviivaristikon kohdalla, vaan putkea olisi käännettävä  $2c$ :n verran lisää.

Oletetaan, että kohde  $A$  on likimain vaakatasossa. Otetaan ensimmäisessä kojeasennossa lukema  $a_1$  ja toisessa kojeasennossa lukema  $a_2$ .

Oikeat lukemat, ilman kollimaatiovirhettä, olisivat  $A_1$  ja  $A_2$ , ja yhtälö  $A_1 = A_2 \pm 200^g$  pitäisi tarkasti paikkansa.

Todellisuudessa saadaan  $a_1 = A_1 + c$  ja  $a_2 = A_2 - c$ . Niiden erotus on

$$a_1 - a_2 = 2c \pm 200^g,$$

josta saa

$$c = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 \pm 200^g). \quad (5.1)$$

Näin voidaan määrittää  $c$ , tavallisesti pieni luku.

Koska  $c$  on niin pieni, vain goonien murto-osat ovat kiinnostavia, eivätkä kokonaisia gooneja. Siksi käytämme seuraavaa kirjoitustapaa:



$[a]$  merkitsee lukeman  $a$  pyöristysjäännöstä, erotusta tarkan arvon ja kokonaisluvuksi pyöristetyn arvon välillä. Siis  $[127,4531] = 0,4531$ ,  $[16,9850] = -0,0150$  ja niin edelleen. Toimituksen tulos on aina arvojen  $-0,5\text{ gon}$  ja  $+0,5\text{ gon}$  välillä.

Silloin

$$c = \frac{1}{2}[a_1 - a_2].$$

Tämä voidaan laskea havaintokirjasta, jos on mitattu samat kohteet molemmissa kojeasennossa.

$$[c] = \frac{1}{2} \frac{[\sum a_1 - \sum a_2]}{n} = \frac{\sum [a_1 - a_2]}{2n}.$$

- $a_1$  ensimmäisessä kojeasennossa havaittu lukema
- $a_2$  vastaavasti toisessa asennossa havaittu lukema (vastaavuus tarkoittaa sekä sama sarja että sama suunta)
- $n$  lukemien lukumäärä (sarjat  $\times$  suunnat).

**Kollimaatiovirheen korjaus** Suoritetaan ensimmäisessä kojeasennossa kojeen kääntöliike niin, että lukema on esilaskettu ”oikea arvo”  $A_1 = a_1 - c$ . Siirretään<sup>7</sup> hiusviivaristikkoa (fokaalilevyä) tähtäyskohteen  $A$  kuvan päälle. Tarkistetaan toisessa kojeasennossa, että saadaan toinen ”oikea arvo”  $A_2 = a_2 + c$ , kun hiusviivaristikko on kohteen päällä.

Laskuesimerkki havaintokirjasta (kaikki arvot gooneina):

Kojeasento	1	2	3	4	$\sum_{i=1}^4$
I	40,5223	88,6932	119,7601	205,7571	454,7327
II	240,5217	288,6924	319,7591	5,7564	854,7296
$a_1 - a_2$	-199,9994	-199,9992	-199,9990	200,0007	-399,9969
$[a_1 - a_2]$	0,0006	0,0008	0,0010	0,0007	0,0031

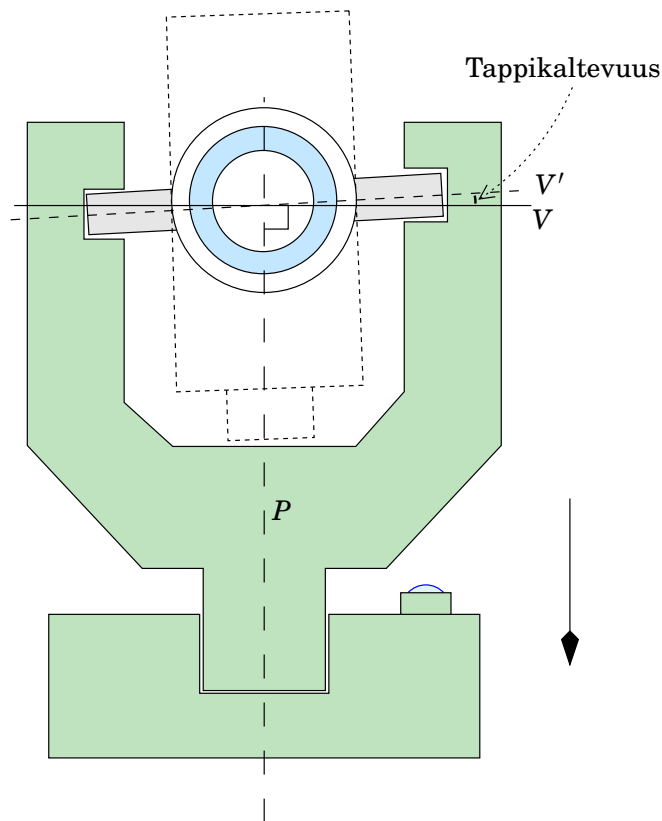
Havaintojen lukumäärä per kojeasento  $n = 4$ , siis

$$[c] = \frac{3,1\text{ mgon}}{8} = 0,3875\text{ mgon} = 3^{\text{cc}},875.$$

Tämä on hyvä *kenttätarkistus*. Tässä esimerkissä kollimaatiovirhettä ei juuri ole.

<sup>7</sup>Tämä on huollon tehtävä, ruuvit ovat pieniä ja piilossa.





KUVA 5.24. Tappikaltevuus.



### 5.6.2 Tappikaltevuus

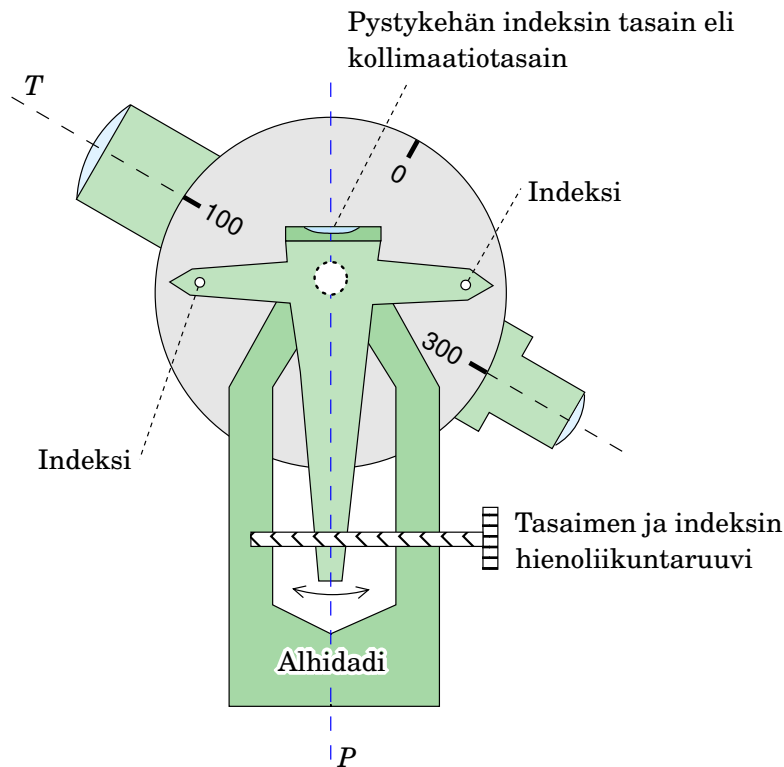
Toinen akselivirhe on *tappikaltevuus* (engl. *trunnion-axis tilt*)  $t$ . Teodoliitin vaaka-akseli  $V$  koostuu kahdesta ”tapista” kaukoputken molemmilla puolilla. Jos ne eivät — kojeen tasauksen jälkeen — ole samalla korkeudella, on niiden muodostama vaaka-akseli *kallellaan*: kulma sen ja pystyakselin  $P$  välillä ei ole suora,  $P \not\perp V$ .

Tappikaltevuus määritetään käyttämällä tähtäyskohdetta, joka on kaukana vaakatasosta ( $\zeta \neq 100^\circ$ ). Silloin pätee

$$a_1 = A_1 + c + t \cos \zeta, \quad a_2 = A_2 - (c + t \cos \zeta),$$

joista voidaan määrittää yhdistelmätermi  $c + t \cos \zeta$  samalla tavalla kuin yllä on selostettu suureelle  $c$ . Virheiden  $c$  ja  $t$  erottaminen toisistaan edellyttää mittausta kahdella eri pystyakselillä  $\zeta$ . Jos yksi niistä on  $\zeta = 100^\circ$  ( $\cos \zeta = 0$ ), saadaan takaisin alkuperäinen kollimaatiovirheen laskentakaava 5.1.





KUVA 5.25. Zeniittikulman havaitseminen.



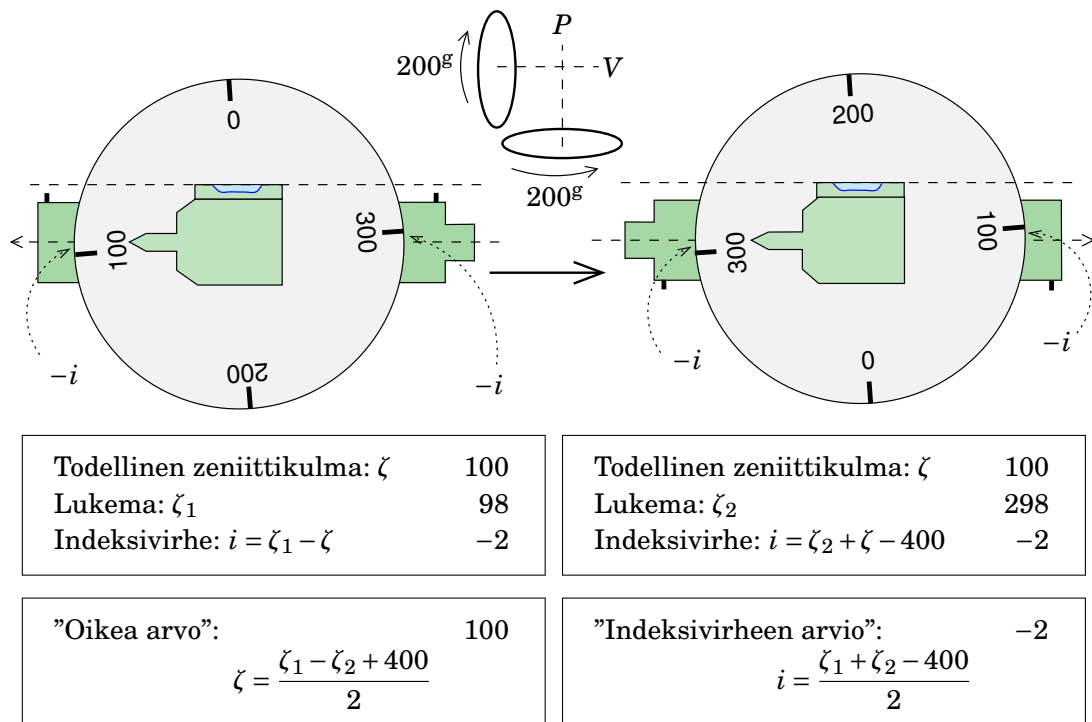
### 5.6.3 Zeniittikulmamittaus ja indeksivirhe

Zeniittikulman mittaaminen teodoliitilla edellyttää, että pystykehän indeksi — paikka mistä luetaan zeniittikulma-arvot — on vaakatasossa. Sitä varten teodoliitissa on oma hienoliikuntaruuvi (kuva 5.25), jolla liikutellaan kehystä, jossa pystykehän indeksi(t) ja pystykehän indeksin tasain (kollimaatiotasain) ovat kytketty kiinteästi toisiinsa. Kehystä voidaan liikuttaa hieman vaaka-akselin ympäri. Mittauskaukoputki ja pystykehä ovat kytkettyneet toisiinsa samalla tavalla.

Ennen jokaista zeniittikulmamittausta on tasaimen ja indeksin hienoliikuntaruuvien avulla varmistettava, että pystykehän indeksit ovat todella vaakatasossa. Tietenkään ei voi olettaa, että pystykehän indeksin tasain on säädetty niin, että indeksi todella antaa tarkasti  $100^g$  ja  $300^g$  juuri silloin, kun mittauskaukoputken optinen akseli on vaakatasossa. Tätä virhettä kutsutaan *indeksivirheeksi* ( $i$ ). Se voidaan eliminoida mittaamalla *molemmassa kojeasennossa* I ja II. Kojearvosta toiseen päästään ”kääntämällä koje läpi”: käännetään kaukoputki  $200^g$  pystyakselin ja  $200^g$  vaaka-akselin ympäri. Kummassakin kojeasennossa saadut mittausarvot lasketaan yhteen:

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 400^g + 2i,$$





KUVA 5.26. Indeksivirhe.

josta indeksivirhe  $i$  seuraa.

Molemmat havainnot  $\zeta_1$  ja  $\zeta_2$  korjataan määrällä  $-i$ :

$$\zeta'_1 = \zeta_1 - i, \quad \zeta'_2 = \zeta_2 - i.$$

Tämän jälkeen ehto

$$\zeta'_1 + \zeta'_2 = 400^\circ$$

täyttyy tarkasti.

Katso kuva 5.26, joka kuvaa (toisin kuin kuva 5.25) teodoliittia, jolla pystykehä luetaan vaan yhdellä paikalla. Kuvassa tähtäysakseli on vaakatasossa eli  $\zeta = 100^\circ$ . Kuitenkin alla annetut kaavat pätevät yleisesti.

Vasemmassa kuvassa mitataan kulma  $\zeta$  ja saadaan lukema  $\zeta_1 = \zeta + i$ , jossa  $i$  on indeksivirhe. Oikeassa kuvassa mitataan sama kulma  $\zeta$ , mutta toisessa kojeasennossa, ja saatu lukema on  $\zeta_2 = (400^\circ - \zeta) + i$ . Saadaan:

$$\zeta_1 + 400^\circ - \zeta_2 = \zeta + i + \zeta - i = 2\zeta.$$

Kulma  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2 + 400^\circ).$$

Kulma  $i$ :

$$\zeta_1 + \zeta_2 - 400^\circ = \zeta + i - \zeta + i \implies i = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2 - 400^\circ).$$





Korjattu lukema on

$$\zeta = \zeta_1 - i = 400^g - \zeta_2 + i.$$

**Indeksivirheen poisto** Oletetaan kuvan 5.25 konstruktio.

- 1) Tähdätään kohteeseen, jonka ”oikea kulma”  $\zeta$  on laskettu.
- 2) Kierretään indeksi ja kollimaatiotasain yhdessä hienoliikuntaruuvien avulla lukemaan  $\zeta$ .
- 3) Tasaimen kupla siirtyy, säädetään tasain sen säätöruuv(e)illa<sup>8</sup> kunnes kupla on taas keskellä.

8

### Kontrolli

- 1) Havaitaan kojeasennossa I kohde ( $\zeta_1$ ) ja heti perään sama kohde kojeasennossa II ( $\zeta_2$ ).
- 2) Lasketaan summa  $\zeta_1 + \zeta_2$ . Jos indeksivirhe  $i = 0$ ,  $\zeta_1 + \zeta_2 = 400^g$ . Tämä on myös hyvä kenttätarkistus.

Kuvassa 5.25 on manuaalinen pystykehän indeksi (korkeusindeksi). Tavallisempi on automaattinen korkeusindeksi. Periaate on samanlainen kuin itsetasaavissa vaaituskojeissa, ja indeksin on oltava jo likimäärin tasattu:

- Heilurikompensoattori.
- Nestekompensoattori, silikoniöljy. Lukemamikroskoopin valo joko taittuu nesteen läpi tai heijastuu sen pinnalta. Katso [Kahmen ja Faig \(1988\)](#) sivut 394, 395.
- Elektronisissa teodoliiteissa tämä kompensoatiomekanismi on digitaalisesti toteutettu digitaalisen kallistusmittarin avulla. Siis indeksiä ei säädetä, vaan lukema korjataan laskennallisesti kallistusmittarin lukeman perusteella.

Zeniittikulmamittauksessa kojevirheet ovat pitkälti samanlaiset kuin vaakakulmien kohdalla. Osa eliminoiduu mittaamalla molemmassa kojeasennossa. Sarjahavainnoilla ei saa pienennetyksi pystykehän jaotusvirheiden vaikutusta, koska pystykehää, toisin kuin vaakakehää, ei voida irrottaa ja kääntää, katso osio 6.3. Ne mahdollistavat kuitenkin mittaus-ten oikeellisuuden tarkistamisen.

Ensimmäisen ja toisen kojeasennon havainnot tulee tehdä *mahdollisimman nopeasti peräkkäin*. Siksi zeniittikulmat on aina havaittava erikseen, ei vaakakulmien kanssa.

<sup>8</sup>Säätöruuvit ovat pieniä ja saattavat olla hieman piilossa. Säätö on huollon tehtävä.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0



KUVA 5.27. Nelibittinen Gray-koodi.



## 5.7 Elektroniset teodoliitit

Elektronisissa teodoliiteissa kaikki lukemat saadaan *numeerisina*, mikä helpottaa havaintotietojen automaattista tallennusta, tarkistusta ja mittauksen yhteydessä, ja siirtoa eteenpäin. Rahalliset säästöt mittaus-toiminnassa voivat olla huomattavia sekä mittausajan säästönä että *laadun parantumisena*, kun virhealtis havaintojen lukeminen ja käsin kirjoittaminen jää pois.

Vaikka elektroniset teodoliitit tallentavat havainnot muistiin — usein raakadataa ei edes tallenneta vaan jo esikäsitelty aineisto — on havaintojen oheistiedot (”metatieto”) kirjattava huolellisesti.

Elektronisissa teodoliiteissa on jakokehien reunoihin kuvattu erityyppisiä viivakuvioita.



### 5.7.1 Absoluuttiset koodauskehät

- <sup>9</sup> Usein käytetään *Gray-koodia*<sup>9</sup>, joka koostuu bittisarjoista, joissa jokaisessa askeleessa vain yksi bitti muuttuu. Kuvassa 5.27 on esimerkki nelibittisestä Gray-koodista, jolla on 16 eri arvoa.

- Tosisovelluksessa käytetään enemmän bittejä, esimerkiksi jos halutaan vaakakulman resoluutioksi 0,1gon, on oltava  $400 \cdot 10 = 4000$  eri arvoa. Tämä vaatii jo 12 bittiä<sup>10</sup>.

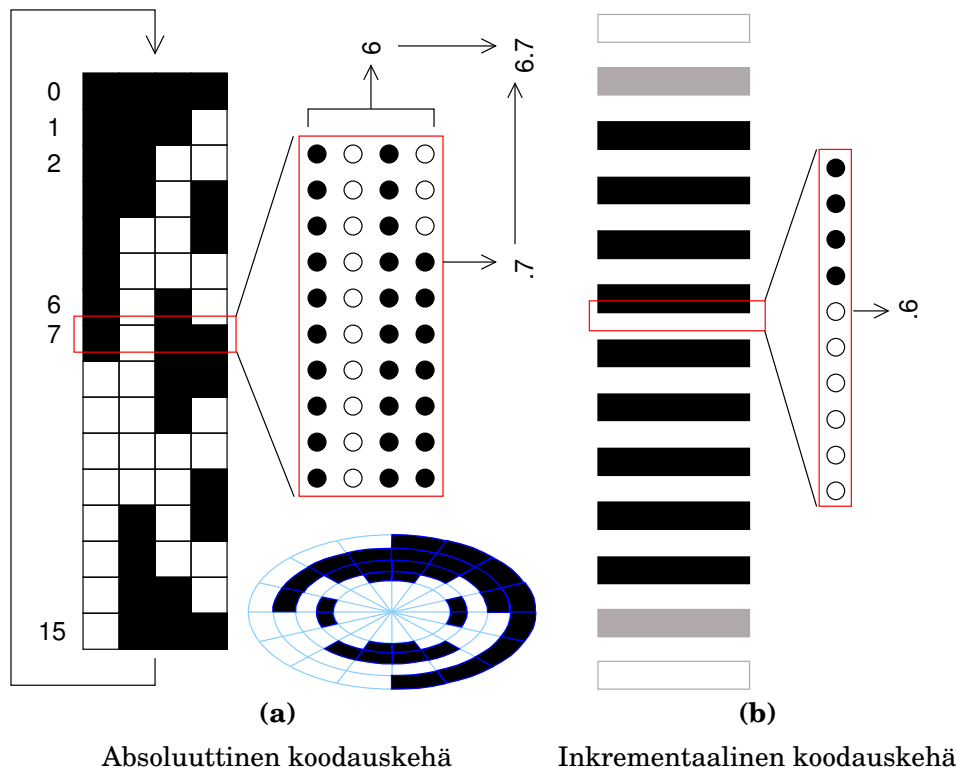
Koodi on kehän pinnalla mustavalkoisena kuviona, jota valoherkkien diodien eli valodiodien rivistö skannaa, kuva 5.28 vasemmalla.

Gray-koodin etuna on, että koko ajan tiedetään yksiselitteisesti, missä kohdassa kehää ollaan, toisin sanoen kehältä löytyy *merkitty nollasuunta*. Siksi nimitys absoluuttinen koodauskehä. Esimerkkitapauksessa tarvitaan neljä vierekkäistä valodiodiriviä, yksi jokaiselle bittikentälle.

<sup>9</sup>Frank Gray (1887–1969) oli amerikkalainen fyysikko ja elektronikko, televisioteknologian kehittäjä. Gray-koodi on osa hänelle vuonna 1953 myönnettyä patenttia.

<sup>10</sup>... koska  $2^{12} = 4096 \gtrsim 4000$ .





KUVA 5.28. Absoluuttinen ja inkrementaalinen koodauskehä.

Kehäkuvioita havaitaan sähköoptisesti, esimerkissämme valodiodirivistön, nykysovelluksissa integroidun mikropiirin, kuten CCD-ilmaisimen, avulla. Valoilmaisin havaitsee kehän mustien ja valkoisten kenttien väliiset reunat. Karkeat, absoluuttiset lukemat syntyvät kehäkuvion reunoista, lisädesimaaleja saadaan diodirivistön — tai kuvaavan valoilmaisimen — interpoloivan toiminnan avulla.

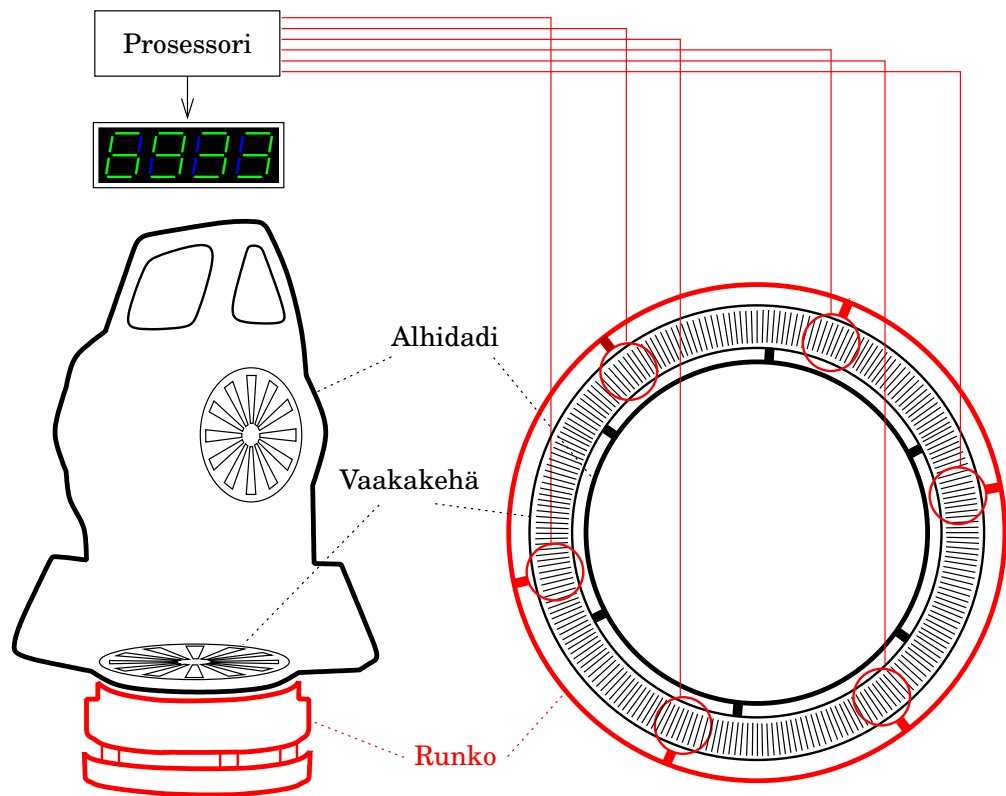
### 5.7.2 Inkrementaaliset koodauskehät

Koodauskehältä *ei* löydy merkittyä nollakohtaa. Voidaan seurata vain kojeen asennon *muutoksia* laskemalla viivoja, kuva 5.28 oikealla. Inkrementaalisessa ratkaisussa kiertosuunnan selvittämiseksi tarvitaan vähintään kaksi diodi-ilmaisinta, kuvatussa esimerkissä on kymmenen. Inkrementaalinen menetelmä voi mitata vain *suuntaeroja* eli kulmia. Karkeat lukemat syntyvät kehän viivoista laskemalla, lisädesimaaleja saadaan interpoloimalla.

### 5.7.3 Modernit automaattikojeet

Elektronisissa teodoliiteissa yleinen tekniikka on *ATR*, *automatic target recognition* eli automaattinen kohdetunnistus. Tähän tarkoitukseen on





KUVA 5.29. Elektroninen vaakakehän lukeminen: lukemia otetaan kehän kaidilta osilta. Tämä korvaa optiselta teodoliitilta tutun sarjahavaintomenetelmän.



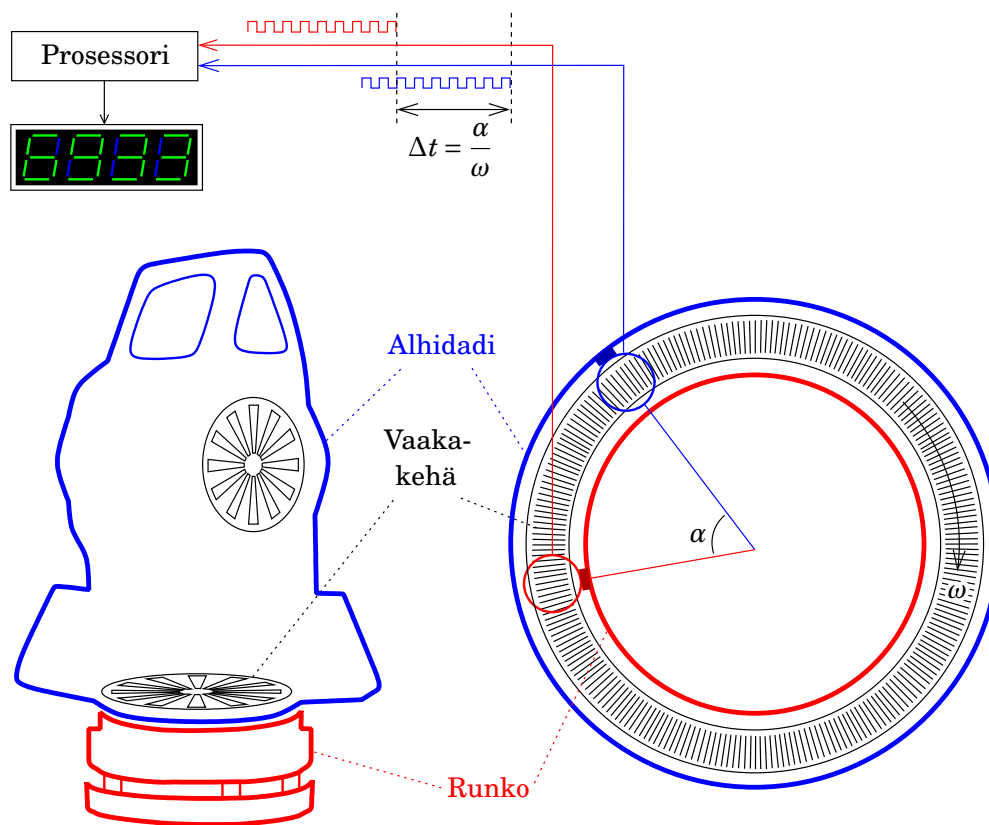
mittauskaukoputken kuvakenttään sijoitettu **CCD**-kuvailmaisin. Kaukoputki suunnataan silmämääräisesti kohteeseen. Korjaamaton lukema tulee, kuten tavallisesti, digitaalisesta koodauskehäjärjestelmästä. Lukemaan lisätään ohjelmallisesti, kuvankäsittelyn keinoin, *korjaus* **CCD**-kuvasta.

Elektronisesti luettavien kehien kanssa käytetään useita ilmaisimia, joista jokainen lukee kehän koodia eri kehän paikasta, kuva 5.29. Kaikki mitatut arvot kerätään kojeen prosessoriin, joka laskee niistä keskiarvon. Keskiarvossa kehän periodiset ja satunnaiset virheet on eliminoitu tai olennaisesti vähennetty. Vertaa optisten teodoliittien sarjahavaintomenetelmän kanssa, osio 6.3.

Elektronisella teodoliitilla on vaakakehän lukituksen irrottaminen ja sen kiertäminen — ja siis sarjahavaintomenetelmän soveltaminen käsin — tarpeeton ja mahdoton. Putken kääntäminen läpi eli kahdessa kojeasennossa mittaaminen on kuitenkin edelleen tarpeen, samoista syistä kuin optisillakin kojeilla (osio 5.5).

Joissakin kojeissa käytetään nopeasti *pyörivää kehää*, samanlainen





KUVA 5.30. Pyörivä kehä muuntaa kulmamittauksen aikaeron mittaukseksi.

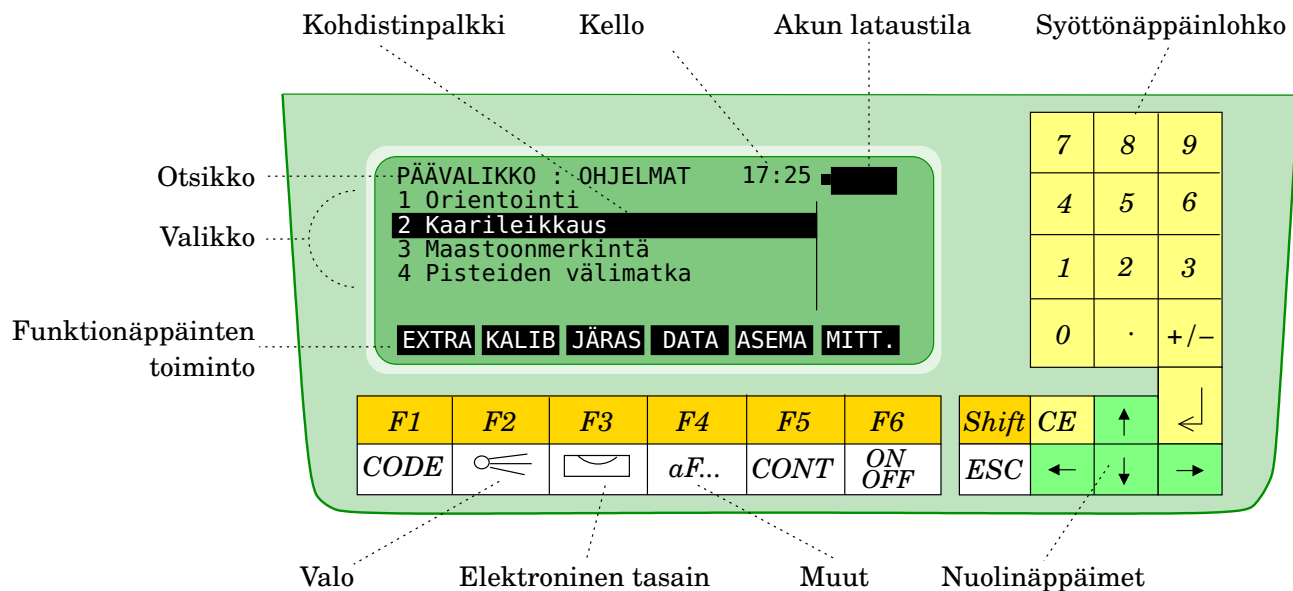
teknologia kuin tietokoneiden levyasemissa. Tässä dynaamisessa ratkaisussa valoilmaisimet muuntavat kehässä olevan viivakuvion blokkisignaalksi, kuva 5.30. Kahden blokkisignaalin välinen aikasiirtymä yhdessä kehän pyörimisnopeuden  $\omega$  kanssa antaa suoraan ilmaisinten välisen kulman  $\alpha(t)$  ajan funktiona — plus tuntematon vakio, ”ambigui-teetti<sup>11</sup>”, joka ei riipu ajasta. Tästä syystä myös pyörivä kehä -menetelmä <sup>11</sup> on *inkrementaalinen*: se voi mitata vain kulman *muutoksia*.

Menetelmän edut ovat:

- Se muuntaa kulmamittauksen elektroniseksi aikaeromittaukseksi, joka voi olla erittäin tarkka.
- Kehän jakoviivojen valmistustarkkuus ei ole kriittinen, kehän tasainen pyörimisnopeus on.

Elektronisten teodoliittien mittausjärjestelmien ja teknisten ratkaisujen kirjo on laaja ja nopeasti kehittyvä. Siksi kuvailemme seuraavassa osiossa tarkemmin vain yhtä esimerkkitapausta.

<sup>11</sup> Ilmeisesti, koska ilmaisimelle kaikki kehän viivat ovat samannäköisiä.



KUVA 5.31. Leica TCA2003-robottitakymetrin ohjauspaneeli.



## 5.8 Case: Leican robottitakymetri TCA2003

TCA2003 (Leica, 1997) on hyvä esimerkki kohtalaisen nykyaikaisesta elektronisesta teodoliitista eli *takymetr*istä. Koje mittaa vaaka- ja pystykulmat sekä vinoetäisyydet. Sisäänrakennetun ohjelmistonsa laskutoimitukset ovat varsin monipuolisia.

Kojeen mittaustarkkuus on valmistajan ilmoituksen mukaan  $0'',5$  eli  $0,15\text{ mgon}$  vaaka- ja pystykulmamittauksessa ja  $1\text{ mm} + 1\text{ ppm}$  etäisyysmittauksessa. Pisin mittausetäisyys tavallisissa sääoloissa on  $3,5\text{ km}$ .

Kojeessa on koaksiaalinen ATR (automaattinen kohdetunnistus, alaosio 5.7.3), joka osallistuu myös kulmamittaukseen. CCD-ilmaisimella mitataan prisman heijastaman lasersäteiden poikkeamat pysty- ja vaakasuunnassa ja ohjaa moottorit niin, että hiusviivaristikko siirtyy melkein prisman päälle. Pieni jäljellä oleva poikkeama mitataan CCD-kuvassa ja mittauskulmat korjataan vastaavasti.

ATR-järjestelmä voidaan myös ohjelmoida seuraamaan liikkuvaa kohdetta tai systemaattisesti etsimään — skannaamaan — kohdetta, jos se ei ole odotetussa paikassa.

Kojeeseen sisältyy *itsekalibrointiominaisuuksia*, mittaushjelmia, joilla voidaan määrittää pystykehän indeksivirhe (alaosio 5.6.3), kollimaatiovirhe (tähtäysakseli ei ole kohtisuorassa vaaka-akselia vasten, alaosio 5.6.1), tappikaltevuus (vaaka- ja pystyakselit eivät ole keskenään kohtisuoria, alaosio 5.6.2) sekä etäisyysmittarin *nollapiste-* eli *vakiovirhe*





KUVA 5.32. Leica TCA2003 -robottitakymetri.

(alaosio 7.4.4).

Monet etäisyysmittauksen ”korjaukset” eli *reduktiot*, kuten sääkorjaukset, reduktio vaakatasolle ja jopa reduktio karttaprojektiotasolle (esimerkiksi käyttäen Gauss-Krüger- tai *UTM*-projektiota) voidaan suorittaa jo kojeessa.

Kojeessa on *laserluoti*, joka toimii samalla tavalla kuin optinen luoti — tarkkuuskin on samaa luokkaa, hieman parempi kuin  $\pm 1\text{ mm}$  — mutta valo kulkee toiseen suuntaan, teodoliitista alaspäin maanpintaan. Tasaus- ja keskistysmenettely on muuten sama kuin optisen luodin tapauksessa.

Kojeessa on rasiatasaimen lisäksi tarkka elektroninen tasain. Näyttö on *LCD* ja samannäköinen kuin oikea rasiatasain. Se on itsekalibroiva, ja kojeen kiertämistä  $100^\circ$  tai  $200^\circ$  jokaisen tasauksen yhteydessä (kuva 5.8) ei tarvita.

Koje on pitkälle automatisoitu ja tarjoaa esiohjelmoidun 50 pisteen seurantamittauksen. Tämä on hyödyllistä etenkin muodonmuutosmittauksissa teollisuudessa ja rakennusprojekteissa. On käytettävissä kah-



ta ohjelmointikieltä: [GSI \(Leica\)](#) yksinkertaiseen käyttöön ja GeoCOM edistyneeseen käyttöön. Lisäksi on olemassa GeoBasic-ympäristö, joka mahdollistaa lisäsovellusten kehittämisen [PC](#)-ympäristössä ja niiden siirtämisen kojeeseen.

Datanvaihto kojeen ja tietokoneen välillä voi tapahtua kahdella tavalla:

- Sarjaliitännän ([RS232](#)) kautta. Tämä tekniikka on vanhentunut, nykylaitteissa käytetään [USB](#)-porttia tai Bluetoothia.
- Pysyvällä [PCMCIA](#)-muistikortilla. Tallennuskapasiteetti voi olla 512kB–4MB. Kortin formaatti on MS-DOS-tiedostojärjestelmä [FAT](#). Myös tämä ratkaisu on [USB](#)-muistitikkujen myötä vanhentunut.

Itse havaintoaineiston formaatti on Leican suunnittelema [GSI \(Leica\)](#) (Geo Serial Interface), joka on dokumentoitu käsikirjassa.



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Kuvaa teodoliitin kolmea akselia. Mitkä niistä ovat keskenään kohtisuoria?
- 2) Mittaaminen tunnetusta pisteestä edellyttää, että teodoliitti *keskistetään* ja *tasataan*. Selosta prosessin vaiheet tapauksessa, jossa teodoliitissa on optinen luoti tai laserluoti.
- 3) Selosta pakkokeskistuksen idea. Miksi se on hyödyllinen?
- 4) Kehien lukeminen. Mikä on asteikkomikroskooppi ja mikä kohdistusmikroskooppi? Tee piirros!
- 5) Selosta Gray-koodit.
- 6) Mikä on ero absoluuttisen ja inkrementaalisen koodauksen välillä?
- 7) Mikä on [ATR](#), automaattinen kohdetunnistus?
- 8) Selosta kollimaatiovirhe, tappikaltevuus ja indeksivirhe. Miten ne määritetään?
- 9) Teodoliittia ei saa koskaan suunnata suoraan Aurinkoon. Löytyykö tähän sääntöön poikkeuksia? Googlaa ”Roelofs prism”.







# Kulmamittaus

## 6

[...] When preparing a third American edition for the press, Blunt decided that Bowditch had revised Moore's work to such an extent that Bowditch should be named as author.

The title was changed to *The New American Practical Navigator* and the book was published in 1802 as a first edition. Bowditch vowed while writing this edition to "put down in the book nothing I can't teach the crew," and it is said that every member of his crew including the cook could take a lunar observation and plot the ship's position.

---

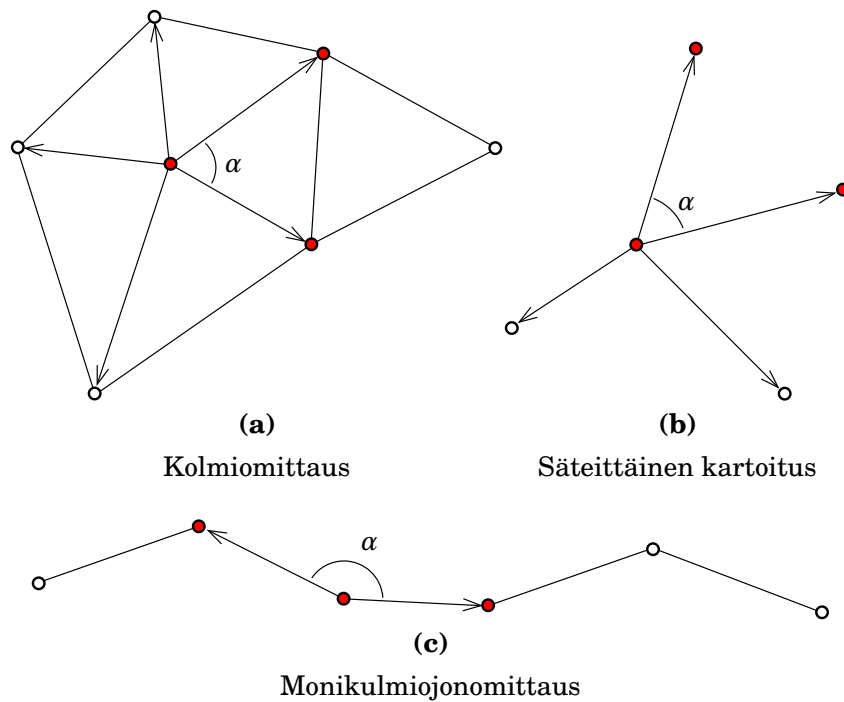
Nathaniel Bowditchin elämäkerta, teoksessa *The American Practical Navigator*, *Bowditch*, 2017 edition



### 6.1 Vaakakulmamittaus

Perinteisessä maastomittauksessa vaakakulmia mitataan käytettäväiksi kolmessa eri yhteydessä:

- 1) Suoritetaan *kolmiomittaus*. Kolmioverkon pisteiden välillä mitataan vaakakulmia ja etäisyyksiä eli kolmiosivun pituuksia. Kolmioiden sivut voivat pisimmillään olla kymmeniä kilometrejä pitkiä. Havainnoista lasketaan kolmiopisteiden geodeettiset koordinaatit, hierarkkisesti verkon eri tihennysvaiheissa. Näin Maanmittauslaitos on tihentänyt Geodeettisen laitoksen luoman ensimmäisen luokan kolmioverkon.
- 2) Kolmioverkon jatkotihennyksenä suoritetaan *monikulmiojonomittaus*. Tässä menetelmässä mitataan peräkkäisten jonopisteiden väliset sivunpituudet ja pisteiden taitekulmat (kuva 6.1c) jonopisteiden koordinaatien määrittämiseksi. Laskentaa varten jonon alku-



KUVA 6.1. Eri vaakakulmamittauksen käyttötilanteita.

ja loppupisteet on oltava tunnettuja, esimerkiksi korkeamman luokan kolmiomittauksesta.

- 3) Monikulmiojonon pisteistä käsin suoritetaan esimerkiksi *säteittäinen kartoitus*, kuvat 6.1b ja 8.10.

GNSS-mittaus on korvannut osan näistä havaintotekniikoista. Kolmiomittauksista ei enää suoriteta missään, kun taas monikulmiojonomittauksista käytetään vain tilanteissa, joissa GNSS ei ole käyttökelpoinen, kuten maanalaisissa mittauksissa — tunnelit — ja korkearakenteisissa kaupunkimaisemissa.

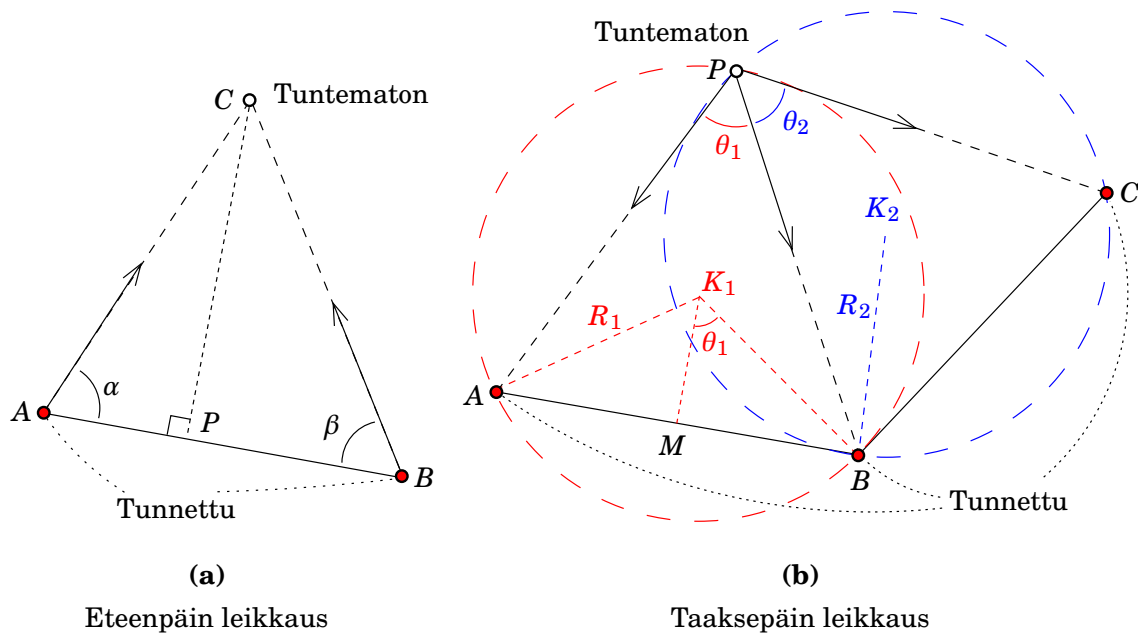


## 6.2 Eteen- ja taaksepäin leikkaus

- <sup>1</sup> Usein käytetyt geometriat ovat *eteenpäin* ja *taaksepäin leikkaus*<sup>1</sup>, kuva 6.2.

**Eteenpäin leikkaus** toimii seuraavasti: olkoon tunnettujen pisteiden  $A$  ja  $B$  koordinaatit  $(x_A, y_A)$  ja  $(x_B, y_B)$ . Pisteiden välinen, tuntemattoman pisteen  $C$  kohtisuora projektio piste olkoon  $P$ , sen

<sup>1</sup>Ruots. *avskärning och inskärning*, engl. *intersection and resection*, holl. *voorwaartse en achterwaartse insnijding*, saks. *Vorwärtsschnitt und Rückwärtsschnitt*.



Kuva 6.2. Eteen- ja taaksepäin leikkaus.

koordinaatit  $(x_P, y_P)$ . Silloin

$$PC = AP \tan \alpha = PB \tan \beta,$$

siis

$$AB = AP + PB = PC \cot \alpha + PC \cot \beta = PC (\cot \alpha + \cot \beta).$$

Tästä

$$PC = \frac{AB}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

ja

$$AP = \frac{AB \cot \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta}, \quad PB = \frac{AB \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$

Nyt käytetään näitä janoja, eli vastaavasti kertoimia  $\cot \alpha$  ja  $\cot \beta$ , *painoina* pisteen  $P$  koordinaattien laskemiseksi pisteiden  $A$  ja  $B$  koordinaattien painotettuina keskiarvoina:

$$x_P = \frac{x_A \cot \beta + x_B \cot \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta}, \quad y_P = \frac{y_A \cot \beta + y_B \cot \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$

Tämän jälkeen leikkauspisteen  $C$  koordinaattien suorat laskenta-kaavat ovat

$$x_C = x_P + \tan \alpha (y_P - y_A) = x_P + \frac{y_B - y_A}{\cot \alpha + \cot \beta},$$

$$y_C = y_P - \tan \alpha (x_P - x_A) = y_P - \frac{x_B - x_A}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$



**Taaksepäin leikkaus** on olennaisesti vaikeampaa, koska kyse on *kään-  
teisestä ongelmasta*. Ongelmaa tutkivat jo Snellius ja Laurent Pot-  
henot<sup>2</sup>, ja usein se nimetään heidän mukaansa.

Olkoon (kuva 6.2b)  $M$  pisteiden  $A$  ja  $B$  keskipiste. Jos tuntematto-  
masta pisteestä  $P$  on mitattu kulma  $\theta_1$  pisteiden  $A$  ja  $B$  välillä, on  
tämä piste ympyrän kehällä, joka kulkee pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta,  
ja jonka keskipisteestä  $K_1$  katsottuna pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen  
kulma on  $2\theta_1$ .

Jana  $MK_1$  on kohtisuorassa  $AB$ :hen nähden: keskipisteen  $M$  koor-  
dinaatit  $(x_M, y_M)$  lasketaan yllä johdettujen kaavojen avulla eri-  
koistapauksessa  $\alpha = \beta$ . Pisteestä  $K_1$  koordinaatit lasketaan seuraa-  
valla tavalla — muista, että  $\alpha$ :n roolissa on nyt  $90^\circ - \theta_1$ :

$$\begin{aligned}x_{K_1} &= x_M + \frac{1}{2} \cot \theta_1 (y_B - y_A) = \frac{1}{2} (x_A + x_B) + \frac{1}{2} \cot \theta_1 (y_B - y_A), \\y_{K_1} &= y_M - \frac{1}{2} \cot \theta_1 (x_B - x_A) = \frac{1}{2} (y_A + y_B) - \frac{1}{2} \cot \theta_1 (x_B - x_A).\end{aligned}$$

Ympyrän säde saadaan Pythagoraan avulla:

$$R_1 = \frac{1}{2 \sin \theta_1} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Koska on toinenkin pistepari  $B$  ja  $C$ , jonka kautta kulkee oma  
ympyrä, keskipisteenä  $K_2$  ja säteenä  $R_2$ , meillä on kahta ympyrää  
kuvaava, kvadraattinen yhtälöpari:

$$(x - x_{K_1})^2 + (y - y_{K_1})^2 = R_1^2, \quad (x - x_{K_2})^2 + (y - y_{K_2})^2 = R_2^2.$$

Tästä voidaan ratkaista tuntemattoman leikkauspisteen  $P$  koor-  
dinaatit  $(x, y)$  — ainakin periaatteessa. Ratkaisumenetelmiä on  
monta, esimerkiksi linearisointi likiarvoparin  $(x_0, y_0)$  suhteen ja  
iteratiivinen ratkaisu.

Niillä kahdella ympyrällä on *kaksi leikkauspistettä*, joista on valit-  
tava oikea ratkaisu eikä siis piste  $B$ ...

**Singulaarisuus** Taaksepäin leikkauksen tarkkuus riippuu pis-  
teiden geometriasta. Jos pisteet  $A, B, C$  ja tuntematon piste  
sijaitsevat samalla ympyrällä, on ratkaisu jopa mahdoton:  
puhutaan *singulaarisuudesta*. Silloin ympyrät ovat identti-  
isiä ja mikä tahansa ympyrän piste kelpaa ratkaisupisteek-  
si. Puhutaan myös *vaarallisesta ympyrästä*: jo lähellä tätä  
geometriaa tarkkuus huononee uhkaavasti.

<sup>2</sup>Laurent Pothénat (1650–1732) oli ranskalainen matemaatikko ja geodeetti.



Huomaa myös, että tilanne on käsitteellisesti samanlainen jos mitataan kaksi *etäisyyttä*  $R_1 = PK_1$  ja  $R_2 = PK_2$  nyt *tunnetuihin* pisteisiin  $K_1$  ja  $K_2$ . Tässä  $P$  on tuntematon piste, koordinaatit  $(x, y)$ , ja singulariteetti on tapaus, jossa  $K_1$ ,  $K_2$  ja  $P$  ovat suoralla viivalla.

Etäisyysmittausta käyttäessä ei puhuta eteen- ja taaksepäin leikkauksesta, mutta ne ovat samanlaisia tilanteita.



### 6.3 Sarjahavaintomenetelmä

Optisen teodoliitin vaakakehän jaotus on valmistettu huolellisesti, mutta se on aina epätarkka. Jaotuksen jokaisen goonin pitäisi olla samankokoinen, tarkasti yksi gooni, muttei todellisuudessa ole. Kuitenkin jaotuksen kaikkien goonien summa on aina tarkasti 400 gon. Siksi jaotusvirheiden vaikutus voidaan minimoida mittaamalla sama kulma *eri vaakakehän sektoreiden* avulla ja ottamalla näistä mittauksista keskiarvo. Tämä periaate toteutuu *sarjahavaintomenetelmässä*.

Tässä runkomittauksessa perinteisesti käytetyssä menetelmässä mitataan sama suuntavyyhti useita kertoja — *sarjoja* — sillä tavalla, että sarjojen välillä *irrotetaan*<sup>3</sup> vaakakehä ja *käännetään* se (määrällä noin  $200^\circ/n$ , jossa  $n$  on sarjojen lukumäärä). Näin saadaan käyttöön vaakakehän eri sektorit ja systemaattiset virheet, esimerkiksi vaakakehän jaotusvirheiden aiheuttamat, minimoituvat, kun sarjoista lasketaan keskiarvo.

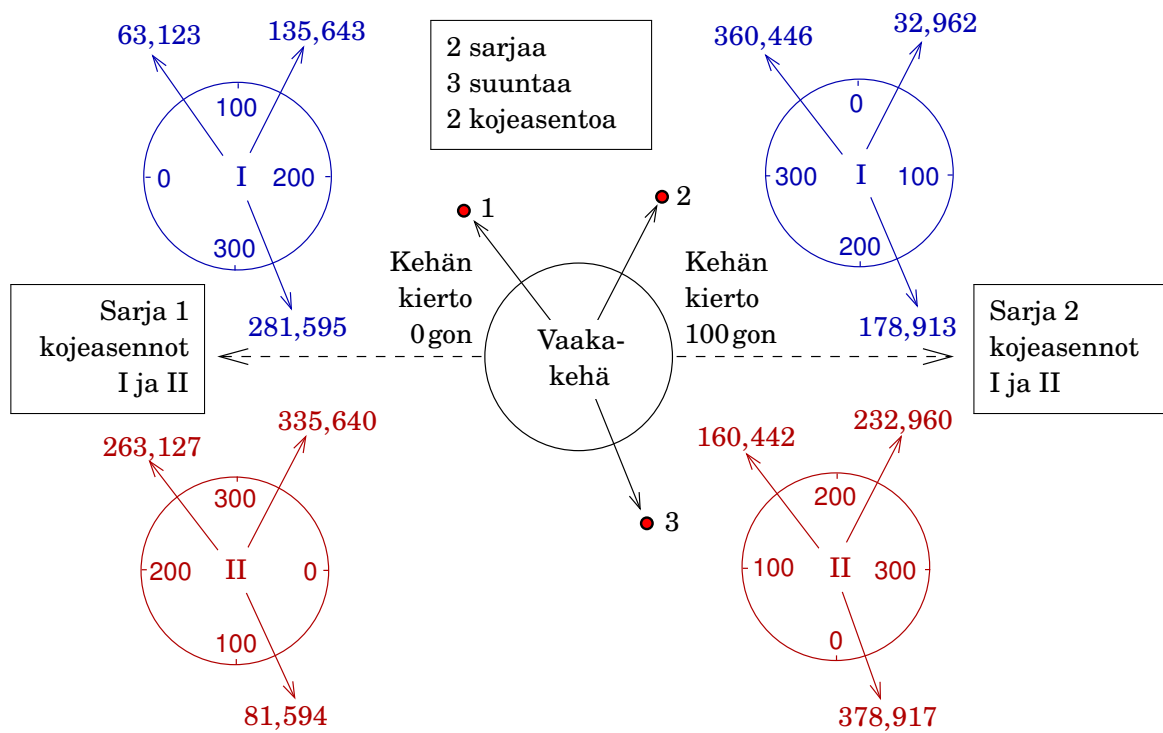
Sarjamittauksessa käännetään myös aina kojeen kaukoputki läpi — molemmat akselit  $200^\circ$  — siis mitataan sekä ensimmäisessä että toisessa kojeasennossa.

Seuraavat virheet eliminoiduvat havaitsemalla kahdessa kojeasennossa: kollimaatiovirhe ja tappikaltevuus, akseleiden leikkausvirhe, vaakakehän ja mittauskaukoputken epäkeskisyydet. Sarjahavaintomenetelmässä vaakakehän jaotusvirheiden vaikutus vähenee olennaisesti. Tasaus- tai keskistysvirheet *eivät* eliminoidu! Katso [Tikka \(1991\)](#), sivut 38–40.

Havaintojen hylkäys:

- Jos sarjahavaintomenetelmää käyttäessä sarjat eivät sovi keske-

<sup>3</sup>Vaakakehän lukitusruuvi on suojattu kannella. Näin ei vahingossa käännetä kehää mittauksen aikana.



KUVA 6.3. Sarjahavaintomenetelmä. Tässä tapauksessa suoritetaan kolmen suunnan kahden sarjan mittaus molemmassa kojeasennossa.

nään yhteen, pitää *kaikki* uusia. Yksittäistä sarjaa ei saa hylätä, koska se väärentäisi havaintoaineiston tilastollisia ominaisuuksia.

- Yksittäisen tähtäyssuunnan voi hylätä kaikista sarjoista.

Elektronisella teodoliitilla *ei tehdä sarjahavaintoja* — tarkemmin sanotuna, koje tekee ne itse sisäisesti, katso osio 5.7.



## 6.4 Vaakakulmien asematasoitus

*Asematasoitus* eli teodoliitilla tehtyjen useiden vaakasuunnan havaintosarjojen yhdistäminen yhdeksi optimaaliseksi ratkaisuksi eli mittaukseksi on *tasoitustehtävä*, vaikkakin yksinkertainen sellainen. Tavallisesti se ratkaistaan jo havaintokirjassa.

Modernit elektroniset takymetrit eivät tarvitse asematasoitusta eivätkä suorita osiossa 6.3 kuvattua sarjamittauksia. Tässä menetelmä kuvataan kuitenkin historiallisista syistä ja menetelmän kiinnostavuuden vuoksi. Tasoituslaskua käsitellään perusteellisemmin luvuissa 14 ja 15.



### 6.4.1 Havaintoyhtälöt

Seuraavassa laskuesimerkissä on mitattu neljä mittausarjaa kolmeen tähtäys-suuntaan. Jokaisen sarjan kaksi kojeasentoa I ja II on jo yhdistetty. Esimerkissä on sarjoja  $s = 4$ , tähtäyksiä  $r = 3$ , siis havaintoja on  $n = rs = 12$ . Tuntemattomien tähtäysten määrä sarjakeskiarvossa on  $r - 1 = 2$ . Jokaisessa sarjassa on estimoitavana myös yksi orientaatiotuntematon<sup>4</sup>. Ylimääräisiä havaintoja (redundanssi, vapausasteiden lukumäärä) on siis

$$b = rs - (r - 1 + s) = (r - 1)(s - 1).$$

Havaintoyhtälöt ovat

$$\underline{\theta}_{ij} + \underline{v}_{ij} = \hat{\alpha}_j - \hat{\Omega}_i, \quad (6.1)$$

jossa  $i = 1, \dots, 4$  — yleisesti  $i = 1, \dots, s$  — on mittausarjan numero,  $j = 1, \dots, 3$  — yleisesti  $j = 1, \dots, r$  — tähtäys-suunnan numero,  $\Omega_i$  sarjan vaakakehän orientaatiotuntematon,  $\alpha_j$  tähtäksen suuntatuntematon (mitatun suunnan atsimuutti) ja  $\underline{\theta}_{ij}$  (raaka) suuntahavainto.

Käytetään ”hattua” estimaattorin merkinä, kuten on tapana tilastotieteessä, sekä alleviivataan stokastisia suureita.

Jos havaintojen vektori on

$$\underline{\ell} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \underline{\theta}_{11} & \underline{\theta}_{12} & \underline{\theta}_{13} & \underline{\theta}_{21} & \underline{\theta}_{22} & \underline{\theta}_{23} & \underline{\theta}_{31} & \underline{\theta}_{32} & \underline{\theta}_{33} & \underline{\theta}_{41} & \underline{\theta}_{42} & \underline{\theta}_{43} \end{array} \right]^T$$

ja tuntemattomien vektori

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\Omega}_1 & \hat{\Omega}_2 & \hat{\Omega}_3 & \hat{\Omega}_4 \end{array} \right]^T,$$

silloin *rakennematriisi* on, neljän mittausarjan ja kolmen tähtäksen tapauksessa,

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & -1 & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ \hline 1 & & & & -1 & \\ & 1 & & & -1 & \\ & & 1 & & -1 & \\ \hline 1 & & & & & -1 \\ & 1 & & & & -1 \\ & & 1 & & & -1 \end{array} \right],$$

jolloin havaintoyhtälöt kirjoitetaan standardimuotoon

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A \hat{x},$$

$\underline{v}$  ollessa jäännösvirheiden vektori.

Yksiselitteisen ratkaisun saamiseksi on myös kiinnitettävä yksi suunta tai suuntien lineaariyhdistelmä — ainoastaan suhteellisista kulmahavainnoista ei voi ratkaista absoluuttisia suuntia. Siis lisäksi vaaditaan, vaikkapa

$$\alpha_1 = 0. \quad (6.2)$$

Tämä on täysin mielivaltainen. Yhtä hyvin voitaisiin valita  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0$ , tai vaikkapa  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ , joka olisi ainakin ”demokraattinen”.

Seuraavassa esitetään ilman muodollista todistusta, miten voi laskea asematasoituksen tuloksen ja miten laskenta voidaan järjestää yksinkertaiseksi taulukoksi. Menetelmä on tilastollisesti optimaalinen.



#### 6.4.2 Kulmamuunnos

Ensin suoritetaan *kulmamuunnos*: vähennetään jokaisesta havainnosta  $\underline{\theta}_{ij}$ , joka ei ole sarjan ensimmäinen havainto, juuri tuon sarjan ensimmäinen havainto  $\underline{\theta}_{i1}$ :

$$\underline{\theta}'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\theta}_{ij} - \underline{\theta}_{i1}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 2, \dots, r.$$

Vähennetään havaintoyhtälöryhmän 6.1 rivit toisistaan, tuloksena

$$\underline{\ell}' + \underline{v}' = A' \hat{x}$$

jossa

$$\underline{\ell}' = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} \underline{\theta}'_{12} & \underline{\theta}'_{13} & \underline{\theta}'_{22} & \underline{\theta}'_{23} & \underline{\theta}'_{32} & \underline{\theta}'_{33} & \underline{\theta}'_{42} & \underline{\theta}'_{43} \end{array} \right]^T$$

<sup>4</sup>Orientaatiotuntematon ilmentää sitä tosiasiaa, että teodoliitti *ei osaa mitata absoluuttisia vaakasuuntia eli atsimuutteja*. Se osaa mitata vain suuntaeroja eli kulmia. Siksi kojeen vaakakehän nollakohdan tuntematon atsimuutti jokaisessa mittaussarjassa laitetaan lisätuntemattomana tasoitustehtävään.

Tilanne on samanlainen kuin GPS-mittauksessa. Sielläkin vastaanottimen kaikki havainnot sisältävät yhteisen kellovirhetuntemattoman  $\Delta T$ , ja siksi havaintosuuretta kutsutaan pseudoetäisyys- eikä etäisyyshavainnoksi. Samoin voitaisiin tässäkin puhua ”pseudosuuntahavainnoista”. Tällaisia ei-kiinnostavia lisätuntemattomia kutsutaan *kiusaparametreiksi*.





ja

$$A' = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & & 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & & 0 \\ -1 & & 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & & 0 \\ -1 & & 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & & 0 \\ -1 & & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow A' = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{array} \right],$$

jos tuntemattomien vektori lyhennetään vastaavasti:

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\alpha}_1 \quad \hat{\alpha}_2 \quad \hat{\alpha}_3 \mid \hat{\Omega}_1 \quad \hat{\Omega}_2 \quad \hat{\Omega}_3 \quad \hat{\Omega}_4]^\top \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = [\hat{\alpha}_1 \quad \hat{\alpha}_2 \quad \hat{\alpha}_3]^\top.$$

Nyt voidaan määritellä seuraavat implisiittiset tuntemattomat:

$$\hat{\alpha}'_j \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\alpha}_j - \hat{\alpha}_1, \quad j = 2, \dots, r,$$

mikä vastaa siihen, että rakennematriisi yksinkertaistetaan vieläkin seuraavasti:

$$A' = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{array} \right] \Rightarrow A'' = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \end{array} \right]$$

jos uudet tuntemattomat ovat

$$\hat{\mathbf{x}}' = [\hat{\alpha}'_2 \quad \hat{\alpha}'_3]^\top.$$

Nämä uudet tuntemattomat ovat nyt suhteessa ensimmäiseen suuntaan, siis *kulmamuunnetyt* suuntatuntemattomat.

Havaintoyhtälöt ovat nyt

$$\begin{bmatrix} \theta'_{12} \\ \theta'_{13} \\ \theta'_{22} \\ \theta'_{23} \\ \theta'_{32} \\ \theta'_{33} \\ \theta'_{42} \\ \theta'_{43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v'_{12} \\ v'_{13} \\ v'_{22} \\ v'_{23} \\ v'_{32} \\ v'_{33} \\ v'_{42} \\ v'_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & \\ & 1 \\ 1 & \\ & 1 \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}'_2 \\ \hat{\alpha}'_3 \end{bmatrix}$$



eli

$$\begin{bmatrix} \underline{\theta}'_{i2} \\ \underline{\theta}'_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}'_{i2} \\ \underline{v}'_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}'_2 \\ \hat{\alpha}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}'_2 \\ \hat{\alpha}'_3 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (6.3)$$

Optimaalinen ratkaisu on *keskiarvo*, katso yhtälö 14.6. Yleisessä tapauksessa

$$\hat{\alpha}'_j = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \theta'_{ij}, \quad j = 2, \dots, r.$$

*Tasoitettu kulmamuunnos on sarjojen kulmamuunnosten keskiarvo.*

Lisäksi voimme määrittää johdonmukaisesti

$$\hat{\alpha}'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \theta'_{i1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\theta_{i1} - \underline{\theta}_{i1}) = 0.$$

$\alpha'$ -arvot ovat tasoitettuja mutta edelleen suhteellisia suuntia, eivätkä absoluuttisia atsimuutteja.

Olemme eliminoineet orientaatiotuntemattomat  $\Omega_i$  havaintoyhtälöstä, ja hyvää näin. Olemme kuitenkin kiinnostuneet jäännösvirheistä.



### 6.4.3 Jäännösvirheet ja vapausasteet

Nyt kun tuntemattomat  $\hat{\alpha}'_j$  on laskettu, tarkemmin *estimoitu* pienimmän neliösumman menetelmän avulla, voidaan laskea *jäännösvirheet* eli residuaalit. Yhtälö 6.3 antaa jonkinlaisia jäännösvirheitä:

$$\underline{v}'_{ij} = \hat{\alpha}'_j - \theta'_{ij}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 2, \dots, r.$$

Ongelma tässä on, että ykkössuunta ei ole mukana: jos se olisi, sen jäännösvirhe olisi aina

$$v'_{i1} = \hat{\alpha}'_1 - \theta'_{i1} = 0 - 0 = 0.$$

Oikeat residuaalit saadaan seuraavasti:

$$\underline{v}_{ij} = \underline{v}'_{ij} - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \underline{v}'_{ik}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, r, \quad (6.4)$$

joiden jokaisen sarjan keskiarvo suuntien yli, mukaan lukien ykkössuunta, häviää. Laskutoimitus 6.4 näyttää, mitä tapahtuu jäännösvirheille,



kun jokaiselle sarjalle  $i = 1, \dots, s$  annetaan oma orientaatiotuntematon  $\Omega_i$ , sarjakohtainen vakio, joka minimoi sarjan jäännösvirheiden neliösumman.

Olkoon suuntahavaintojen  $\underline{\theta}_{ij}$  keskivirhe  $\sigma$  — ja sama kaikille — ja olkoot suuntahavainnot korreloimattomia. Siinä tapauksessa havaintojen *varianssimatriisi* on

$$\Sigma_{\ell\ell} = \text{Var}\{\underline{\ell}\} = \sigma^2 I_{s \times r},$$

jossa  $I_{s \times r}$  on  $(s \times r) \times (s \times r)$ -kokoinen yksikkömatriisi.

Tässä tapauksessa suure (”siirtosuure”, Baarda, 1968)

$$\frac{1}{\sigma^2} \underline{\mathcal{E}} = \underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \underline{v}_{ij}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} \underline{v}_{ij}^2$$

on jakautunut  $\chi_b^2$ -jakauman mukaan, jonka odotusarvo on  $b$ , *vapausasteiden* eli ylimääräisten havaintojen lukumäärä. Katso osio 15.4.

Aiemmin nähtiin, että  $b = (r-1)(s-1)$ , kulmamuunnosten (riippumattomien suuntamittausten) lukumäärä kerrottuna *ylimääräisten* mittaus-sarjojen lukumäärällä. Siis  $\underline{\mathcal{E}}/\sigma^2$  on jakautunut  $\chi_{(r-1)(s-1)}^2$ :n mukaan ja sen odotusarvo on  $(r-1)(s-1)$ . Siis:

$$E\left\{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} \underline{v}_{ij}^2\right\} = (r-1)(s-1) \implies \sigma^2 = E\left\{\frac{\sum_{i,j} \underline{v}_{ij}^2}{(r-1)(s-1)}\right\},$$

jä näemme, että

$$\widehat{\sigma^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(r-1)(s-1)} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \underline{v}_{ij}^2$$

on yhden havainnon varianssin  $\sigma^2$  harhaton *estimaattori*:

$$E\{\widehat{\sigma^2}\} = \sigma^2.$$

Suuretta  $\sigma$  kutsutaan ”*painoyksikön keskivirheeksi*”. Se edustaa tyyppillisen havainnon epävarmuutta eli keskivirhettä, tässä tapauksessa yksittäisen suunnan raakahavainnon.

Palataan aiheeseen tasoitus luvussa 14.



#### 6.4.4 Asematasoituksen laskentataulukko

Asematasoitus koostuu seuraavista askeleista:

- 1) Kiinnitetään mielivaltaisuus suuntien määrittelyssä, esimerkiksi kiinnittämällä ensimmäinen suunta nolnaan,  $\theta'_{i1} = 0$ ; tätä kutsutaan *kulmamuunnokseksi*. Se tehdään vähentämällä ensimmäinen havaittu suuntaluku saman sarjan muista suuntaluvuista.



- 2) Lasketaan suuntahavaintojen *keskiarvo kaikkien mittaussarjojen kesken* ("sarjakeskiarvo")

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \underline{\theta}'_{ij}, \quad j = 1, \dots, r$$

jokaiselle tähtäyssuunnalle  $j$ .

- 3) Lasketaan havaintojen jäännösvirheet näiden *sarjakeskiarvojen* suhteen:

$$\underline{v}'_{ij} = \underline{\theta}'_{ij} - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \underline{\theta}'_{kj}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, r.$$

- 4) Lasketaan "ensimmäisten jäännösvirheiden"  $\underline{v}'_{ij}$  keskiarvot jokaisen sarjan kaikkien suuntien yli:

$$\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \underline{v}'_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \left( \underline{\theta}'_{ij} - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \underline{\theta}'_{kj} \right), \quad i = 1, \dots, s.$$

- 5) Lasketaan lopulliset jäännösvirheet

$$\underline{v}_{ij} = \underline{v}'_{ij} - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \underline{v}'_{ik}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, r,$$

mikä vastaa juuri jäännösvirheitä, jos annettaisiin jokaiselle sarjalle oman orientaatiotuntemattoman  $\hat{\Omega}_i$  suuntatuntemattomien  $\hat{a}_j$  lisäksi, kuten alkuperäisessä havaintoyhtälöryhmässä.

Lopputuloks on *laskentapohja*, esitettyinä taulukossa 6.1, joka pitää sisälleen nämä operaatiot ja jonka pitäisi olla selittämättäkin selvä.

Taulukon täyttämisen jälkeen — järjestyksessä: keskiarvo sarjojen yli,  $v'$ , sarjakohtainen summa,  $v$  — yhden tähtäyksen, eli *painoyksikön*, keskivirhe lasketaan ensin laskemalla jäännösvirheiden neliösumma kaikkien sarjojen ja tähtäyssuuntien jäännösvirheiden yli:

$$\underline{v}^T \underline{v} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \underline{v}_{ij}^2 = [vv]$$

- (jälkimmäinen kirjoitustapa on Gaussin keksimä, ja sitä käytetään vielä joskus). Sitten lasketaan eli *estimoidaan*<sup>5</sup>

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{v}}{rs - (r + s) + 1}} = \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{v}}{(r - 1)(s - 1)}} = 3,8^{\text{cc}}.$$





TAULUKKO 6.1. Asematasoituksen laskentapohja.

	Kulmamuunnos (gon)	$v'$ (cc)	$v$ (cc)
1. Sarja	0,0000	0	-3,7
	68,8430	+4	+0,3
	209,1880	+7	+3,3
Sarjan summa, keskiarvo		+11	+3,7
2. Sarja	0,0000	0	-1,3
	68,8425	-1	-2,3
	209,1878	+5	+3,7
Sarjan summa, keskiarvo		+4	+1,3
3. Sarja	0,0000	0	+2,3
	68,8424	-2	+0,3
	209,1868	-5	-2,7
Sarjan summa, keskiarvo		-7	-2,3
4. Sarja	0,0000	0	+2,7
	68,8425	-1	+1,7
	209,1866	-7	-4,3
Sarjan summa, keskiarvo		-8	-2,7
Keskiarvo sarjojen yli	0,0000		
("sarjakeskiarvo")	68,8426		
	209,1873		

Tässä

- $rs$  on havaintojen lukumäärä ( $r$  suuntaa  $s$  sarjassa).
- $r + s$  on tuntemattomien määrä ( $r$  suuntatuntematonta  $\alpha_j$ ,  $s$  orientaatiotuntematonta  $\Omega_i$ ).
- Luku +1 edustaa ongelman *defektiä* eli ratkaisuvastavuuden ulottuvuutta: yllä mainittu seikka, että suureen  $\Delta$  lisääminen sekä suuntiin  $\alpha_j$  että orientaatioihin  $\Omega_i$  ei vaikuta havaintoihin millään havaittavalla tavalla, ja siis, että ratkaisu ei ole yksiselitteinen ilman *yhtä* lisäehtoa<sup>6</sup>, esimerkiksi kiinnittämällä  $\alpha_1$  johonkin ar-

<sup>5</sup>Huomaa, että  $E\{\widehat{\sigma^2}\} = \sigma^2$ , kuitenkin  $E\{\widehat{\sigma}\} \neq \sigma$ ! Siis  $\widehat{\sigma}$  ei ole harhaton vaikka  $\widehat{\sigma^2}$  on. Syy tähän on, että  $E$ -operaattoria ja neliöjuurta ei saa vaihtaa keskenään: yleisesti  $E\{\sqrt{x}\} \neq \sqrt{E\{x\}}$ .

*Vastaesimerkki:* jos  $x$ :n todennäköisyysjakauma on  $p(1) = 0,5$ ,  $p(4) = 0,5$ , ja muulloin  $p(x) = 0$ , saadaan  $E\{\sqrt{x}\} = 1,5$  mutta  $\sqrt{E\{x\}} = \sqrt{2,5} \approx 1,58$ .

<sup>6</sup>Tämä lisäehto voidaan myös ymmärtää "pseudohavainnoksi": silloin havaintojen lukumäärä on  $rs + 1$ .



voon, vaikkapa nollaan.

Lukua  $b = rs - (r + s) + 1 = (r - 1)(s - 1)$  kutsutaan *vapausasteiden määräksi*.

Tämän jälkeen kaikkien mittaussarjojen yli lasketun keskiarvon keskivirheen estimaatio on  $\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma} / \sqrt{s} = 1,9^{\text{cc}}$ .



## 6.5 Monikulmiojonon mittaus ja laskenta

Perinteinen alemman luokan runkoverkon tihennysmenetelmä on ollut monikulmiojononmittaus, lyhyemmin *jononmittaus*. Satelliittipaikannuksen, ja erityisesti tosiaikaisen kinemaattisen paikannuksen (RTK), olemassaolosta huolimatta, on edelleen tilanteita, joissa jononmittaus on paras, tai jopa ainoa, runkomittausmenetelmä. Sellaiset tilanteet ovat esimerkiksi sisätilamittaukset, maanalaiset mittaukset — kaivos- tai tunnelimittaukset — ja mittaukset kaupunkimaisemissa korkeiden rakennusten kesken, ”katukanjoneissa”, joissa GNSS-mittauksella on ongelmia rakennusten aiheuttamien katkojen tai heijastusten, *monitie*-ongelman, vuoksi.

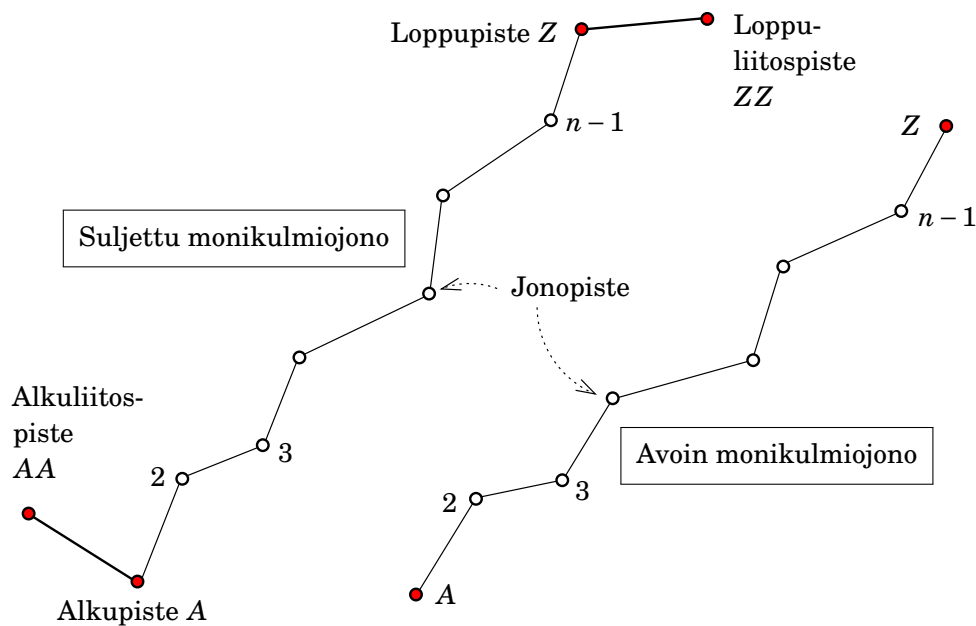
<sup>7</sup> Vuonna 1807 Nathaniel Bowditch<sup>7</sup> voitti kilpailun sopivimmasta monikulmiojonon laskentamenetelmästä. Palkinto oli kymmenen Yhdysvaltojen dollaria (Cooper, 1982, sivut 147–150).

Tässä esitetty Bowditchin menetelmän variantti, perinteinen suunta- ja koordinaattitasoitus erikseen, on epäoptimaalinen. Se on kuitenkin tutkimisen arvoinen geodeettisen laskennan tyyppiesimerkki.

*Monikulmiojono* on mittausasemien jono, jossa jokaisessa asemassa mitataan suunnat ja etäisyydet edelliseen ja seuraavaan pisteeseen. Käytetty koje on yleensä takymetri. Mittaus on yleensä viimeinen vaihe, kun koordinaatteja  $(x, y)$  tuodaan mitattavien kohtien välittömässä läheisyydessä oleviin vertauspisteisiin.

Monikulmiojonoja on kahdenlaisia: *avoimia* ja *suljettuja*. Katso kuva 6.4. Aina tunnetaan alku- ja loppupisteiden koordinaatit  $(x, y)$ . Avoimen ja suljetun monikulmiojonon välinen ero on *liitospisteiden* käyttö jälkimmäisessä. Liitospisteet ovat koordinaateiltaan tunnetut pisteet, jotka auttavat orientoimaan monikulmiojonon oikein.

<sup>7</sup>Nathaniel Bowditch (1773–1838) oli amerikkalainen matemaatikko, merinavigoinnin tutkija sekä tieteen kääntäjä ja oppikirjojen tekijä. Hän laati muun muassa teoksen ”*The American Practical Navigator*”, joka julkaistiin vuonna 1802. Kirjan nykytila, ”*The Bowditch*”, löytyy Internetistä: Bowditch (2017).



KUVA 6.4. Avoim ja suljettu monikulmiojono.

## 6.6 Avoim monikulmiojono

Yleensä pyritään mittaamaan suljettu monikulmiojono, koska se antaa mahdollisuuden tarkistaa ja tasoittaa sekä mitattuja kulmia että etäisyyksiä. On kuitenkin tilanteita, joissa tämä on mahdotonta tai hankalaa ja joissa on käytettävä *vaillinaisesti suljettua* jonoa.

Yleisin on tapaus, jossa ei tunneta alku- eikä loppusuuntaa. Katso kuva 6.5.

Tunnetaan

- $(x_A, y_A)$ , alkupiste
- $(x_Z, y_Z)$ , loppupiste.

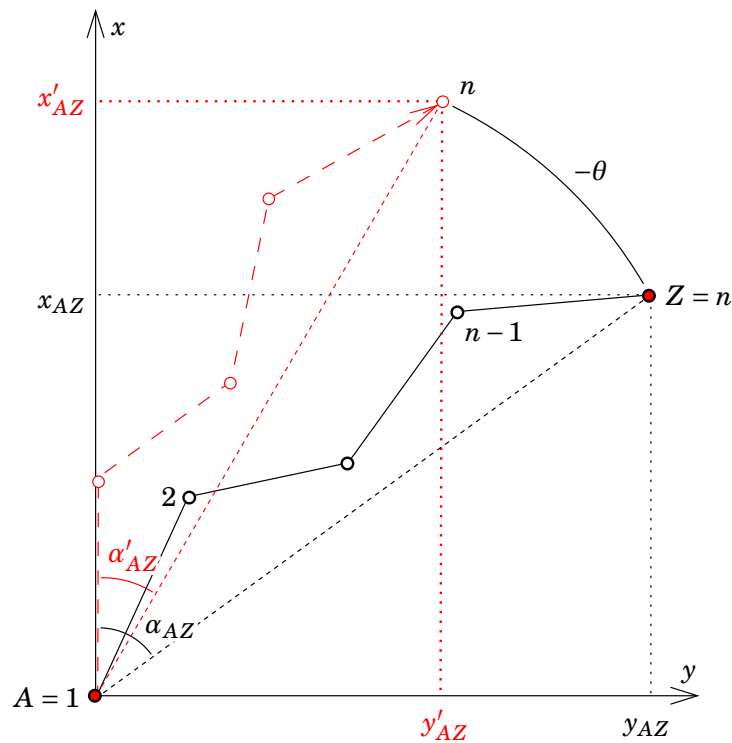
Laskettava, eli *estimoitava*<sup>8</sup>, on jonopisteille koordinaatit  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ .

### 6.6.1 Lähtösuunta

Koska alku- ja loppuliitossuuntaa ei tunneta, suuntia ei voida tasoittaa. Suunnan  $\alpha_{12}$  laskemiseksi ei ole lähtösuuntaa. Se voidaan saada kahdella eri tavalla:

- asettamalla ensimmäisen sivun suuntakulma  $\alpha'_{12} = 0$ , kuva 6.5, tai

<sup>8</sup>Käytetään taas hattutyyliä estimaattoreille ja alleviivataan stokastiset suureet.



KUVA 6.5. Avoin monikulmiojono.

- (paremmin) saamalla jollakin tavalla, esimerkiksi mittaamalla kartalta, *likiarvo*  $\alpha'_{12}$  kulmalle  $\alpha_{12}$ .



### 6.6.2 Jonon laskenta

Suoritetaan jonon suuntien laskenta tuttuun tapaan:

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= \alpha'_{12}, \\ \alpha_{23} &= \alpha_{12} - 200^g + \angle \alpha_2, \\ &\vdots \\ \alpha_{i,i+1} &= \alpha_{i-1,i} - 200^g + \angle \alpha_i, \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1,n} &= \alpha_{n-2,n-1} - 200^g + \angle \alpha_{n-1}.\end{aligned}$$

Suuntien avulla lasketaan pisteille koordinaatit geodeettisella päätehtävällä rekursiivisesti:

$$\underline{x}'_2 = x_A + \underline{s}_{12} \cos \alpha_{12}, \quad \underline{y}'_2 = y_A + \underline{s}_{12} \sin \alpha_{12},$$

ja niin edelleen:

$$\underline{x}'_i = \underline{x}'_{i-1} + \underline{s}_{i-1,i} \cos \alpha_{i-1,i}, \quad \underline{y}'_i = \underline{y}'_{i-1} + \underline{s}_{i-1,i} \sin \alpha_{i-1,i}.$$





Lopuksi

$$\underline{x}'_n = \underline{x}'_{n-1} + \underline{s}_{n-1,n} \cos \underline{\alpha}_{n-1,n}, \quad \underline{y}'_n = \underline{y}'_{n-1} + \underline{s}_{n-1,n} \sin \underline{\alpha}_{n-1,n}.$$

Tämä laskenta on suoritettu oikealla tavalla, mutta *väärin orientoidussa koordinaatistossa*. Sulkuvirheet

$$\underline{w}_x \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}'_n - x_Z, \quad \underline{w}_y \stackrel{\text{def}}{=} \underline{y}'_n - y_Z$$

eivät kerro mittausvirheistä vaan oletetun lähtösuunnan  $\alpha'_{12}$  likimääräisyydestä. Tästä syystä sulkuvirheitä ei saa poistaa tasoittamalla kuten suljetussa jonossa.

Koko jono on *kiertynyt* kulman  $\theta$  verran, ja se on kierrettävä takaisin Helmertin eli yhdenmuotoisuusmuunnoksella.

Koska alkupiste  $A$  on yhteinen kiertopiste molempien koordinaatistojen välillä, voimme yksinkertaisesti laskea niiden välisen mittakaava-suhteen  $\underline{K}$  ja kiertokulman  $\underline{\theta}$ :

$$\underline{K} = \frac{\sqrt{\Delta x_{AZ}^2 + \Delta y_{AZ}^2}}{\sqrt{(\Delta \underline{x}'_{AZ})^2 + (\Delta \underline{y}'_{AZ})^2}},$$

$$\underline{\theta} = \arctan \frac{\Delta \underline{y}'_{AZ}}{\Delta \underline{x}'_{AZ}} - \arctan \frac{\Delta y_{AZ}}{\Delta x_{AZ}}$$

— tai puolikulmakaavalla, määritelmällä

$$y//x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}:$$

$$\underline{\theta} = 2 \left( \arctan(\Delta \underline{y}'_{AZ} // \Delta \underline{x}'_{AZ}) - \arctan(\Delta y_{AZ} // \Delta x_{AZ}) \right).$$

Käytetään myös kirjoitustapaa

$$\Delta x_{AZ} = x_Z - x_A, \quad \Delta y_{AZ} = y_Z - y_A,$$

$$\Delta \underline{x}'_{AZ} = \underline{x}'_n - x_A, \quad \Delta \underline{y}'_{AZ} = \underline{y}'_n - y_A.$$

Konstruoidaan muunnos:

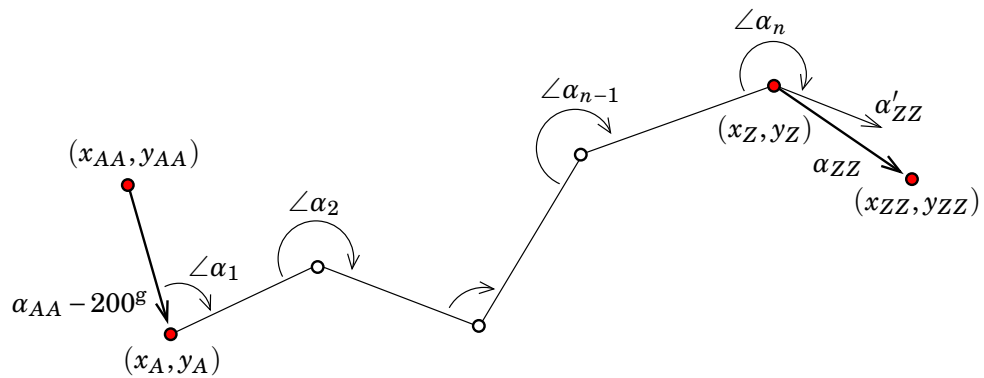
$$\underline{c} = \underline{K} \cos \underline{\theta}, \quad \underline{s} = \underline{K} \sin \underline{\theta},$$

jonka avulla jonopisteiden  $i = 1, \dots, n$  koordinaateiksi saadaan

$$\hat{x}_i = x_A + \underline{c}(\underline{x}'_i - x_A) + \underline{s}(\underline{y}'_i - y_A),$$

$$\hat{y}_i = y_A - \underline{s}(\underline{x}'_i - x_A) + \underline{c}(\underline{y}'_i - y_A).$$





KUVA 6.6. Suljetun monikulmiojonon kuvio. Vain kulmat ja alku- ja loppusuunnat ovat merkitty.

Matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{s} \\ -\underline{s} & \underline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_i - x_A \\ y'_i - y_A \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että matriisissa

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{s} \\ -\underline{s} & \underline{c} \end{bmatrix} = \underline{K} \begin{bmatrix} \cos \underline{\theta} & \sin \underline{\theta} \\ -\sin \underline{\theta} & \cos \underline{\theta} \end{bmatrix}$$

suuntakorjausta  $\underline{\theta}$  hallitsee lähtösuuntaolettamus, kun taas mittakaa-  
vankorjaus  $\underline{K}$  sisältää vain mittausepä-tarkkuuden aiheuttaman sulkuvir-  
heen korjauksen<sup>9</sup>: vaikka lähtösuunta  $\alpha_{12}$  olisikin täysin oikein arvattu,  
eivät  $(x'_n, y'_n)$  välttämättä osuisi tarkkaan pisteeseen  $(x_Z, y_Z)$ . Kuitenkin  
sivusuunnassa, kohtisuorassa jonoa vasten, jää havaintovirhe tasoitta-  
matta, tai tarkemmin sanottuna se ”imeytyy” kulmaan  $\underline{\theta}$ .

Hyvä lopullinen järkevyyskoe on

$$x_Z \stackrel{?}{=} \hat{x}_n, \quad y_Z \stackrel{?}{=} \hat{y}_n.$$

Tämän lisäksi on tarkistettava, onko  $\underline{K}$  realistinen eli arvoltaan riittävän  
lähellä arvoa 1, ottaen huomioon tunnettu etäisyysmittauksen tarkkuus.



## 6.7 Suljettu monikulmiojono

### Tunnetaan

- $(x_A, y_A)$  ja  $(x_{AA}, y_{AA})$ : alkupiste A ja alkuliitospiste AA,
- $(x_Z, y_Z)$  ja  $(x_{ZZ}, y_{ZZ})$ : loppupiste Z ja loppuliitospiste ZZ.

<sup>9</sup>... toisin sanoen, se on alkeellinen *tasointus*.



Katso kuva 6.6.

### Havaitaan

- $n$  taitekulmaa  $\angle \alpha_1, \dots, \angle \alpha_n$ ,
- $n - 1$  etäisyyttä eli sivunpituutta  $s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-1,n}$ .

### Laskettava eli *estimoitava*

koordinaatit  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  jonopisteille  $i = 2, \dots, n - 1$ . Uusia pisteitä on \_\_\_\_\_  $n - 2$  kappaletta.



#### 6.7.1 Alku- ja loppuliitossuunnan laskeminen

Geodeettisen käännteistehävän ratkaisuna saadaan *alkuliitossuunta* ja *loppuliitossuunta*:

$$\begin{aligned}\alpha_{AA} &= \arctan \frac{y_{AA} - y_A}{x_{AA} - x_A} + k \cdot 200^g, \\ \alpha_{ZZ} &= \arctan \frac{y_{ZZ} - y_Z}{x_{ZZ} - x_Z} + k \cdot 200^g,\end{aligned}\tag{6.5}$$

jossa  $k \in \{0, 1\}$  on valittava siten, että tulos on oikeassa kvadrantissa.

Käytettävä likimääräinen Bowditchin kaltainen laskentamenetelmä on kaksivaiheinen. Ensin lasketaan läpi *suunnat*, sen jälkeen *koordinaatit*.



#### 6.7.2 Suuntien tasoitus

Lasketaan suunnat eli *atsimuutit*  $\alpha_{AA}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{n-1,n}, \alpha_{n,n+1}$ , jossa  $\alpha_{AA}$  on tunnettu, ja  $\alpha_{n,n+1}$ , joka lasketaan havainnoista, vastaa yllä laskettuun loppuliitossuuntaan  $\alpha_{ZZ}$ . Seuraavasti<sup>10</sup>:

10

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= \alpha_{AA} + \angle \alpha_1, \\ \alpha_{23} &= \alpha_{12} - 200^g + \angle \alpha_2, \\ &\vdots \\ \alpha_{i,i+1} &= \alpha_{i-1,i} - 200^g + \angle \alpha_i, \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1,n} &= \alpha_{n-2,n-1} - 200^g + \angle \alpha_{n-1}, \\ \alpha'_{ZZ} &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{n,n+1} = \alpha_{n-1,n} - 200^g + \angle \alpha_n.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Lopuksi saadaan siis arvo  $\alpha'_{ZZ}$ , joka, jos kaikki kulmahavainnot  $\alpha_i$  olisivat virheettömiä, olisi sama kuin yhtälöllä 6.5 koordinaateista laskettu

<sup>10</sup> Ensimmäisen taitekulman  $\angle \alpha_1$  tapauksessa ei vähennetä 200 gon! Ja suuntakulmien  $\alpha_{i,i+1}$  pitämiseksi väliin  $[0, 400^g)$  on joskus lisättävä tai vähennettävä 400 gon.



$\alpha_{ZZ}$ . Todellisuudessa kuitenkin *suuntasulkuvirhe* on

$$\underline{w}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\alpha}'_{ZZ} - \alpha_{ZZ}.$$

Tämä sulkuvirhe poistetaan eli *tasoitetaan* jakamalla se tasan kaikkien taitekulmien kesken, eli jokaiseen mitattuun taitekulmaan tehdään *korjaus*:

$$\delta \underline{\alpha} = -\frac{\underline{w}_\alpha}{n},$$

minkä jälkeen suoritetaan kulmien laskenta uudelleen, tuloksena *tasoi-  
tetut suunnat*:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{12} &= \underline{\alpha}_{AA} + (\angle \underline{\alpha}_1 + \delta \underline{\alpha}), \\ \hat{\alpha}_{23} &= \underline{\alpha}_{12} - 200^g + (\angle \underline{\alpha}_2 + \delta \underline{\alpha}), \\ &\vdots \\ \hat{\alpha}_{i,i+1} &= \underline{\alpha}_{i-1,i} - 200^g + (\angle \underline{\alpha}_i + \delta \underline{\alpha}), \\ &\vdots \\ \hat{\alpha}_{n-1,n} &= \underline{\alpha}_{n-2,n-1} - 200^g + (\angle \underline{\alpha}_{n-1} + \delta \underline{\alpha}), \\ \hat{\alpha}'_{ZZ} &= \underline{\alpha}_{n-1,n} - 200^g + (\angle \underline{\alpha}_n + \delta \underline{\alpha}).\end{aligned}$$



### 6.7.3 Koordinaattien tasoitus

Näin tasoitetuilla suunnilla lasketaan pisteille  $2, \dots, n-1$  koordinaatit geodeettisella päätehtävällä:

- Piste 2:

$$\Delta \underline{x}_{12} = \underline{s}_{12} \cos \hat{\alpha}_{12}, \quad \Delta \underline{y}_{12} = \underline{s}_{12} \sin \hat{\alpha}_{12},$$

jonka avulla

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_A + \Delta \underline{x}_{12}, \quad \underline{y}_2 = \underline{y}_A + \Delta \underline{y}_{12}.$$

- Yleinen piste  $i$  (ja myös loppupiste  $i \rightarrow n$ ):

$$\Delta \underline{x}_{i-1,i} = \underline{s}_{i-1,i} \cos \hat{\alpha}_{i-1,i}, \quad \Delta \underline{y}_{i-1,i} = \underline{s}_{i-1,i} \sin \hat{\alpha}_{i-1,i},$$

jonka avulla

$$\begin{aligned}\underline{x}_i &= \underline{x}_{i-1} + \Delta \underline{x}_{i-1,i} = \underline{x}_{i-1} + \underline{s}_{i-1,i} \cos \hat{\alpha}_{i-1,i}, \\ \underline{y}_i &= \underline{y}_{i-1} + \Delta \underline{y}_{i-1,i} = \underline{y}_{i-1} + \underline{s}_{i-1,i} \sin \hat{\alpha}_{i-1,i}.\end{aligned}$$



- Yleisesti — muista  $(x_A, y_A) = (x_1, y_1)$ :

$$\underline{x}_k = x_A + \sum_{i=2}^k \underline{s}_{i-1,i} \cos \hat{\alpha}_{i-1,i}, \quad \underline{y}_k = y_A + \sum_{i=2}^k \underline{s}_{i-1,i} \sin \hat{\alpha}_{i-1,i}.$$

Sijoittamalla  $k \rightarrow n$  saadaan loppupisteen yhtälöt ja koordinaatit  $(\underline{x}_n, \underline{y}_n)$ . Jos havainnot olisivat virheettömiä, olisi  $\underline{x}_n = x_Z$  ja  $\underline{y}_n = y_Z$ , mutta näin ei ole. *Koordinaattisulkuvirheet* ovat

$$\underline{w}_x \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}_n - x_Z, \quad \underline{w}_y \stackrel{\text{def}}{=} \underline{y}_n - y_Z.$$

Sulkuvirheet tasoitetaan antamalla jokaiselle pistevälille *painokerroin*  $q_{i-1,i}$ , ja näiden painokertoimien suhteessa jaetaan  $\underline{w}_x$  ja  $\underline{w}_y$  pisteväleille.

Pieni painokerroin  $\longleftrightarrow$  suuri paino,  
suuri painokerroin  $\longleftrightarrow$  pieni paino!

Lasketaan painokerrointen summaa vastaava *standardikorjaus* erikseen  $x$ - ja  $y$ -koordinaateille:

$$\delta \underline{x} = -\frac{\underline{w}_x}{\sum_{i=2}^n q_{i-1,i}}, \quad \delta \underline{y} = -\frac{\underline{w}_y}{\sum_{i=2}^n q_{i-1,i}}.$$

Tasoitetuiksi koordinaateiksi saadaan

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \hat{x}_{i-1} + \underline{s}_{i-1,i} \cos \hat{\alpha}_{i-1,i} + q_{i-1,i} \delta \underline{x}, \\ \hat{y}_i &= \hat{y}_{i-1} + \underline{s}_{i-1,i} \sin \hat{\alpha}_{i-1,i} + q_{i-1,i} \delta \underline{y}, \end{aligned}$$

tai alkupisteestä  $A$  laskien,

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \hat{x}_A + \sum_{i=2}^k (\underline{s}_{i-1,i} \cos \hat{\alpha}_{i-1,i} + q_{i-1,i} \delta \underline{x}), \\ \hat{y}_k &= \hat{y}_A + \sum_{i=2}^k (\underline{s}_{i-1,i} \sin \hat{\alpha}_{i-1,i} + q_{i-1,i} \delta \underline{y}). \end{aligned}$$




#### 6.7.4 Laskentataulukko

Koko laskenta voidaan suorittaa taulun 6.2 pohjan avulla, joka voidaan helposti automatisoida. Annettuna  $\alpha_{AA} = 345,3750$  gon ja  $\alpha_{ZZ} = 72,3818$  gon sekä alkupisteen  $A$  ja loppupisteen  $Z$  koordinaatit. Asemien lukumäärä  $n = 5$ . Käytetty painotus: tasainen. Alku- ja loppupisteiden annetut arvot ovat alleviivattuina, havainnot mustia, lasketut punaisia, sulkuvirheet ja tasoituksen korjaukset sinisiä. Tämän tapainen kaavio kelpaa käytännön työhön paikallisessa runkomittauksessa.

Muutama huomautus:



 TAULU 6.2. Monikulmiojonon laskentataulukko, suunta- ja koordinaattitasoitus erikseen ("Bowditchin menetelmä").

$i$	$\angle \alpha_i$	$\alpha_{i,i+1}$	$\delta \alpha_{i,i+1}$	$\hat{\alpha}_{i,i+1}$
A (= 1)		345,3750		
1	212,2345	157,6095	+7	157,6102
2	151,4565	109,0660	+15	109,0675
3	221,9823	131,0483	+22	131,0505
4	175,9831	107,0314	+29	107,0343
5	165,3467	72,3781	+37	72,3818
Z (= 5)		72,3818		
Sulkuvirhe $\underline{w}_\alpha$		-0,0037	↑	

$i$	$\hat{\alpha}_{i,i+1}$	$\underline{s}_{i,i+1}$	$\underline{s} \cos \hat{\alpha}$	$\underline{s} \sin \hat{\alpha}$	$\underline{x}_i$	$\underline{y}_i$	$\delta \underline{x}_i$	$\delta \underline{y}_i$	$\hat{x}_i$	$\hat{y}_i$
1	157,6102	502,345	-395,038	+310,315	1000,235	256,256				
2	109,0675	487,241	-69,164	+482,307	605,197	566,571	+9	-37	,206	,534
3	131,0505	445,981	-209,001	+393,977	536,033	1048,878	+18	-73	,051	,805
4	107,0343	512,125	-56,472	+509,002	327,032	1442,855	+26	-110	,058	,745
5	72,3818				270,560	1951,857	+35	-146	,595	,711
Z (= 5)					270,595	1951,711				
Sulkuvirheet $\underline{w}_x, \underline{w}_y$					-0,035	+0,146	↑	↑		

- Yllä kuvattu tasointimenetelmä on *likimääräinen* eli suboptimaalinen. Oikeaoppisessa pienimmän neliösumman tasoituksessa lasketaan kulma- ja koordinaattikorjaukset samanaikaisesti, koska ne *korreloivat* keskenään. Tulokset ovat silloin hieman erilaisia.

Kuitenkin jos monikulmiojono on suhteellisen suora — eli sivut suunnilleen samansuuntaisia — on suboptimaalisuus pieni, ja oikeaoppinen tasointi toisi vain pieniä muutoksia lopullisiin koordinaatteihin.

Toisaalta ei ole toivottavaa, että sivut olisivat *aivan* samansuuntaisia: se hankaloittaisi mahdollisten karkeiden virheiden etsintää.

- Tässä jonon laskenta esitetään *tasolaskentana*. Kuitenkin havainnot on tehty kolmiulotteisesti, avaruudessa. Oletetaan tietenkin, että koje ja tähys ovat tarkasti ja oikein keskistettyjä ja että koje on tasattu, ja että havaintojen kaikki relevantit reduktiot on suoritettu.

Tämä koskee etenkin sivun kaltevuuden reduktiota, yhtälö 7.9. Tämän lisäksi, mittausalueen koosta ja topografiasta riippuen, korkeusreduktio (sama yhtälö 7.9) voi olla tarpeen.

- Tasokoordinaattien laskennassa suunnat referoidaan aina *kartta-pohjoiseen*, ja myös etäisyydet on redukoitu karttatasolle, eli karttaprojektion aiheuttama *mittakaavavääristymä*, yhtälö 7.10, on otettu huomioon.
- Vain siinä tapauksessa voidaan sanoa, että
  - Vaakakulmat ovat tasokulmia.
  - Redukoidut etäisyydet ovat vaakaetäisyyksiä karttatasossa.



## 6.8 Zeniittikulmat ja refraktio

Zeniittikulmien mittauksessa ylivoimaisesti suurin virhelähde on ilmakehän kerrostuneisuudesta johtuva *refraktio*. On aina oltava huolellinen sään ja maaston suhteen ajan ja paikan valinnassa sekä havaintojen käsittelyssä. Esimerkiksi kuuma *asfaltti* kesällä voi olla petollinen.

Refraktion vaikutus ei näy kontrollissa  $\zeta_1 + \zeta_2 = 400$ , alaosio 5.6.3: mittaaminen molemmassa kojeasennossa ei auta.



### 6.8.1 Refraktiokerroin

Geodesiassa on muodostunut tapa käyttää refraktion luonnehtimiseksi suuretta nimeltä *refraktiokerroin*, symboli  $k$ . Tämä suure kuvaa mittaussäteen eli -polun kaarevuutta ilmakehässä maapallon kaarevuuteen verrattuna:

$$k = \frac{\text{säteen kaarevuus}}{\text{Maan kaarevuus}} = \frac{R}{\rho}, \quad (6.7)$$

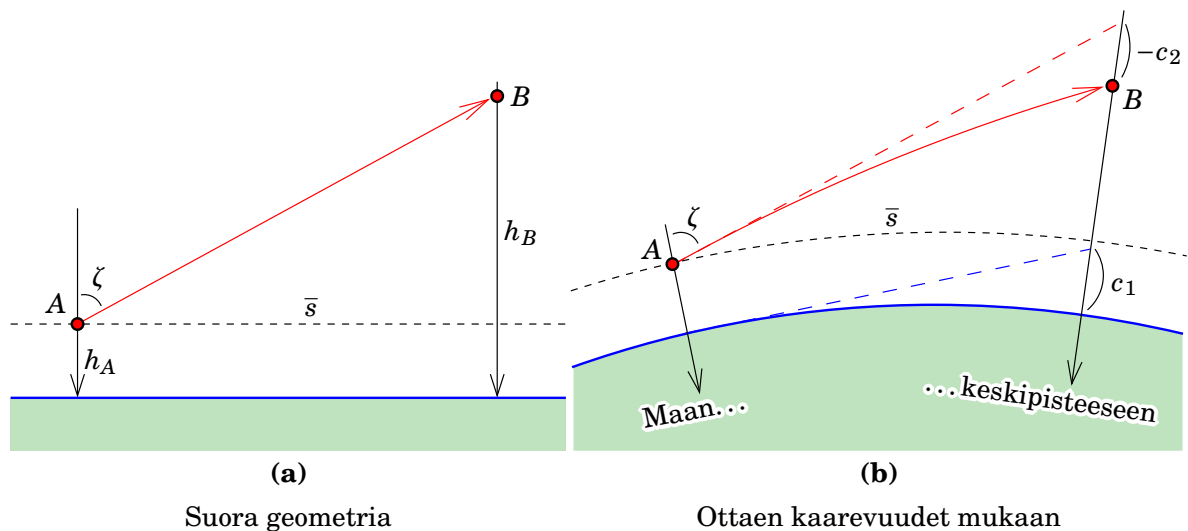
jossa

$R$  Maan kaarevuussäde.  $1/R$  on maanpinnan kaarevuus. Kaarevuus on kaarevuussäteen käänteisluku!

$\rho$  mittaussäteen kaarevuussäde.  $1/\rho$  on mittaussäteen kaarevuus.

Tyypilliset ilmakehän  $k$ -arvot ovat  $k_L = 0,13$  näkyvälle valolle ja  $k_M = 0,25$  mikroaalloille, katso Kahmen ja Faig (1988) sivu 167. Mittaussäteen kaarevuus on siis 4–8 kertaa heikompaa ja kaarevuussäde 4–8 kertaa pidempää kuin maanpinnan kaarevuus ja kaarevuussäde. Kuitenkin ilmakehän *inversion* aikana voi syntyä poikkeuksellisen suuria  $k$ -arvoja, jopa 0,3–0,4, katso Grafarend ym. (1987).





KUVA 6.7. Refraktion ja Maan kaarevuuden vaikutus zeniittikulman mittauksessa.



### 6.8.2 Trigonometrinen korkeusmittaus

Kuvassa 6.7 näkyy vasemmalla puolella, miten zeniittikulmamittauksen avulla voidaan määrittää kahden pisteen  $A$  ja  $B$  korkeusero. Soveltuva trigonometrinen yhtälö on

$$h_B = h_A + \bar{s} \cot \zeta,$$

jossa  $\bar{s}$  on *vaakaetäisyys* — vinoetäisyys vaakatasolle projisoituna — ja  $\zeta$  on mitattu zeniittikulma.

Kun todellisuudessa sekä Maan pinta että mittaussäteiden polku ilmakehässä ovat kaarevia, pätee käytännössä oikeanpuoleinen kuva, jossa kuitenkin kaarevuudet on liioiteltu. Kuvan perusteella pitäisi yllä olevaan yhtälöön lisätä *kaksi korjaustermiä*:

$$c_1 \approx \frac{\bar{s}^2}{2R},$$

Maan kaarevuuden aiheuttama korjaus, ja

$$c_2 \approx -\frac{\bar{s}^2}{2\rho} = -k \frac{\bar{s}^2}{2R},$$

mittaussäteiden kaarevuuden aiheuttama korjaus — olettaen että, toisin kuin kuvassa, korkeusero pisteiden välillä on pieni niiden etäisyyteen verrattuna.

Kaikki yhdessä:

$$h_B = h_A + \bar{s} \cot \zeta + (1 - k) \frac{\bar{s}^2}{2R}.$$





Jos otetaan mukaan vielä teodoliitin korkeus  $i$  pisteestä  $A$  ja tähyksen korkeus  $t$  sen alla olevasta merkistä  $B$ , saadaan

$$h_B = h_A + \bar{s} \cot \zeta + (1 - k) \frac{\bar{s}^2}{2R} + i - t, \quad (6.8)$$

*trigonometrisen korkeusmittauksen perusyhtälö.*



### 6.8.3 Yhtaikainen vastakkainen mittaus

Jos suoritetaan zeniittikulmamittaus yhtä aikaa pisteessä  $A$  ja pisteessä  $B$ , saadaan

$$\begin{aligned} h_B &= h_A + \bar{s} \cot \zeta_A + (1 - k) \frac{\bar{s}^2}{2R} + i_A - i_B, \\ h_A &= h_B + \bar{s} \cot \zeta_B + (1 - k) \frac{\bar{s}^2}{2R} + i_B - i_A. \end{aligned}$$

Tässä pisteessä  $A$  suoritettun mittauksen tapauksessa kojekorkeus on  $i_A$  ja tähyksen korkeus  $i_B$ , ja pisteessä  $B$  suoritettun mittauksen tapauksessa kojeen korkeus on  $i_B$  ja tähyksen korkeus  $i_A$ . Siis vastakkaisissa mittauksissa oletetaan kojeen ja tähyksen korkeudet samoiksi samalla pisteellä — helppo toteuttaa *pakkokeskistuksen* avulla, alaosio 5.4.7.

Termien uudelleen järjestely ja vähennys antaa

$$h_B = h_A + \frac{1}{2} \bar{s} (\cot \zeta_A - \cot \zeta_B) + i_A - i_B, \quad (6.9)$$

josta *ilmakehän refraktiota kuvaava termi on hävinnyt.*

Tämä menetelmä pisteiden välisten korkeuserojen määrittämiseksi on hyväksi todettu ja paljon käytetty myös pitkille matkoille. Se olettaa, että matka  $\bar{s}$  on riittävän tarkasti tiedossa.

Tätä menetelmää käytetään *trigonometrisessa vaaituksessa* (kuva 6.8). Menetelmä voi korvata perinteisen vaaituksen esimerkiksi maastossa, jossa on suuria korkeusvaihteluja ja jossa vaaituksen lattaväli kävisi lyhkäiseksi ja työskentely työlääksi. Menetelmässä käytetään kahta takymetria ja kahta tähys-heijastinyhdistelmää, ja havaintodata siirretään radiomodeemien avulla kojeesta toiseen käsiteltäväksi, tarkistettavaksi ja tallennettavaksi. Pisteestä toiseen siirrytään autoilla maaston sallies-  
sa (Takalo, 1995).

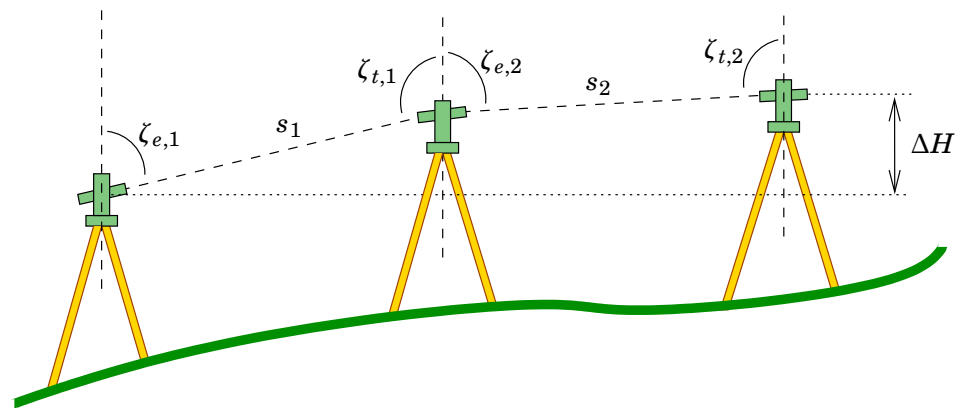


### 6.8.4 Ölanderin menetelmä

V. R. Ölander<sup>11</sup> käytti jo 30-luvulla Suomen ensimmäisen luokan kolmio-  
verkossa refraktiomallinnusmenetelmää, joka lähti siitä, että oli tehty

11





KUVA 6.8. Trigonometrinen vaaitusjono.

likimäärin yhtäaikaisia mittauksia *jokaiselta kolmiopisteeltä kaikille naapuripisteille*. Menetelmä erosi siis olennaisesti yhtäkaisten *vastakkais-*ten mittausten menetelmästä.

Ölander antoi verkon jokaiselle kolmiopisteelle oman refraktiokertoimen tuntemattomana, ja ne kaikki ratkaistiin verkkotasoituksen keinoin (Ölander, 1932, katso myös Grafarend ym., 1987).



## 6.9 Kojeen ja tähyksen korkeus

Vaikka koje on tasattu ja keskistetty pisteelle, se on aina *epäkeskinen korkeussuunnassa*.

Mitattava zeniittikulma on luotiviivan ja kaukoputken tähtäysakselin välinen kulma, kuva 6.9. On siis mitattava kokeen korkeus  $i$ . Yleensä tähtäyskohde on tähys jalustalla eikä maastomerkki (kiintopiste) itse, joten myös tähyksen korkeus  $t$  on mitattava. Siis aina on mitattava

- kokeen kohdalla merkin ja kokeen vaaka-akselin korkeusero
- tähyksen kohdalla merkin ja tähtäyskohteen korkeusero.

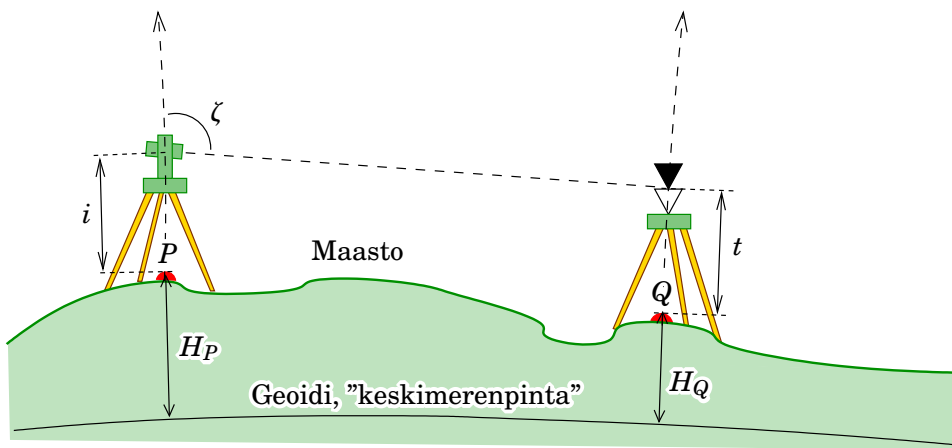
Kuvatussa tilanteessa (kuva 6.9) tähtäyskohde on valkoisen kolmion yläreuna, ja sen korkeus  $t$  on mitattava.

Korkeussuunnassa sekä koje että tähys ovat *epäkeskisiä*.

Kuvaan on piirretty myös merkkien korkeudet laskennallisesta vertauspinnasta ("merenpinnasta"). Mittausten avulla aiotaan määrittää seuraavat korkeudet:

- kokeen korkeus vertaustasosta:  $H_P + i$

<sup>11</sup>Victor Rafael Ölander (1897–1973) oli suomalainen geodeetti ja tähtitieteilijä, jolla oli keskeinen rooli Suomen ensimmäisen luokan kolmiomittauksessa.



KUVA 6.9. Kojeen ja tähyksen korkeus.

- o tähyksen korkeus vertaustasosta:  $H_Q + t$ .



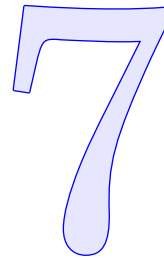
### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Missä kolmessa maastomittauksen perustyyppissä käytetään vaakakulmamittausta?
- 2) Mikä on asematasoitus? Mikä on orientaatiotuntematon?
- 3) Mikä ero on avoimen ja suljetun monikulmiojonon välillä? Montako sulkuvirhettä (redundanssi, vapausasteiden lukumäärä), joita voidaan käyttää erehdysten eli karkeiden virheiden löytämiseksi, on kummassakin?
- 4) Miksi monikulmiojonomittausta käytetään edelleen, vaikka on olemassa GNSS?
- 5) Miksi ilmakehän refraktio on ongelma etenkin mitattaessa pystyakulmia eikä niinkään mitattaessa vaakakulmia? Voisitko ajatella tilanteita, joissa myös vaakakulmamittaus kärsii refraktiosta?
- 6) Mikä on refraktiokerroin  $k$ ?
- 7) Mikä on trigonometrinen vaaitus ja missä tilanteissa sitä käytetään? Miten ilmakehän refraktion vaikutus poistetaan?
- 8) Millainen oli Ölanderin refraktiomallinnusmenetelmä?





# Etäisyysmittaus



**BERGSTRAND, ERIK Ö, observator**, Danderyd, f i  
Upps 3/7/04 av prof Östen B o Anna Ericsson.  
Fil kand 35, fil dr 50, observator Rikets allm kartverk sed  
56. – Delt i solförmörkelseexp t Afrika 47. – *Utg drsavh om*  
*ljushastigh, utv ny metod f avst:bestämn (geodimetern).*  
*Gift 38 m folkskollär Lisa Torpson f 99, dtr t sem:rektor*  
Nils T o Klara Svensson.

---

Erik Östen Bergstrand (1904–1987), Geodimeterin keksijä,  
*Kuka kukin on, Harnesk ja Davidsson (1962)*



## 7.1 Mekaaninen etäisyysmittaus

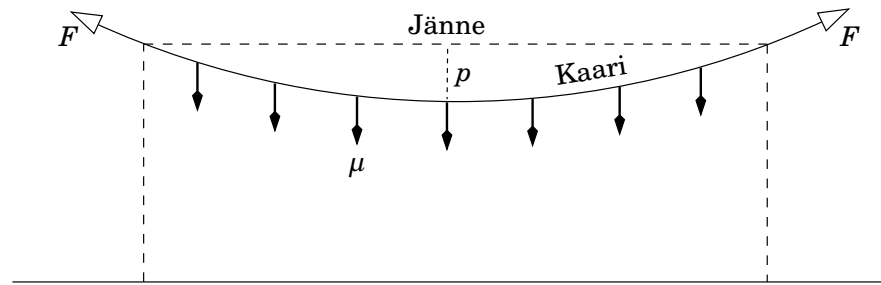
Etäisyyden, tarkemmin *pituuden*, SI-yksikkö on metri, katso osio 2.1.  
Tarkassa etäisyysmittauksessa *jäljitettävyy*s metrin standardiin on kes-  
keisen tärkeä.

Vaikka nykyisin jopa lyhyet etäisyydet mitataan elektronisesti tai  
sähköoptisesti, on hyvä ymmärtää vanhin<sup>1</sup> ja teknisesti yksinkertaisin<sup>1</sup>  
pituuden mittausmenetelmä, nauhamittaus. Sitä käytetään edelleen  
paikallisessa mittauksessa, jos matkat ovat lyhyitä ja nauhamittauksen  
antama tarkkuus on riittävä<sup>2</sup>. Ja onhan tarvittava välineistö huokea!<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Aikanaan Suomen ensimmäisen luokan kolmiomittausverkon mittakaava siirrettiin  
Nummelan perusviivasta verkon kahdentoista pääsivun perusviivoihin invarlankojen  
avulla. Invar on rauta-nikkeliseos (64% rauta, 36% nikkeli), jolla on hyvin pieni lämpö-  
laajennuskerroin. Myös Maupertuis'n mittaaman Lapin astemittauksen kolmioverkon  
mittakaava saatiin mekaanisesti mitatusta perusviivasta — vuoden 1736 talvella  
Tornionjoen jäällä!

<sup>2</sup>*Huolellinen* nauhamittaus on yllättävän tarkka!



KUVA 7.1. Mittanauhan painumakorjaus.

Nauhamittauksessa on otettava huomioon *neljä korjausta*.

**Nauhakorjaus** on nauhakohtainen reduktio. Se määritetään *kalibroinnin* avulla *komparaattorissa*, jonka todellinen pituus tunnetaan tarkasti — vertailun ansiosta, jäljitettävyyshetken kautta, standardimetrin kanssa. Nauhakorjaus  $\Delta\ell_0$  on nyt komparaattorin todellisen pituuden  $\ell_0 + \Delta\ell_k$  ja sen kalibroituavalla nauhalla mitatun pituuden  $\ell_0 + \Delta\ell_m$  välinen erotus<sup>3</sup>:

$$\Delta\ell_0 = \Delta\ell_k - \Delta\ell_m.$$

Tässä  $\ell_0$  on nauhan nimellinen pituus, esimerkiksi  $\ell_0 = 30\text{ m}$ .

**Lämpötilakorjaus** johtuu teräksen lämpölaajenemisesta ja edellyttää siis nauhan lämpötilan mittaamista. Lämpötilakorjaus oletetaan nolaksi standardilämpötilalla  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ . Jos teräksen lämpölaajenemiskerroin on  $\alpha$ , on lämpötilakorjaus

$$\Delta\ell_t = \alpha\ell_0(t - t_0).$$

Tässä  $\alpha$  ilmaistaan yksikössä mikrometrejä metriä ja astetta kohti. Esimerkiksi erään terässeoksen lämpölaajenemiskertoimen arvo on  $11,34\ \mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$ , eli  $\alpha = 11,34 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$ , koska  $\mu\text{m}/\text{m} = 10^{-6}$ . Jos mittanauha on 30 metriä pitkä ja lämpötila  $28^\circ\text{C}$ , seuraa että

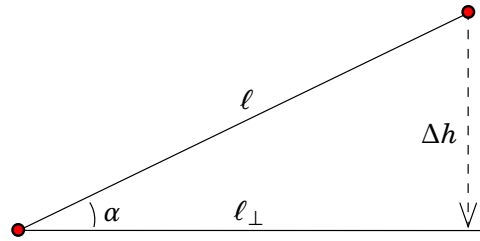
$$\Delta\ell_t = 2,7\text{ mm}.$$

**Painumakorjaus** Mittauksen aikana mittanauhaa jännitetään tunnetulla voimalla  $F$ . Vaikka tämä voima olisi kuinka vahva, nauha

<sup>3</sup>Kysymys: miksi etumerkki on näinpäin? Miksei

$$\Delta\ell_0 = \Delta\ell_m - \Delta\ell_k?$$





KUVA 7.2. Vinoetäisyyden kaltevuusreduktio.

asettuu aina *ketjukäyrän* (engl. *catenary*, itse asiassa *cosinus hyperbolicus* eli *cosh*-funktio) muotoon. Tarvitaan siis nauhan *jännitysvoiman* mittaaminen, kuva 7.1. Ilmiön teoria on yllättävän monimutkainen, katso Tikka (1985) sivut 75–77. Lopputuloksena painumakorjaus, janteen ja kaaren pituusero, on

$$\Delta \ell_p = -\frac{\mu^2}{24F^2} \ell^3,$$

verrannollinen nauhan pituuden kolmanteen potenssiin. Yhtälössä  $\mu$  on nauhan paino metriä kohti ja  $F$  nauhan jännitysvoima. Vaihtoehtoisesti voidaan mitata nauhan painuma  $p$  keskellä ja käyttää yhtälöä

$$\Delta \ell_p = -\frac{8p^2}{3\ell}.$$

**Kaltevuuskorjaus** ei varsinaisesti ole korjaus vaan *reduktio*, joka tarvitaan, jos vinoetäisyyden sijasta halutaan saada pisteiden välinen vaakaetäisyys eli vinoetäisyyden projektio vaakatasolle.

Rutiininomaisessa nauhamittauksessa nauhakohtainen korjaus, lämpötilakorjaus ja painumakorjaus jätetään usein huomioimatta. Niiden seikkaperäinen kuvaus kaavoineen löytyy kirjallisuudesta, esimerkiksi Kahmen ja Faig (1988) sivut 122–130. *Kaltevuusreduktio* voi kuitenkin olla merkittävä: jos annettu on mitatun matkan  $\ell$  päätepisteiden korkeusero  $\Delta h$ , on Pythagoraan lauseen mukaan vaakaetäisyys

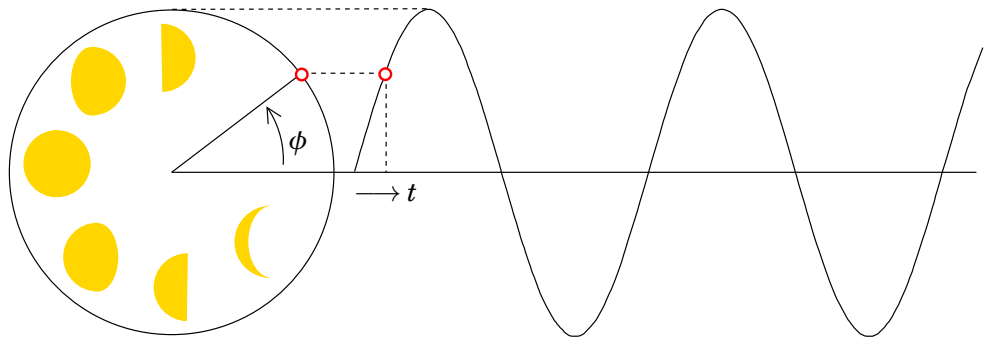
$$\ell_{\perp} = \sqrt{\ell^2 - \Delta h^2}. \quad (7.1)$$

Jos on tiedossa vain kaltevuuskulma  $\alpha$ ,  $\sin \alpha = \Delta h / \ell$ , päätepisteiden välillä, saadaan vaakaetäisyys seuraavasti, kuva 7.2:

$$\ell_{\perp} = \sqrt{\ell^2 - \ell^2 \sin^2 \alpha} = \ell \cos \alpha.$$

Yhtälö 7.1 voidaan kirjoittaa pienille kaltevuuksille riittävällä tarkkuu-





KUVA 7.3. Aaltoliikkeen vaihe  $\phi$  ajan  $t$  funktiona. Nimi ”vaihe” lienee tullut Kuun vaiheista.

della

$$\ell_{\perp} = \ell \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta h}{\ell}\right)^2} \approx \ell \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{100}\right)^2} \approx \ell - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{10000} \ell \stackrel{\text{def}}{=} \ell + \Delta \ell_{\perp},$$

jossa kaltevuuskorjaus

$$\Delta \ell_{\perp} = -\frac{\ell \kappa^2}{20000} \quad (7.2)$$

on esitetty *kaltevuusprosentin*  $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} 100 \Delta h / \ell_{\perp} \approx 100 \Delta h / \ell$  funktiona.



## 7.2 Sähkömagneettinen säteily

Valo, radioaallot ja monet muut säteilyn muodot ovat esimerkkejä *sähkömagneettisesta säteilystä*.

Fysiikassa on mietitty pitkään, onko näkyvä valo aaltoliikettä (Huygens) vai hiukkasten virta (Newton). Interferenssi-ilmiöiden löytäminen ratkaisi kiistakysymyksen aaltoliikkeen teorian eduksi. Siihen auttoi <sup>4</sup>ratkaisevasti myös James Clerk Maxwellin<sup>4</sup> kehittämä sähkömagnetismin kenttäteoria, joka esittää osittaisdifferentiaaliyhtälöiden avulla *sähkömagneettiset aallot* tämän kentän luonnollisena aaltoiluna. Maxwell onnistui jopa laskemaan teoreettisesti niiden etenemisnopeuden  $c$ , joka oli lähellä jo havaittua valon nopeutta. . .

Aaltoliikkeenä sähkömagneettisella säteilyllä on *vaihe*  $\phi$ . Kun kuvataan aaltoliike tasaisen ympyräliikkeen projektiona yhteen ulottuvuuteen<sup>5</sup> (kuva 7.3), on  $\phi$  se ympyrän keskipisteen kulma, joka mittaa tätä

<sup>4</sup>James Clerk Maxwell [FRS FRSE](#) (1831–1879) oli skottilainen matemaattinen fyysikko, joka keksi sähkömagnetismin matemaattisen teorian. Hänet tunnetaan myös teoreettisen termodynamiikan työstään.

<sup>5</sup>Vastaavasti: kompleksin aaltofunktion  $\exp(i\phi) = \cos \phi + i \sin \phi$  reaaliosuutena.



tasaista liikettä. Vaiheen  $\phi$  ja taajuuden  $f$  välinen yhteys on

$$\phi(t) = \phi(t_0) + 2\pi f(t - t_0),$$

jossa  $t$  on aika ja  $t_0$  vertausaika. Ilmeisesti vaihe on periodinen ja toistuu yhden syklin eli  $2\pi$ :n jälkeen. Siksi vaihekulma voidaan aina redukoida väliin  $[0, 2\pi)$  sen fysikaalista merkitystä muuttamatta.

Nykyisin voidaan mitata eri sähkömagneettisten säteilymuotojen aallonpituudet ja taajuudet hyvin tarkasti; niiden välillä on yhteys

$$\lambda f = c,$$

jossa  $f$  on taajuus ja  $\lambda$  aallonpituus. Suure  $c$  on *valon nopeus* (tyhjiössä), joka Einsteinin — tai oikeastaan jo Maxwellin — mukaan on luonnonvakio. Katso kuva 7.4.

Kuitenkin *kvanttiteoria* on tehnyt hiukkasmallin taas merkitykselliseksi. Valoa voidaan kuvata hiukkasten, *fotonien*, virtana. Yhden fotonin energia on

$$E = hf,$$

jossa  $h$  on *Planckin*<sup>6</sup> vakio. Hiukkasmalli on hedelmällinen etenkin korkeille energiatasojille, kuvan 7.4 vasen puoli.

Sähkömagneettinen kenttä on *vektorikenttä*. Siksi sähkömagneettinen säteily on *poikittaista aaltoliikettä*, joka voidaan *polarisoida*<sup>7</sup>. Kuvas-<sup>7</sup>sa 7.5 on piirretty sekä lineaarisesti polarisoitua että ympyräpolarisoitua

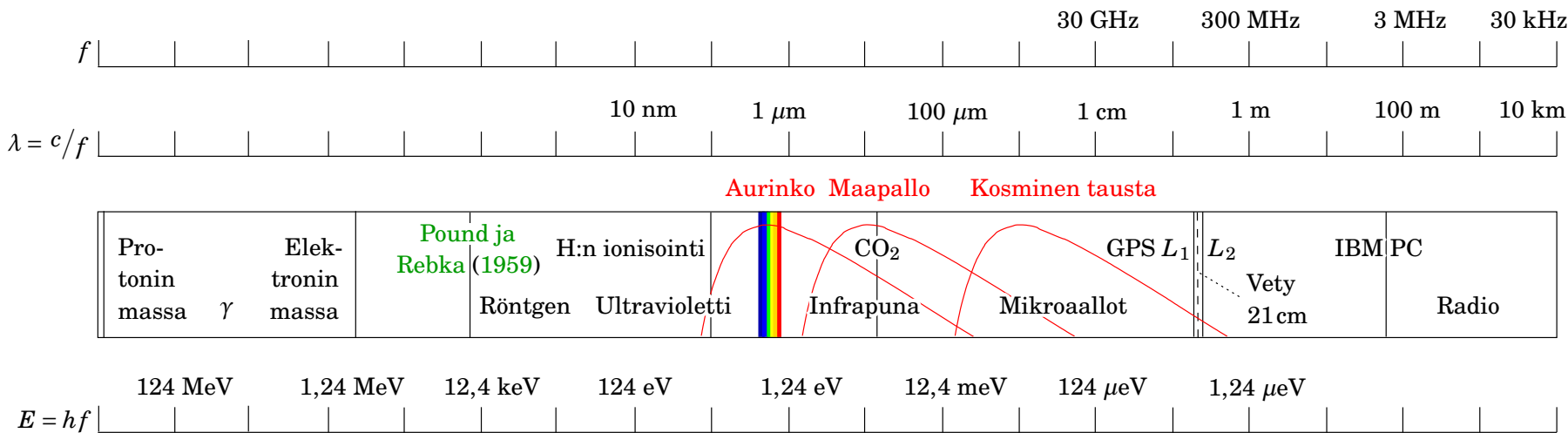
<sup>6</sup>Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) oli saksalainen fyysikko ja Saksan fysiikan organisaattori. Hänet muistetaan löydöstään, että *mustan kappaleen* lämpösäteilyn spektri johtuu luonnollisella tavalla sähkömagneettisen säteilyn kvantisoinnista.

<sup>7</sup>Polarisaation oikea ymmärrys oli Thomas Youngin (1773–1829) ja Augustin-Jean Fresnelin (1788–1827) aikaansaama. Polarisaation tutkimuksessa eräs mineraali, kirkas kalsiitti ( $\text{CaCO}_3$ ), *islanninsälpä*, oli keskeisessä roolissa. Kide on *kahtaistaittava* ja jakaa valoa kahteen polarisaatiosuunnan mukaan. Ilmeisesti viikingit käyttivät sitä navigoidessaan Auringon mukaan pilvisellä säällä. Hollantilainen Christiaan Huygens (1629–1695), valon aaltoteorian isä, käytti runsaasti aikaa islanninsälvän kokeelliseen tutkimiseen.

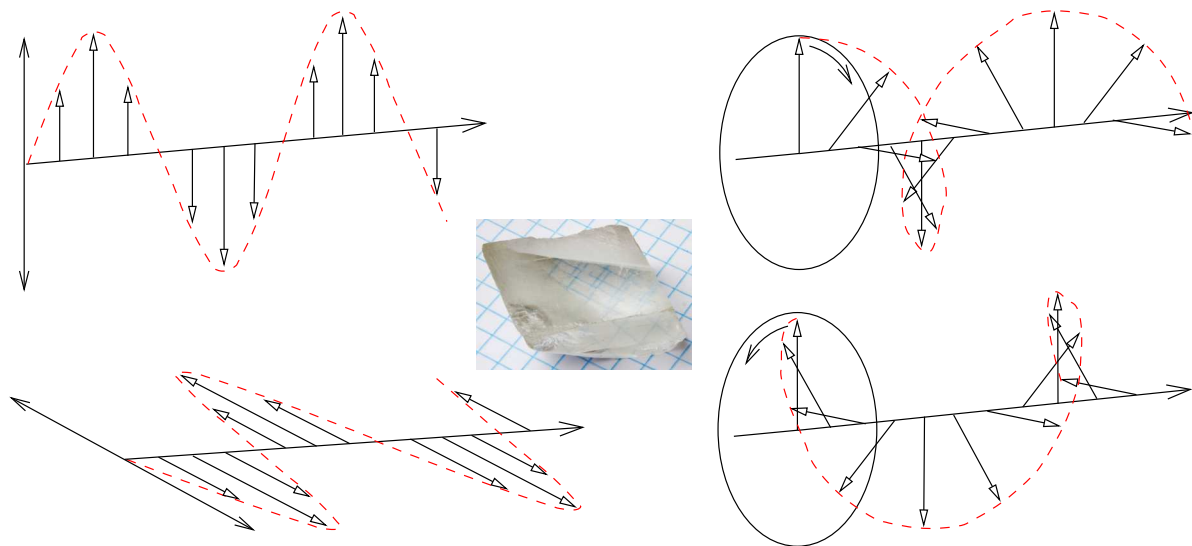
Toinen taustatarina liittyy polarisaation elämän kemiaan. Kiraaliset (ei-peilisymmetriset, ”kätiset”) molekyylit, kuten sokeri, kiertävät läpikulkevan valon polarisaatiotasoa: *optinen aktiivisuus*. Jo Louis Pasteur (1822–1895) tutki eloperäisen viinihapon optisen aktiivisuuden taustaa, ja tiedämme nyt, että ilmiö liittyy itse elämän kiraalisuuteen eli ”kätisyyteen”, kuten DNA-molekyylin kierteen suuntaan. *Polarimetri* on keskeinen apuväline lääke- ja elintarviketeollisuudessa.

Islanninsälvän ominaisuuksia käytettiin myös sotilaallisesti hyväksi, mistä syystä se oli pitkään luokiteltu strategiseksi aineeksi (Cicala, 2013).





KUVA 7.4. Sähkömagneettinen säteilyspektri, fysiikan ja tähtitieteen maisema. Huomaa omin silmin nähtävissä olevan kapeus.



KUVA 7.5. Sähkömagneettisen säteilyn polarisaatio. Nuolet kuvaavat kentän **E**-vektoria. Vasemmalla lineaarisesti polarisoitu aaltoliike; oikealla ympyräpolarisoitu aaltoliike. Islanninsälvän kuva [Wikimedia Commons](#), [Kalsiittikide](#).

säteilyä. Voi valita kaksi riippumatonta polarisaatiosuuntaa, esimerkiksi ylös-alas ja vasen-oikea, joista kaikki muut voidaan muodostaa yhdistämällä. Esimerkiksi ympyräpolarisoitua säteilyä saadaan yhdistämällä kaksi keskenään kohtisuoraa lineaarisesti polarisoitua sädettä keskinäisellä vaihe-erolla  $\pi/2$ . Tämä toimii myös toisinpäin: yhdistämällä myötäpäivään ja vastapäivään ympyräpolarisoituja säteitä saadaan taas lineaarisesti polarisoitu säde.

Lineaarisen ja ympyräpolarisoinnin välimuotoa edustaa *elliptisesti* polarisoitu säteily, jonka kenttävektori kiertää ellipsin muotoista polkua.

Hiukkaskielellä voi sanoa, että sähkömagneettinen kenttä on fotonin kvanttiteoreettinen aaltofunktio, joka on siis vektoriarvoinen funktio. Fotoni on *vektorihiukkanen*, jolla on intrinsinen pyörähdysmomentti eli *spin*, suuruudeltaan  $\hbar/2\pi$ . Tämä spin — jonka visualisointi on pyörähdysmomentin vektori — voi olla orientoitunut joko lentosuunnan mukaisesti tai sen vastaisesti, mikä vastaa ympyräpolarisaatioon joko myötä- tai vastapäivään. Lineaarisesti polarisoitu säteily taas voidaan esittää tasasekoituksena molemmista spin-suunnista ([Wikipedia](#), [Photon polarization](#)).



### 7.3 Väisälän interferenssimenetelmä

Eräs klassinen etäisyysmittaustekniikka, joka on edelleen käytössä, on



Yrjö Väisälän jo 1920-luvulla keksimä valkoisen valon interferenssimenetelmä pitkien perusviivojen pituuksien tarkkaan mittaukseen. Katso kuva 7.6.

Menetelmä toimii seuraavalla tavalla. Valkoinen valo kulkee lähteestä havaintolaitteeseen kahta polkua pitkin:

- suoraan heijastumalla kaukaiselta peililtä
- heijastumalla monta kertaa — kuvassa neljä kertaa — edestakaisin lähempien peilien välillä.

Käytetty valo on *valkoinen*, joka sisältää kaikki valkoisen valon eri aallonpituudet. Siksi valon *koherenssipituus* on hyvin lyhyt, vain  $1,3\ \mu\text{m}$ .

<sup>8</sup> Tästä syystä interferenssirenkaat näkyvät vain, jos molemmat matkat ovat sillä tarkkuudella yhtä pitkät<sup>8</sup>. Siis jos kaukaisen peilin etäisyys on läheisten peilien välisen etäisyyden *monikko*.

Tämä mahdollistaa annetun etäisyyden monistamisen. Oleta, että matka peilien 0 ja 1 välillä on tarkasti 1 m. Silloin voidaan interferenssin avulla saada kaukainen peili etäisyyteen 6 m — tarkasti. Sen jälkeen otetaan 1-peili pois, ja samalla menetelmällä, käyttäen nyt peiliparia 0 ja 6 läheisinä peileinä, voidaan saada kaukainen peili etäisyyteen 24 m. Ja niin edelleen. . .

Käytännössä menetelmä ei toimi aivan näin. Kulkumatkojen väliin jää aina pieni ero, joka eliminoidaan ja samalla mitataan kierrettävän tasapaksun lasilevyn, *kompensoattorilasin*, avulla.

Kuvattu laite on itse asiassa analoginen, optinen *korrelaattori*. Katso kuva 7.7. Korrelaatiomenetelmästä kerrotaan laajemmin alaosiossa 12.5.1 GPS:n yhteydessä.

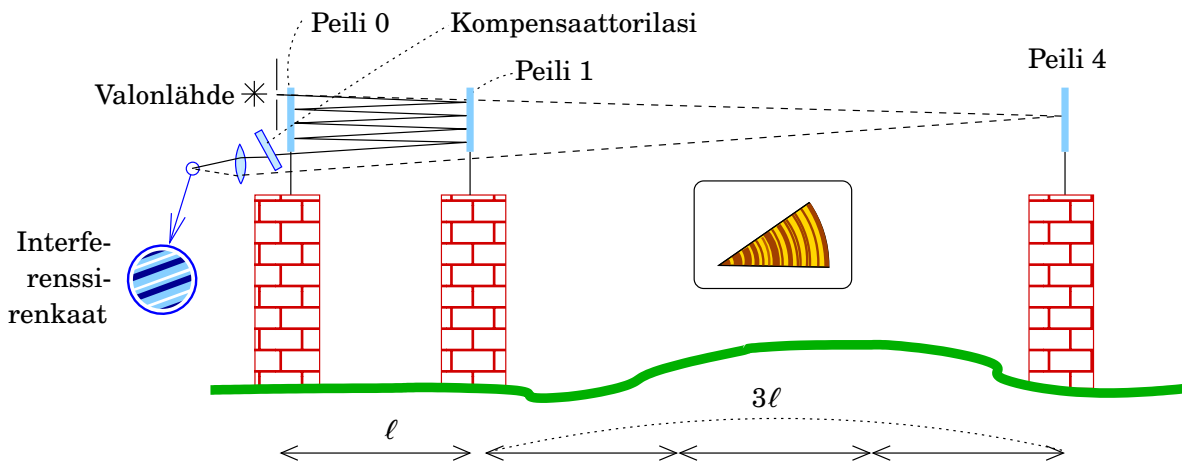
<sup>9</sup> Alkuperäinen yhden metrin etäisyyden realisoiminen 0- ja 1-peilien väliin ei ole aivan yksinkertainen. Tähän käytetään metrin pituista *kvartsimittaa*<sup>9</sup>, jonka annetaan koskea toisen peilin pintaa. Toisen peilin ja kvartsimitan hieman kuperaksi hiotun pään välisessä ilmaraoissa näkyy nyt Newtonin interferenssirengaskuvio. Renkaita havaitsemalla natriumvalossa voidaan määrittää ilmaraon leveys.

Väisälän interferenssimenetelmä on erittäin aikaavievä. Mittausolosuhteet ovat vain hyvin harvoin sopivia pisimmän matkan,  $864\text{ m:n}$ ,

---

<sup>8</sup> Siksi laservalo ei kelpaa! Se tuottaisi interferenssirenkaita silloinkin, kun matkat ovat eri pitkiä.

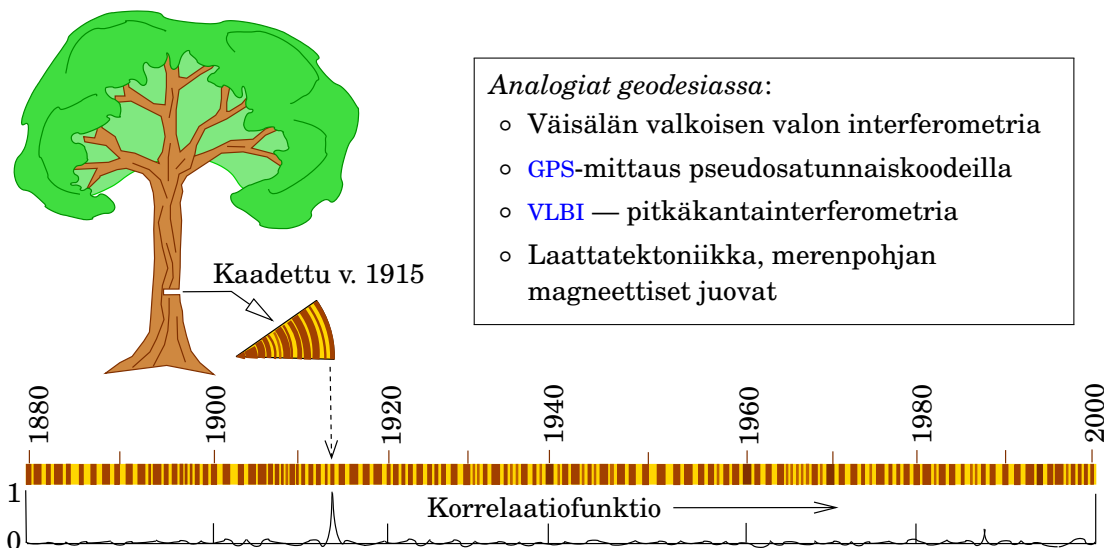
<sup>9</sup> Niiden tarkka kalibrointi on taas ihan oma lukunsa. . .



KUVA 7.6. Väisälän interferenssimenetelmä.

mittaamiseen. Myös peilien pystytys, suuntaus ja mitattujen paikkojen siirtäminen *projektiomittauksin* maanalaisiin pysyviin merkkeihin on monimutkainen operaatio, joka vaatii aikaa. Mittauksen aikana ilman lämpötilaa mitataan jatkuvasti koko linjaa pitkin ripustetuilla tarkoilla lämpömittareilla, mikä työllistää kaksi mittausapulaista ja saa heidät liikkumaan.

Menetelmää on käytetty jopa 864<sup>10</sup> metriä pitkien perusviivojen mittamiseen Suomen Nummelassa ja monessa paikassa eri maailman kolkissa. Saavutettava tarkkuus on parhaimmillaan  $\pm 0,02$  mm. Itse interferenssimittaus on tätäkin tarkempi: pullonkaula on projektiomittaus, peilien mittausarvojen siirtäminen maanalaisiin merkkeihin.



KUVA 7.7. Dendrokronologia: puun iänmääritys vuosirenkaiden avulla.



## 7.4 Elektroninen etäisyysmittaus



### 7.4.1 Valon nopeus

Valon nopeus tyhjiössä on luonnonvakio. Ilmeisesti jo Galilei (1564–1642) yritti mitata sen vuonna 1638 apurin ja kahden lampun avulla: lampusta otettiin suoja pois ja apuri toisella kukkulalla vastasi samalla tavalla. Tietysti tulos oli käyttökelvoton: valon nopeus olisi kokeen mukaan hyvin suuri ja mahdollisesti ääretön.

Ensimmäiset maanpäälliset etäisyysmittarit kehitettiin valon nopeuden määrittämiseksi. Menetelmän prototyyppi on Fizeaun<sup>11</sup> koje, joka koostuu valonlähteen ja heijastimen lisäksi nopeasti pyörivästä hammaspyörästä. Jos pyörä pyörii oikealla nopeudella, valo, joka lähtee hampaiden välisen aukon kautta, osuu palatessa hampaan. Hieman suuremmalla tai pienemmällä pyörimisnopeudella palaavasta valosta osa pääsee läpi. Fizeaun kokeissa mittausmatka oli 8,6 km.

Fizeaun hammaspyörä on alkeellinen *modulaattori*. Nykyisin käytetään elektronisia tai sähköoptisia modulaattoreita, joiden tehtävä on vaihdella eli *moduloida* lähtevän valon intensiteettiä jaksollisesti tietyllä taajuudella.



### 7.4.2 Elektroniset etäisyysmittauskojeet

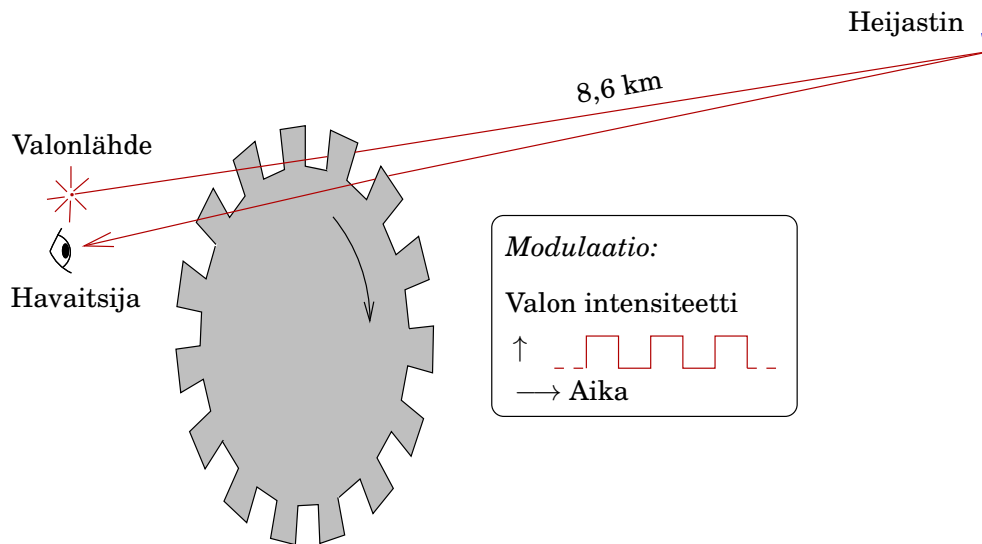
Kun valon nopeuden määrittämiseksi kehitettyjen laitteistojen ylivoimainen tarkkuus tuli selväksi, kuvio muuttui. Tällä hetkellä valon nopeutta tyhjiössä ei enää mitata, vaan se on metrin ja sekunnin määritelmien (alaosio 2.1.4) perusteella saatava suure, jonka arvoksi on sovittu *täsmälleen*  $299\,792\,458\text{ m/s}$ .

Elektroniset etäisyysmittauslaitteet voivat olla rakenteeltaan kolmea tyyppiä:

- Erillisiä: laite kiinnitetään pakkokeskistyslaitteeseen. Tämä ratkaisu on käynyt harvinaiseksi laitteiden pientymisen myötä.
- Erillinen osa, joka kytketään teodoliitin mittauskaukoputken päälle. Tämäkin ratkaisu on käynyt epäkäytännölliseksi:

<sup>10</sup> $864 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 6$ .

<sup>11</sup>Armand Hippolyte Louis Fizeau [MIF FRS FRSE](#) (1819–1896) oli ranskalainen fyysikko. Hän mittasi myös valon nopeutta virtaavassa vedessä ja löysi siinä poikkeaman, jonka vasta erityinen suhteellisuusteoria osasi selittää. Hän on yksi niistä 72 ranskalaisesta tiedemiehestä ja insinööristä, jotka ovat saaneet nimensä Eiffel-torniin, ensimmäisen parvekkeen ulko- ja alapuolelle ([Eiffel Tower](#), [72 names](#)).



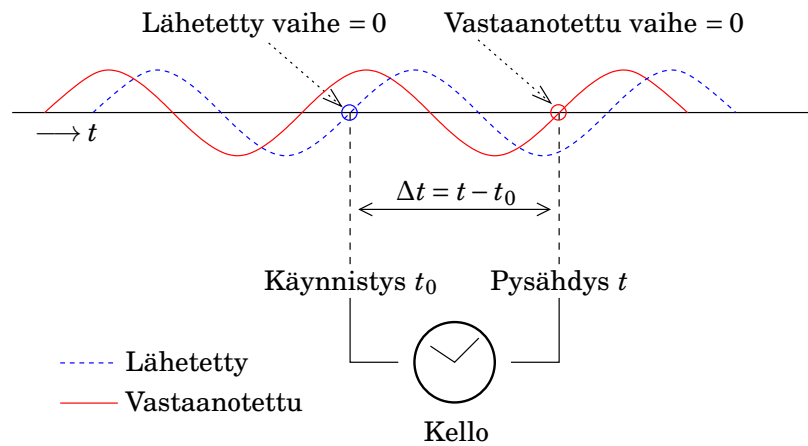
KUVA 7.8. Fizeaun menetelmä valon nopeuden mittaamiseksi. Vuonna 1849 mitattu matka oli Montmartresta Mont Valérieniin Suresnesin kunnassa, 8 633 m.

- On tehtävä kojeen kallistuskorjaus.
- Esimerkiksi klassinen Distomat-etäisyysmittari asennettiin teodoliitin putken päälle estäen sen kääntämistä toiseen kojeasentoon.
- Integroitu teodoliitin kanssa. Puhutaan *koaksiaalisesta* ratkaisusta: valo kulkee molempiin suuntiin teodoliitin mittauskaukoputken läpi ja käyttää samaa optiikkaa.

Elektroninen etäisyysmittaus jakautuu käytetyn taajuusalueen mukaan kahteen päätyyppiin:

- sähkömagneettinen eli mikroaaltoja käyttävä, terrestrisenä menetelmänä vanhentunut — mutta satelliittipaikannus käyttää myös mikroaaltoja
- sähköoptinen:
  - näkyvä valo, valkoinen: Mekometer
  - laservalo tai hohtodiodi (LED), näkyvä tai lähi-infrapuna, monokromaattinen.

Laitetyypistä riippumatta mittaus tapahtuu *moduloimalla* joko valo (tai infrapuna) tai radioaallot (mikroaallot) tietyllä taajuudella ja mittaamalla *vaihe-ero* lähtevän ja kohteesta palaavan säteilyn välillä. Elektroninen vaihemittaus voi olla hyvinkin tarkka, mutta se ei kerro, montako *kokonaisia* aallonpituuksia mahtuu matkan sisälle: tätä kutsutaan *am-*



KUVA 7.9. Elektronisen vaihemittauksen eräs menetelmä: nollavaihe käynnistää / pysäyttää elektronisen laskurin eli ”kellon”.

*biguiteettiongelma*ksi.

Signaalin kulku-aika on

$$\overline{\Delta t} = \left( \frac{\Delta \phi}{2\pi} + N \right) \frac{1}{f},$$

jossa  $f$  on taajuus,  $\Delta \phi$  mitattu vaihe-ero radiaaneissa ja kokonaisluku  $N$  tuntematon *ambiguiteettiluku*. Koska mitattu vaihe-ero oletetaan olevan välissä  $[0, 2\pi)$ , ei mittausta vielä riitä  $\overline{\Delta t}$ :n määrittämiseen. Voisimme kyllä laskea yhden *mahdollisen* kulkuajan

$$\Delta t = \frac{\Delta \phi}{2\pi} \frac{1}{f},$$

mutta olisi sattuma, jos se olisi oikea kulku-aika.

Vaihemittaus voidaan suorittaa tarkan *aikaeromittauksen* avulla: kun vertaussignaali menee nollan läpi positiiviseen suuntaan, laskuri käynnistyy, ja kun saapuva mittaussignaali tekee samoin, laskuri pysähtyy ja arvo luetaan (kuva 7.9).

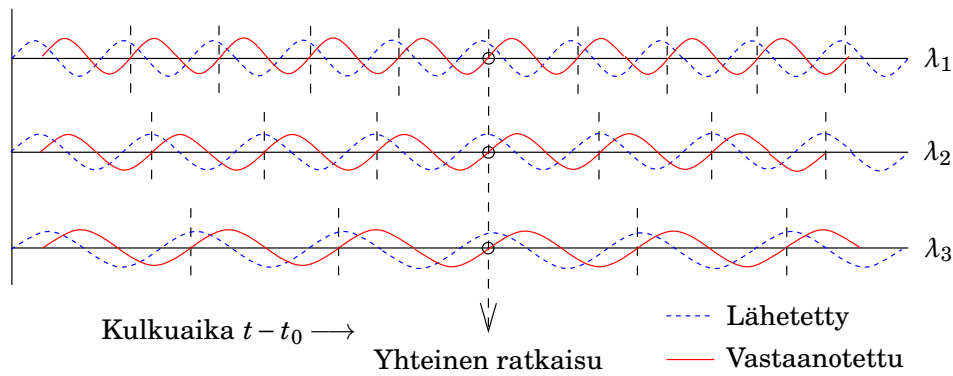
Vaihemittauksesta  $\Delta \phi$  lasketaan *etäisyys*:

$$s = \frac{1}{2} c \overline{\Delta t} = \frac{1}{2} (c \Delta t + N \lambda) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \phi}{2\pi} + N \right) \lambda,$$

jossa  $\lambda = c/f$  on aallonpituus ja  $N \in \mathbb{Z}$  tuntematon lukumäärä kokonaisaallonpituuksia. Kokonaislukutuntemattomien eli *ambiguiteettien*  $N$  määrittäminen on samanlainen ongelma kuin esiintyy GPS:n kantoaallon vaihemittauksen yhteydessä. Etäisyysmittareissa käytetään useita eri modulaatiotaajuuksia  $f_i$  (eli vastaavasti aallonpituuksia  $\lambda_i = c/f_i$ ), jotka on valittu niin, että vain yksi etäisyys  $s$  ja vastaava kulku-aika  $\overline{\Delta t}$  sopivat







KUVA 7.10. Ambiguiteetit eli kokonaislukutuntemattomat ratkaistaan käyttämällä useita aallonpituuksia. Kuvassa näkyy kolmen eri aallonpituuden signaalit ja on oletettu, että lähetettyjen signaalien vaihekulmat ovat nolla lähetys hetkellä  $t_0$ . Ainoa mahdollinen kulkuaika on se, jolloin kaikkien kolmen vastaanotetun signaalin lasketut vaihekulmat ovat identtisiä niiden mitattujen arvojen kanssa, joiden tässä myös oletetaan olevan nolla. Katso myös kuva 13.4.

yhteen kaikkien aallonpituuksien kokonaislukuarvoisten tuntemattomien  $N_i$  kanssa. Katso kuva 7.10.

Nykyisin on saatavissa pieniä ja edullisia, käsikäyttöisiä etäisyysmittareita, jotka toimivat joko infrapunasäteiden tai akustisen eli ultraäänisäteen avulla. Ne ovat käteviä rakennusprojekteissa. Jopa asunnonvälittäjät käyttävät niitä.



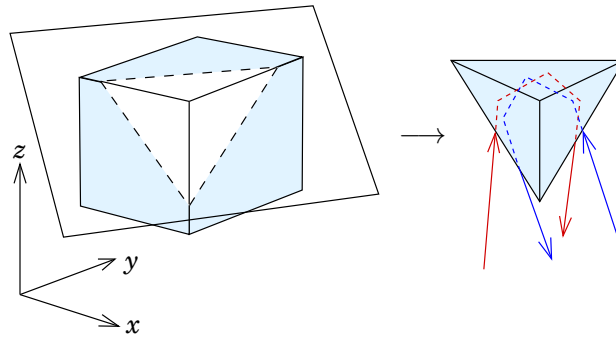
### 7.4.3 Heijastimet

Sähköoptiset etäisyysmittarit tarvitsevat toimiakseen kohteeseen sijoitettavan *heijastimen*. Tavallisesti käytetään *kuutioprismaa* (*corner-cube prism*), kuva 7.11. Kuutioprisman toiminta perustuu kolmeen keskenään kohtisuorassa olevaan heijastuspintaan, joista ensimmäinen kääntää valonsäteen  $x$ -koordinaatin suuntaan  $-x$ , toinen  $y$ -koordinaatin suuntaan  $-y$  ja kolmas  $z$ -koordinaatin suuntaan  $-z$ . Lopputulos on valonsäteen täydellinen kääntäminen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}.$$

Prismaan osuva valonsäde heijastuu takaisin juuri vastakkaiseen suuntaan, riippumatta siitä, mistä suunnasta se tuli — ainakin prisman avauskulman sisällä.





KUVA 7.11. Kuutioprisma.

Lyhyillä kantomatoilla voi käyttää myös heijastavia tarroja, tai itse kohteen heijastamaa valoa ilman apukeinoja. Tällöin mittaustarkkuus ei välttämättä ole paras mahdollinen!

Pidemmillä matkoilla voi yhden prisman sijasta käyttää kolmen prisman rykelmää. Hyvin pitkillä matkoilla (kymmeniä kilometrejä) voidaan laittaa useat prismat yhteen ”patteriin”, kuva 7.12. Nykyisin sellaiset etäisyydet (vektorit) mitataan kuitenkin GNSS-tekniikalla.

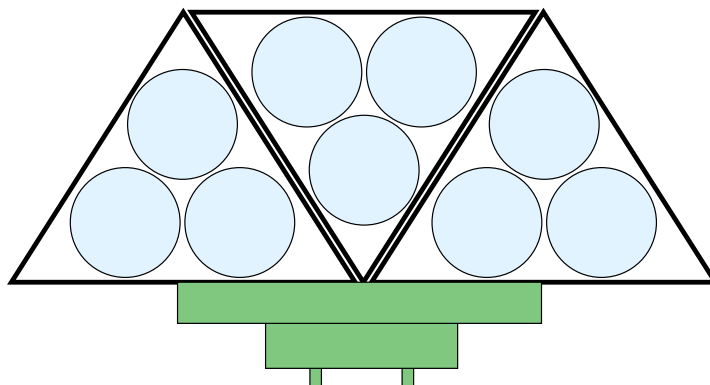
Prismakokoonpano sopii pakkokeskistyslaitteeseen.

**Varoitus** Kun käyttää prismalla varustettua tähystä, teodoliitin hiusviivaristikkoa ei saa kohdistaa prisman ”ristikkoon”! Se on todennäköisesti vinossa eikä tähän tarkoitettu. Käytä tätä varten tehtyjä tähyksen kolmiomerkkejä, kuva 7.13.

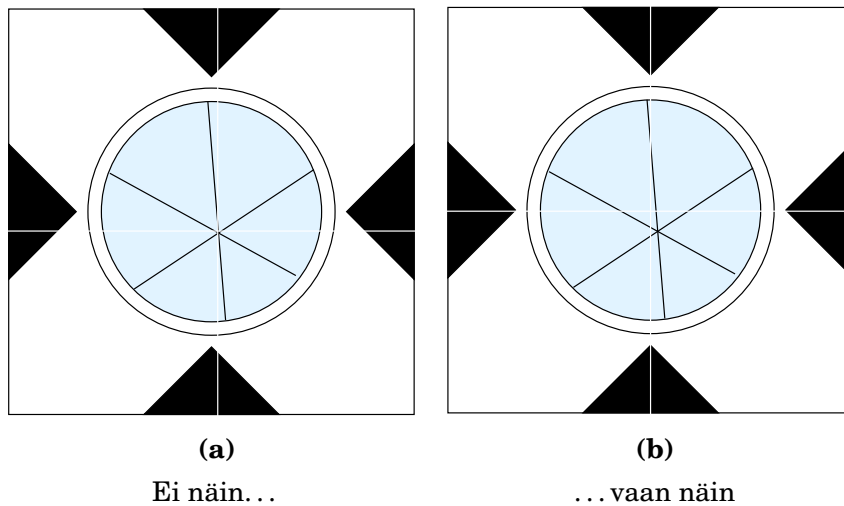



#### 7.4.4 Elektronisten etäisyysmittareiden kojevirheet

Elektronisen etäisyysmittarin systemaattinen kojevirhe jakautuu kahteen osaan:



KUVA 7.12. Prismojen patteri pitkille mittausetäisyyksille.




 KUVA 7.13. Väärä ja oikea kohdistus kuutioprismalla varustettuun tähykseen.

- nollapistevirhe eli vakiovirhe
- mittakaavavirhe eli taajuusvirhe.

Vakiovirhe on laitevakio, joka määritetään *kalibroinnin* avulla. Taajuusvirhe on mittakaavavirhe, joka sekin määritetään kalibroinnin avulla: taajuuskalibrointi.

Vakio- eli nollapistevirhe johtuu siitä, että kojeen sähköinen keskus on eri paikassa kuin sen nimellinen paikka. Laitteen sisällä signaalin kulku voi sisältää tuntemattomia viiveitä. Vakiovirhe voi riippua lämpötilas-

 TAULU 7.1. Etäisyysmittarin vakio- ja taajuusvirheen laskenta lineaariregressiolla.

Vakiovirheen  $a$  ja taajuusvirheen  $V$  laskemiseksi — *estimoimiseksi* — kalibrointiperusviivan mittauksista käytetään seuraavaa lineaarisen regression standardiyhtälöparia:

$$\hat{V} = \left( n \sum_{i=1}^n s_i \Delta s_i - \sum_{i=1}^n s_i \sum_{i=1}^n \Delta s_i \right) / \left( n \sum_{i=1}^n (s_i^2) - \left( \sum_{i=1}^n s_i \right)^2 \right),$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \Delta s_i - \hat{V} \sum_{i=1}^n s_i \right).$$

Tässä  $n$  on käytettyjen kalibrointietäisyyksien  $s_i$  lukumäärä, vähintään 2.  $\Delta s_i$  on erotus: mitattu etäisyys miinus nimellisetäisyys, jokaiselle mitatulle etäisyydelle.

ta, muuttua hitaasti ajassa ("käynti" eli "ryömintä") tai se voi muuttua korjaustoimenpiteiden yhteydessä. Siksi *säännöllinen kalibrointi* on suositeltava käytäntö.

Myös heijastimella on nollapistevirhe, ja usein ilmoitetaan kojeen ja heijastimen yhteenlaskettu vakiovirhe.

- Taajuusvirhe määritetään usein laboratoriossa käyttäen tarkkaa taajuusstandardia:

$$V = \frac{f_{\text{mitattu}} - f_{\text{nimellinen}}}{f_{\text{nimellinen}}}. \quad (7.3)$$

Tässä  $f_{\text{mitattu}}$  on laboratorion kalibrointimittauksesta saatu taajuusarvo, ja  $f_{\text{nimellinen}}$  on valmistajan ilmoittama (ja laiteohjelmistoon koodattujen korjauskaavojen pohjana oleva) taajuusarvo.

- Vakio- ja taajuusvirhe saadaan selville kalibroimalla koje tarkalla *perusviivalla*:

$$s'_i = s_i - a - Vs_i,$$

jossa

$s'$  perusviivan antama "oikea" etäisyys

$s$  kalibroitavan kojeen mittaama etäisyys

$i$  mittauspisteen numero perusviivalla, esimerkiksi pilarin \_\_\_\_\_ numero.

Kirjoitetaan

$$\Delta s_i \stackrel{\text{def}}{=} s_i - s'_i = a + Vs_i$$

ja ratkaistaan  $a$  ja  $V$  *lineaarisen regression* avulla, taulu 7.1.

Tietenkin hyvän kalibrointituloksen aikaansaaminen edellyttää riittävän pitkän kalibrointiperusviivan käyttöä. Lyhyellä viivalla voidaan määrittää ainoastaan  $a$  riittävällä tarkkuudella. Toisaalta monen etäisyysmittauslaitteen sähköistä signaalia voidaan ottaa suoraan laitteesta ja verrata taajuusstandardin kanssa käyttämättä perusviivaa.

Näin saadaan etäisyysmittauksen laitekorjaus:

$$s' = s - a - Vs,$$

jossa

$s'$  korjattu etäisyys

$s$  mitattu etäisyys



– $a$  kojeen vakio- eli nollapistekorjaus

– $V$  kojeen taajuuskorjaus.

Etäisyysmittauksen *satunnainen* kokonaisvirhe, siis mittausarvojen *keskivirhe*, riippuu yleensä myös mitatusta etäisyydestä. Usein käyttökel-poinen kaava on

$$\sigma = \alpha + \beta s,$$

jossa  $\alpha$  on nollamatkan satunnaisvirhe,  $\beta$  on matkasta riippuva satun-naisvirhe ja  $\sigma$  on näistä laskettu havaintojen keskivirhe. Tässä oletetaan, että *systemaattiset* virheet — kuten vakiovirhe ja taajuusvirhe — ja tarvittavat havaintojen reduktiot on jo otettu huomioon korjauksina.



## 7.5 Säteen kulku ilmakehässä

Ilmassa, kuten muussakin väliaineessa, valo — ja muu sähkömagneet-tinen säteily kuten infrapuna tai radioaallot — kulkee hitaammin kuin tyhjiössä. Väliaineen hidastava vaikutus ilmaistaan *taitekertoimen*  $n$  avulla. Taitekertoimen määritelmä on

$$n = \frac{c}{c'},$$

jossa  $c'$  on valon nopeus ilmassa ja  $c$  valon nopeus tyhjiössä, luonnon va-kio. Koska ilma on kaasu, siis ohut väliaine, ovat taitekertoimen  $n$  arvot aina hyvin lähellä lukua yksi. Siksi käytetään myös määritelmää, joka antaa taitekertoimen poikkeaman arvosta yksi, yksikkönä miljoonasosa:

$$N = 10^6 (n - 1).$$

Ilman taitekerroin näkyvän valon aallonpituuksille on seuraavan, Kan-sainvälisen geodeettisen assosiaation (IAG:n) vuonna 1999 yleiskokouk-sessaan Englannin Birminghamissa hyväksymän, likimääräisen kaavan mukaan (Rüeger 1996, sivu 55, Anon., 1999):

$$N_L = N_0(\lambda) \frac{273,15 \text{ K}}{T} \frac{p}{1013,25 \text{ hPa}} - \frac{11,27 \text{ K/hPa}}{T} e, \quad (7.4)$$

jossa<sup>12</sup>

12

$N_0(\lambda)$  käytetyn valon (aallonpituus  $\lambda$ ) kuivan ilman taitekerroin seuraa-vissa standardiolosuhteissa:  $T = 273,15 \text{ K} = 0^\circ \text{ C}$ ,  $p = 1013,25 \text{ hPa}$ ,  
 $e = 0,0 \text{ hPa}$

<sup>12</sup>Niinpä, pieni anomaalinen vesihöyryn vaikutus oletetaan ei-dispersiiviseksi!



$T$  ilman lämpötila, yksikkö kelvin (K) eli absoluuttinen lämpötila  
 $p$  ilmanpaine, yksikkö hehtopascal (hPa) eli millibaari (mbar)  
 $e$  ilmakehän vesihöyryn osapaine ("absoluuttinen kosteus"), yksikkö  
 myös hehtopascal.

$N_0$  riippuu vain käytetyn valon aallonpituudesta  $\lambda$ . Likiarvokaava sen laskemiseksi on

$$N_0 = 287,6155 + \frac{4,8866 \mu\text{m}^2}{\lambda^2} + \frac{0,0680 \mu\text{m}^4}{\lambda^4}. \quad (7.5)$$

- <sup>13</sup> Tämä on *ryhmätaitekerroin*, joka eroaa vaihetaitekerroimesta<sup>13</sup>. Elektronisten ja sähköoptisten etäisyyssmittauslaitteiden yhteydessä tulee käyttää ryhmätaitekerrointa, koska *informaatio* kulkee kantoaallon *modulaatiossa*, joka etenee ryhmänopeudella.

**Esimerkki** Helium-neonlaserilla (aallonpituus  $\lambda = 632,8\text{nm}$ ) yhtälö 7.5 antaa  $N_0 = 300,243$ .

*Mikroaaltojen* taitekerroin taas on

$$N_M = \frac{77,624 \text{ K/hPa}}{T} (p - e) + \frac{64,70 \text{ K/hPa}}{T} \left( 1 + \frac{5748 \text{ K}}{T} \right) e. \quad (7.6)$$

Toisin kuin valon ja infrapunan taitekerroin, mikroaaltojen taitekerroin ei ole *troposfäärissä* riippuvainen aallonpituudesta. Kuitenkin mikroaaltojen kulku *ionosfäärissä* on aivan toinen, satelliittipaikannukselle relevantti asia, katso alaosio 12.7.3.

Mielenkiintoisena yksityiskohtana voidaan vielä todeta, että lämpötilassa  $T = 273,15\text{K}$  mikroaaltojen taitekerroinyhtälössä 7.6 suureen  $e$  vaikutuksen suhde suureen  $p - e$  (kuivan ilman osapaineen) vaikutukseen on yli kaksikymmentä kertaa suurempi kuin näkyvän valon taitekerroinyhtälössä 7.4!

Kerroin	$p - e$	$e$	Suhde
Optinen	0,29630	0,25504	0,86075
Mikroaalto	0,28418	5,22133	18,373

- <sup>14</sup> Mikroaallot ovat siis hyvin herkkiä vesihöyrylle<sup>14</sup>, mikä on tä-

<sup>13</sup>Itse asiassa vaihetaitekerroin on vastaavasti (Anon., 1999):

$$N_0 = 287,6155 + \frac{1,62887 \mu\text{m}^2}{\lambda^2} + \frac{0,01360 \mu\text{m}^4}{\lambda^4}.$$

män mittaustekniikan eräs haittapuoli. Ongelma tulee esille myös GPS-mittauksissa.

Ilman taitekerroin vaikuttaa mitattuun etäisyyteen seuraavalla tavalla:

$$s - s' = (n - 1)s, \quad (7.7)$$

jossa  $s$  on mitattu etäisyys ja  $s'$  todellinen etäisyys, joka mitattaisiin tyhjiössä. *Refraktiokorjaus* sovelletaan nyt seuraavasti:

$$s' = s + \Delta s_n,$$

jossa

$$\Delta s_n = -(n - 1)s = -10^{-6}Ns$$

on korjaus. Kirjallisuudessa käytetään tähän symbolia  $K'$ . Koska korjaus on niin pieni, saa matkalle  $s$  käyttää likiarvoa.



## 7.6 ”Kaarevuuskorjaukset”

Etäisyysmittauksessa ”kaarevuuskorjaukset” ovat toisen luokan korjauksia: ne ovat merkittäviä vasta, kun mittausetäisyys ylittää monta kilometriä. Näin ollen ne eivät vaikuta kartoitus- tai alemman luokan runkomittauksiin.

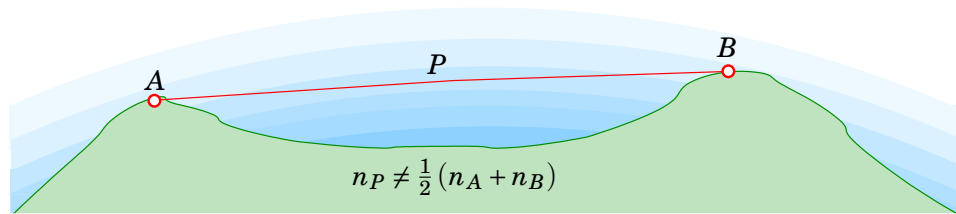
Koska nykyisin runkoverkkojen mittaus tapahtuu lähes yksinomaan GNSS-tekniikan avulla, ovat nämä korjaukset vain historiallisesti kiinnostavia, ja esittelemme ne vain lyhyesti. Seikkaperäisemmät selostukset löytyvät kirjallisuudesta, esimerkiksi Rüeger (1996, 2002).

Kaarevuuskorjausten yhtälöissä esiintyy jo zeniittikulmamittauksen yhteydessä (alaosio 6.8.1) tutuksi tullut *refraktiokerroin*  $k$ . Korjaukset ovat neljänlaisia:

**Mittaussäteen kaarevuuskorjaus** Mittaussäteen kaareutuminen aiheuttaa matkan pitenemisen. Mitattu etäisyys on siis tästä geometrisesta syystä todellista matkaa pitempi. Korjauksen yhtälö on

$$\Delta s_\rho = -\frac{s^3}{24\rho^2} = -k^2 \frac{s^3}{24R^2}, \quad (7.8)$$

<sup>14</sup>Tämä johtuu vesimolekyylien epäsymmetrisyydestä ja suuresta dipolimomentista eli *poolisuudesta*: H<sub>2</sub>O-molekyylissä kahden O–H-sidoksen välinen kulma on 104°,5. Tämä on samalla yksi syy siihen, miksi vesi on neste huoneen lämpötilassa, ja niin hyvä liuotin, ja miksi mikroaaltouuni on niin kelpo ruuanlaittoväline. Melkein kaikki muut ilmakehän molekyylit, kuten N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, Ar ja CH<sub>4</sub>, ovat poolittomia, ja kaasuja. Wikipedia, Poolisuus.



KUVA 7.14. Toinen nopeuskorjaus: kaarevalla maapallolla mittauspolun päätepisteiden taitekertoimet eivät ole edustavia.

jossa  $k$  on refraktiokerroin,  $R$  Maan säde ja  $s$  matka.

**Maan pinnan kaarevuuden aiheuttama korjaus** Eri reduktio-  
vaiheiden jälkeen saadaan yleensä kahden vertaustasolla olevan  
projektiopisteen välinen, suora etäisyys. Halutaan kuitenkin etäi-  
syys kaarevan Maan pintaa pitkin, jolloin etäisyys on pidempi.  
Tämän korjauksen yhtälö on

$$\Delta s_R = \frac{s^3}{24R^2}.$$

**”Toinen nopeuskorjaus”** Yleensä refraktion vaikutus mittaussäteen  
kulkuun lasketaan matkan molemmissa päätepisteessä suoritet-  
tujen säähavaintojen — ilmanpaine-, lämpötila- ja kosteusmittaus-  
ten — perusteella. Hyvin pitkillä matkoilla nämä mittaukset eivät  
enää ole *edustavia* koko sädepolun kannalta.

Toinen nopeuskorjaus on *systemaattinen* efekti, joka johtuu siitä,  
että säteen kaarevuus eroaa maanpinnan kaarevuudesta yhdessä  
ilmanpaineen — ja näin taitekertoimen — vahvan pystygradientin  
kanssa. Kun säteen polun kaarevuus on pienempi kuin maanpin-  
nan, ”sukeltaa” polku pitkillä matkoilla syvemmin Maan ilmake-  
hään kuin polun päätepisteet kertovat. Katso [Rüeger \(1996\)](#) sivu  
81. Laskentakaava — jonka johtaminen on työläs — on

$$\Delta s_{n'} = -k(1-k) \frac{s^3}{12R^2}.$$

Kirjallisuus kutsuu tätä korjausta  $K''$ .

Kaikki kolme korjausta voidaan yhdistää yhdeksi yhtälöksi:

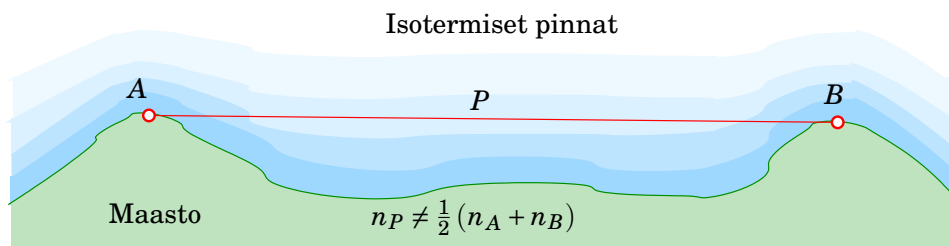
$$\Delta s_{\rho R n'} = \Delta s_{\rho} + \Delta s_R + \Delta s_{n'} = (1-k)^2 \frac{s^3}{24R^2}.$$

Lasketaan joitakin arvoja olettaen, että  $k = 0,2$ :

$s$ (km)	1	3	10	30	100
$\Delta s_{\rho R n'}$	$0,66 \mu\text{m}$	$18 \mu\text{m}$	$0,66 \text{mm}$	$18 \text{mm}$	$0,66 \text{m}$







KUVA 7.15. Etäisyysmittauksen maastokorjaus. Maastonmuotojen takia mitauspolun päätepisteiden taitekertoimet eivät ole edustavia.

Efekti on siis tavallisesti todella pieni.

**”Maastokorjaus”** Etäisyysmittauksen maastokorjaus (Juhani Kakkuri, henkilökohtainen viesti; kuva 7.15; Kakkuri ym., 1981) on seurausta siitä, että ilmakehän saman lämpötilan pinnat, *isotermiset pinnat*, seuraavat yleensä maastonmuotoja. Siksi, samalla tavalla kuin toisen nopeuskorjauksen tapauksessa, säähavainnot mitauspolun päätepisteissä *A* ja *B* eivät edusta polun keskiarvoa. Tähän ilmiöön ei löydy yksinkertaista kaavaa.

## 7.7 Geometriset reduktiot

### 7.7.1 Reduktio vertauspintaan

Yllä kuvattujen ”kaarevuuskorjausten” ansiosta alkuperäinen mitaus redukoitiin sekä mitaussäteen että maanpinnan kaarevuuden vuoksi. Korjausten  $\Delta s_n$  ja  $\Delta s_{n'}$  ansiosta myös ilmakehän kulkuviiveet on otettu huomioon. Mittauspolku on kuitenkin edelleen kalteva ja maanpinnan yläpuolella.

Korjaus eli *reduktio* valittuun *vertaustasoon* korjaa sekä mitatun avaruusetäisyyden *kaltevuuden* että sen *korkeuden* valitun vertaustason yläpuolella. Vertauspinnaksi kelpaa

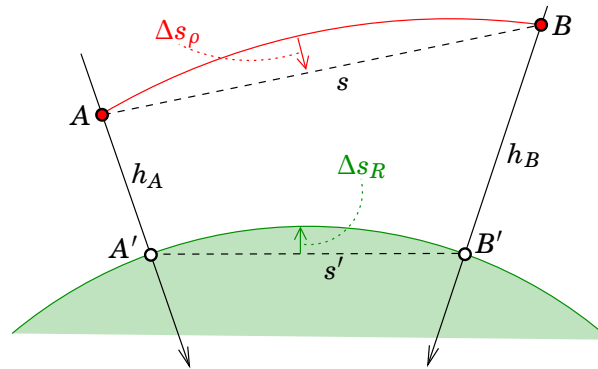
- merenpinta
- vertausellipsoidin pinta
- paikallisesti annetun vertaustason (”nollatason”) korkeus.

Reduktio suoritetaan seuraavasti:

$$(s')^2 = \frac{s^2 - \Delta h^2}{(1 + h_A/R)(1 + h_B/R)}, \quad (7.9)$$

jossa  $s$  on mitattu vinoetäisyys avaruudessa,  $s'$  redukoitu etäisyys (siis etäisyys vertauspinnalle projisoitujen pisteiden  $A', B'$  välillä, katso kuva





KUVA 7.16. Etäisyysmittauksen reduktio vertaustasoon, yhtälö 7.9.

7.16),  $h_A = AA'$  ja  $h_B = BB'$  pisteiden korkeudet vertauspinnasta,  $\Delta h = h_A - h_B$ , ja  $R$  (likimääräinen) Maan kaarevuussäde. Korkeuksiin  $h_A$  ja  $h_B$  sisältyy teodoliitin ja tähyksen korkeudet.

Likimääräinen yhtälö jos  $\Delta h \ll s$  (ja tietysti  $h_A, h_B \ll R$ ) on

$$s' \approx s - \frac{\Delta h^2}{2s} - s \frac{h_A + h_B}{2R}.$$

Tämän yhtälön etuna on, että se antaa erilliset termit polun kaltevuuden ja sen keskikorkeuden vaikutukselle.

Taulukko 7.2 tarjoaa joitakin esimerkkejä korjausten arvoista  $s' - s$ . Näkyy, että tämä korjaus voi olla jo huomattava myös lyhyillä matkoilla.

Nykyiset teodoliitit ja takymetrit osaavat laskea itse laitteistokohtaisten korjausten lisäksi ainakin mitatun etäisyyden kaltevuusreduktion.



### 7.7.2 Karttaprojektioireduktio

Karttaprojektion mittakaavareduktio tarvitaan, jos halutaan vertausellipsoidille redukoidun kaaren pituuden  $s_{\text{ell}}$  sijasta pituus *karttatasossa*, projisoitu pituus  $s_{\text{proj}}$ . Esimerkiksi Suomessa käytetyn Gauss-Krüger-projektion tapauksessa likimääräinen reduktio tehdään seuraavasti<sup>15</sup>:



TAULUKKO 7.2. Etäisyysreduktion esimerkkejä.

$s =$		100 m	1 km	10 km	100 km
$h_A = 0$	$h_B = 10 \text{ m}$	-0,50 m	-51 mm	-13 mm	-79 mm
$h_A = 0$	$h_B = 100 \text{ m}$	-	-5,0 m	-0,58 m	-0,83 m
$h_A = 0$	$h_B = 1000 \text{ m}$	-	-	-51 m	-13 m
$h_A = 100 \text{ m}$	$h_B = 100 \text{ m}$	-1,6 mm	-16 mm	-0,16 m	-1,6 m
$h_A = 1000 \text{ m}$	$h_B = 1000 \text{ m}$	-16 mm	-0,16 m	-1,6 m	-16 m



$$s_{\text{GK}} = s_{\text{ell}} \left( 1, 0 + \frac{y_A^2 + y_A y_B + y_B^2}{6R^2} \right), \quad (7.10)$$

jossa etäisyys  $s$  on pisteiden  $A$  ja  $B$ , karttakoordinaatit  $(x_A, y_A)$  ja  $(x_B, y_B)$ , välillä. Tässä  $y$  on raakaetäisyys keskimeridiaanista, ilman ”vale-itää” (*false easting*) 500 000 m.

Tämä reduktio riippuu valitusta karttaprojektioista ja on siis erilainen eri karttaprojektioille. Esimerkiksi Universal Transverse Mercatorin eli UTM-projektion yhtälö on muuten sama kuin 7.10, mutta vakio — mittakaava keskimeridiaanilla — on 0,9996 eikä 1,0.



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Millaisissa tilanteissa mittanauhan käyttö olisi järkevä valinta?
- 2) Johda likimääräinen kaltevuuskorjaus  $\Delta \ell_{\perp}$ , yhtälö 7.2, ilmaistuna kaltevuuskulmaan  $\alpha$  asteissa. Oleta pieni kulma.
- 3) Mikä on aallonpituuden ja taajuuden välinen suhde sähkömagneettisille aalloille?
- 4) Mikä on taajuuden ja fotonin energian välinen suhde sähkömagneettisille aalloille?
- 5) Mikä on sähkömagneettisten aaltojen polarisaatio?
- 6) Selosta korrelaatioprosessi kahden identtisen mutta satunnaisten signaalien välillä. Miksi signaalien on oltava satunnaisia?

**15** Todistus lähtee siitä, että Mercatorin projektion mittakaava pallolla on lähellä päiväntasaajaa

$$m = \frac{1}{\cos \varphi} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \varphi^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2},$$

jossa  $x$  on metrinen etäisyys päiväntasaajalta. Poikittaiselle Mercatorin projektiolle tästä tulee

$$m = 1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{R^2},$$

jossa  $y$  on etäisyys keskimeridiaanista. Koska selvästi mittakaavavääritysmä on kvadraattinen  $y$ :n funktio, se on, suoralla karttaviivalla, kvadraattinen paikan funktio viivaa pitkin. Silloin viivan keskimittakaavan laskeminen Simpsonin integroinnilla, yhtälö 10.4, on eksakti. Seuraavasti ( $M$  on keskipiste päätepisteiden  $A$  ja  $B$  välillä):

$$\begin{aligned} \overline{m}_{AB} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{6} (y_A^2 + 4y_M^2 + y_B^2) = 1 + \frac{1}{12R^2} (y_A^2 + (y_A + y_B)^2 + y_B^2) = \\ &= 1 + \frac{1}{12R^2} (2y_A^2 + 2y_A y_B + 2y_B^2) = 1 + \frac{1}{6R^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2), \end{aligned}$$

josta tulos 7.10 seuraa.



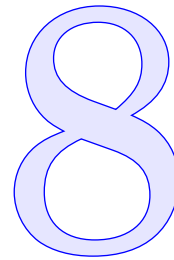
- 7) Kuva, miten ambiguueteetit eli kokonaislukutuntemattomat ratkaistaan elektronisessa etäisyysmittauksessa.
- 8) Mitkä tekijät vaikuttavat säteen kulkuun ilmakehässä, näkyvälle valolle ja mikroaalloille?
- 9) Miten etäisyysmittauslaitteet kalibroidaan?
- 10) Miten etäisyysmittaukset redukoidaan vertauspintaan?
- 11) Todista yhtälö 7.8 määrittämällä  $\psi \stackrel{\text{def}}{=} s/\rho$ , ympyräkaaren muotoisen sädepolun keskipisteen kulma, ja siis

$$\Delta s_\rho = \rho \left( 2 \sin \frac{1}{2} \psi - \psi \right).$$

Käytä sinifunktion Taylorin kehitelmä.



# Runko- ja kartoitusmittaus



[...] Komitea [Karttakomitea] sitten ehdottaa toimenpiteenä tarkan karttalaitoksen aikaansaamiseksi, että perustettaisiin Geodeettinen komissioni, jonka tulisi toimittaa: 1) karttalaitoksen pohjaksi tarvittavat perustavat työt, 2) geodeettiset täytetyöt, 3) topografinen peruskartta mittakaavassa 1 : 20,000, Ensimmäinen ryhmä käsittäisi ensiluokan kolmiomittaukset ja tarkkavaakituksen ja toinen ryhmä pääasiallisesti alemman luokan kolmiomittaukset. [...]

---

Geodeettisen laitoksen johtaja Ilmari **Bonsdorff** (1920)



## 8.1 Runkomittauksen tehtävä ja suunnittelu

Runkomittauksen *tehtävä* on luoda, *verkkohierarkian* avulla, geometri-  
nen perusta maan kartoitukselle. Tähän tarkoitukseen luodaan pysyvä,  
riittävän tiheä ja tarkka kiintopisteistö, johon eri käyttäjäryhmien pai-  
kalliset mittaukset sidotaan. Kiintopisteiden koordinaatit ovat tiedossa  
kansallisessa koordinaatistossa, ja niitä käyttämällä saadaan myös pai-  
kallisesti mitatut pisteet ja laaditut kartat samaan koordinaatistoon.

Kiintopisteitä käytetään sekä yksityiskohtien mittauksissa — kar-  
toitusmittauksissa — että suunnitelmien maastoon merkitsemisessä —  
paalutuksessa, ”kartoituksen käännteistehtävässä”.

Runkomittauksen *suunnittelu* lähtee olemassa olevan tilanteen inven-  
toinnista ja tarpeiden analyysistä. Tavoite on rakentaa riittävän tarkka  
ja tiheä kiintopisteistö mahdollisimman vähin kustannuksin. Pisteistö  
kannattaa suunnitella tulevaisuutta varten, etenkin *kiintopistealustaa*  
valittaessa ja *monumentoinnissa*. Paikan valinnassa otetaan huomioon  
mahdollisesti tuleva rakennustoiminta, joka saattaa tuhota pisteen tai

tehdä sen käyttökelvottomaksi tuhoamalla mittauksen näkyvyysehdot: teodoliittimittauksen tapauksessa pisteiden keskinäinen näkyvyys, satelliittimittauksen tapauksessa taivaan riittävä näkyvyys pisteeltä.

Verkon yksityiskohtaiseen suunnitteluun kuuluu *rekognosointi*: tarkistetaan maastossa, että mittaukset voidaan suorittaa kuten on suunniteltu. Rekognosointia edeltää ”karttarekognosointi”, jossa jo toimistossa arvioidaan tilannetta. Jos luodaan uusia pisteitä, on laadittava jokaiselle pisteelle selkeä ja käyttökelpoinen *pistekortti*, jonka avulla muutkin voivat löytää sen.

*Tarkkuuden* lisäksi huomiota on kiinnitettävä *luotettavuuteen*. Luotettavuuteen kuuluu, että mahdolliset karkeat mittausvirheet huomataan mahdollisimman helposti ja suurimman mahdollisen huomaamatta jääneen virheen vaikutus lopputulokseen — koordinaattiratkaisuun — on mahdollisimman pieni. Tätä varten verkossa on oltava riittävästi *redundanssia*: riittävästi ylimääräisiä mittauksia välttämättömän minimimäärän lisäksi.

Perinteisen ratkaisun — kolmiomittausverkko monikulmiojonoilla tihennettynä — sijasta nykykäytäntö on mitata GNSS-verkkoja. Nekin on suunniteltava oikein eli hierarkkisesti ja mittaukset on suunniteltava niin, että tavoitetarkkuus ja -tiheys saavutetaan taloudellisella tavalla.

Runkomittaukselle löytyvät seuraavat menetelmävaihtoehdot:

- satelliittipaikannus (GNSS)
- perinteinen terrestrinen mittaus takymetrilla
- fotogrammetrinen ilmakolmiointi.

Valinta perustuu käyttötarkoitukseen — tarkkuusvaatimukset ja alueen koko ja helppokulkuisuus — sekä pisteiden näkyvyysolosuhteisiin.

Runkoverkkojen mittausteknologia on satelliittipaikannuksen myötä kokenut mullistuksen. Perinteisesti runkomittaus on tehty kolmiomittauksen ja monikulmiojonomittauksen avulla vaakatasossa sekä tarkka-vaaituksen ja alemman luokan vaaituksen avulla, kun oli kyse korkeuksista. Nykyisin käytetään aina kun mahdollista satelliittipaikannusta. Kuitenkin on käyttötilanteita, joissa perinteiset tekniikat edelleen loistavat, esimerkiksi tunneli- ja kaivosmittauksissa, joissa taivas ei näy.

Hyvä johdanto aiheeseen on julkaisussa *Salmenperä (1998)*, johon tämä esitys osittain perustuu.





## 8.2 Ohjeistus ja standardit

Geodeettisen mittauksen laadun ja tehokkuuden varmistamiseksi on olemassa monenlaisia standardeja ja ohjeita. Tässä esitetään vain virallisimmat.

Tärkeä ohjeistus oli Maanmittauslaitoksen laatima Kaavoitusmittausohjeet (Anon., 2003). Ohjeistus koskee runkomittausta, kartoitusmittausta, ilmakuvasta ja kaavan pohjakartan laadintaa sekä työn dokumentointia.

*Runkomittausta, vertausjärjestelmiä, karttaprojektioita ja kaavoitusmittausta* on viime aikana ohjeistanut JUHTA, Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta, joka julkaisee sarjaa JHS, Julkisen hallinnon tietohallintoa koskevat suositukset (Ollikainen, 2013). Vuonna 2013 päätettiin jatkossa julkaista kaavoitusmittausta koskevat ohjeet JHS-sarjassa.

Aiheisiin liittyvistä suosituksista voi mainita seuraavat verkkojulkaisut:

- JHS 196 (korvaa JHS 153): EUREF-FIN -järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa (JUHTA, 2016a).
- JHS 197 (korvaa JHS 154): EUREF-FIN -koordinaattijärjestelmät, niihin liittyvät muunnokset ja karttalehtijako (JUHTA, 2016b).
- JHS 163: Suomen korkeusjärjestelmä N2000 (JUHTA, 2010).
- JHS 178: Kunnan paikkatietopalvelurajapinta. Dokumentti määrittelee rajapinnan nimeltä kuntaGML (Geographic Mark-up Language) (JUHTA, 2012a).
- JHS 184: Kiintopistemittaus EUREF-FIN -koordinaattijärjestelmässä (JUHTA, 2012b).
- JHS 185: Asemakaavan pohjakartan laatiminen. Tämä korvaa osittain aiemmin Maanmittauslaitoksen laatimat julkaisut Kaavoitusmittausohjeet ja Kaavan pohjakartan (JUHTA, 2014).

Tärkeää standardointityötä on myös *sanastotyö*. Mainittakoon Maanmittauslaitoksen ja Sanastokeskus TSK ry:n yhdessä laatima Geoinformatiikan sanasto (Sanastokeskus TSK, 2018).

Ohjeistus ja standardointi vaativat jatkuvaa työtä.



TAULUKKO 8.1. Runkomittauksen menetelmät.

Mitta- kaava	Luokka		Perinteiset menetelmät	Nykyaikaiset menetelmät
	Vanha	Uusi		
Globaali	-	-	-	GNSS, VLBI, satelliittilaser, DORIS
1000 km	-	E1	(Tähti- kolmiomittaus)	GNSS, pysyvä verkko (FinnRef <sup>TM</sup> )
100 km	I	E1, E1b, E2	1. luokan kolmiomittaus	GNSS, EUREF-FIN-tihennys
10 km	II, III	E3	Alemman luokan kolmiomittaus	GNSS, staattinen
1 km	IV, V	E4	Monikulmiojonot, ilmakolmiointi	GNSS, ilmakolmiointi, RTK varauksella



### 8.3 Verkkohierarkia ja -luokitus

Jo viime neljännesvuosisadan aikana lähes kaikki runkoverkkojen mittaustyö on tehty satelliittipaikannustekniikan avulla — lukuun ottamatta tarkkavaaitusta, teknisistä syistä (geoidiongelma). Taulukossa 8.1 on lueteltu teknologiat, joita käytettiin silloin ja käytetään nyt runkomittauksen yhteydessä.

Taulukko valaisee myös hyvin *verkkohierarkian* käsitettä: paikallisemmat verkot sidotaan aina laajempiin verkkoihin, jotka toimivat niiden ”muodollisena totuutena”. Työskentelyjärjestys on aina *suuresta pieneen*, ensin mitataan kaikkein laajimmat verkot, jotka sitten *tihennetään* suppeamman alueen mittausten avulla. Tällä tavoin saadaan kiintopisteistö, joka on

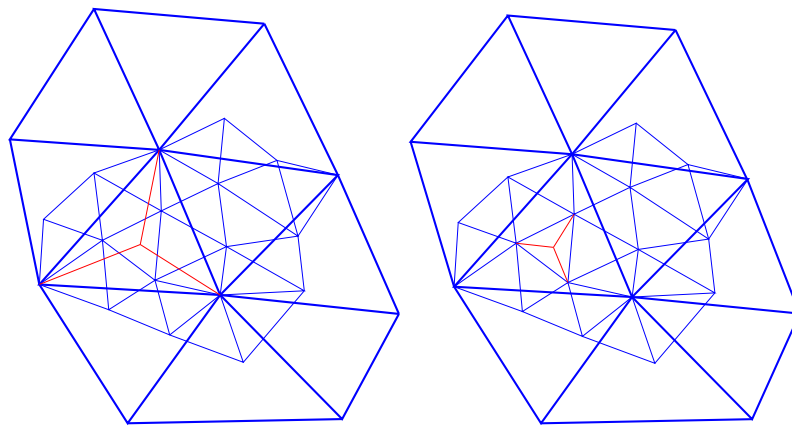
- koko Suomen kattava
- riittävän tiheä: rakennustoiminta vaatii lähtöpisteitä riittävän lähellä, korkeintaan muutaman sadan metrin etäisyyksillä projekti-alueesta ja toisistaan
- laadultaan homogeeninen.

Hierarkkisen menetelmän avulla pyritään välttämään se hankala tilanne, jossa vierekkäisille pisteille on eri polkujen kautta tullut määrityksi koordinaatteja, joiden keskinäinen *relatiivinen* sijaintitarkkuus on heikko.

Taulukossa mainitut uudet mittausteknologiat käsitellään laajemmin

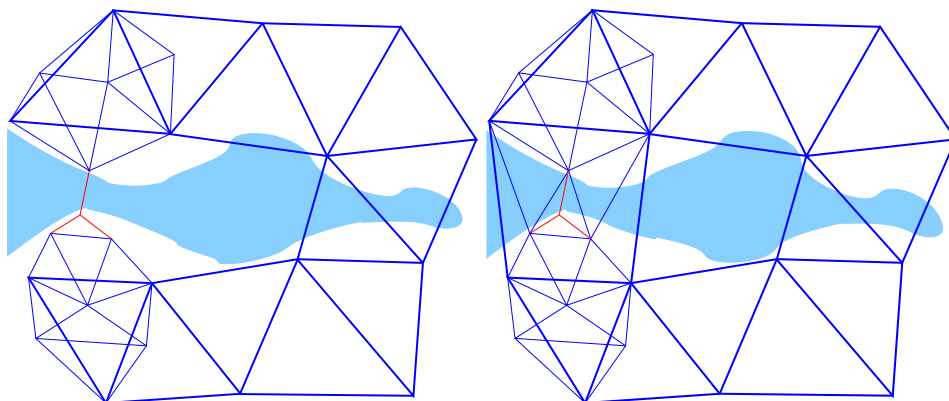






(a)

Hierarkian taso unohtuu väliltä



(b)

Kahden eri hierarkiapolun käyttö yhdessä mittauksessa

KUVA 8.1. Verkkohierarkian merkitys ja usein tehdyt virheet. Ei näin... vaan näin.

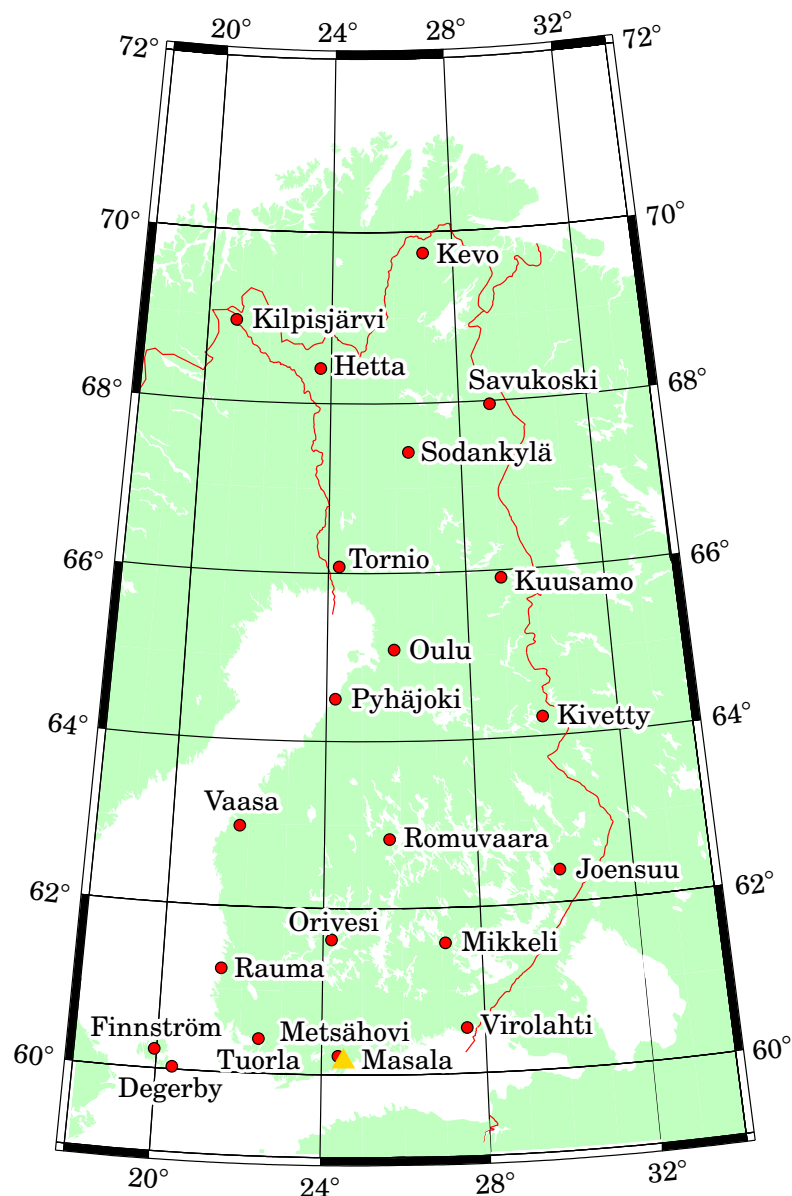


myöhemmissä luvuissa.

Suomen geodeettisten perustöiden suunnittelu alkoi jo ennen itsenäistymistä ja työt alkoivat heti itsenäistymisen jälkeen (Bonsdorff, 1920). Taulukossa mainitun ensimmäisen luokan kolmiomittauksen verkko käsittää 364 pistettä ja kattaa koko Suomen alueen. Verkon mittasi Geodeettinen laitos 1919–1987. Alemman luokan kolmiomittauksia ja jonomittauksia suoritti silloinen Maanmittaushallitus, nykyinen Maanmittauslaitos. Paikallisia mittauksia suorittivat monet tahot, muun muassa kunnat. Vastaavalla tavalla (JUHTA, 2012b) luokkien E1 ja E1b pisteet mittasi Geodeettinen laitos, kun taas luokat E2 ja E3 ovat Maanmittauslaitoksen ja Merenkululaitoksen mittaamia. E4 ja käyttöpistemittausluokat E5 ja E6 mittaavat kunnat.

Nykyään Suomessa valtakunnallisten GNSS-verkkojen ylimmän tason



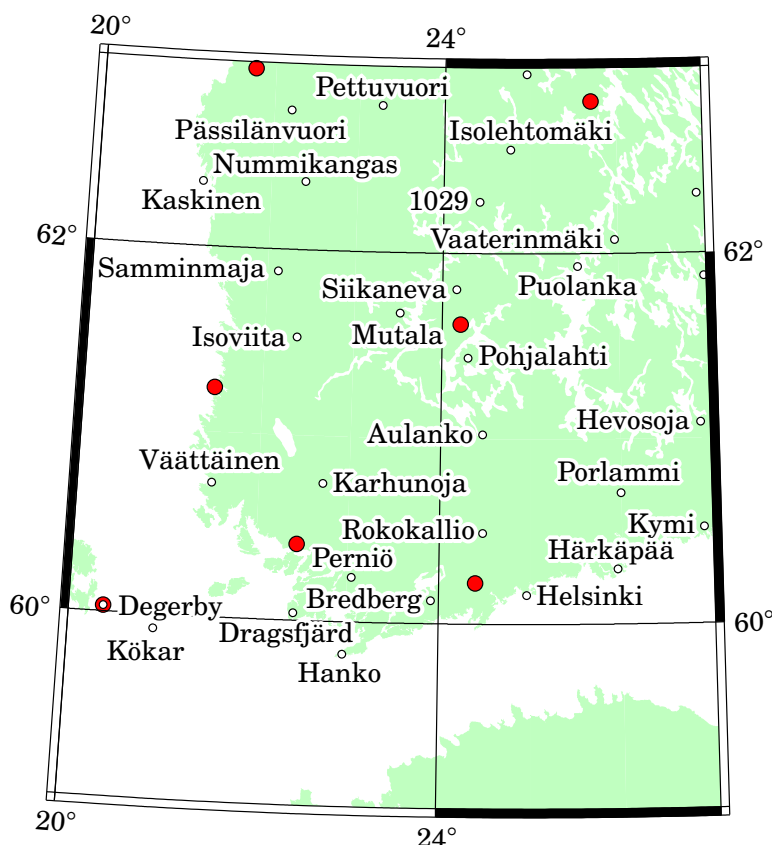


KUVA 8.2. Suomen jatkuvasti toimiva GNSS-verkko FinnRef™, tilanne 2018. Mittausasemat keräävät jatkuvasti GNSS-mittausaineistoa aika-tiheydellä yksi mittaustapahtuma per sekunti. Tietokeskus sijaitsee Maanmittauslaitoksen Paikkatietokeskuksessa FGI Kirkkonummen Masalassa.



muodostaa jatkuvasti toimiva GNSS-verkko FinnRef™. Aikanaan se koostui 13 asemasta; vuosina 2012–2013 suoritetun uudistuksen jälkeen sillä on 20 asemaa. Havaintoaineistoa kerää Maanmittauslaitoksen Paikkatietokeskus FGI, entinen Geodeettinen laitos. Vuosina 1996–1999 Geodeettinen laitos suoritti kaksivaiheisen EUREF-FIN-tihennysmittauksen staattisella GPS-paikannustekniikalla, käsittäen yhteensä noin 450 pis-





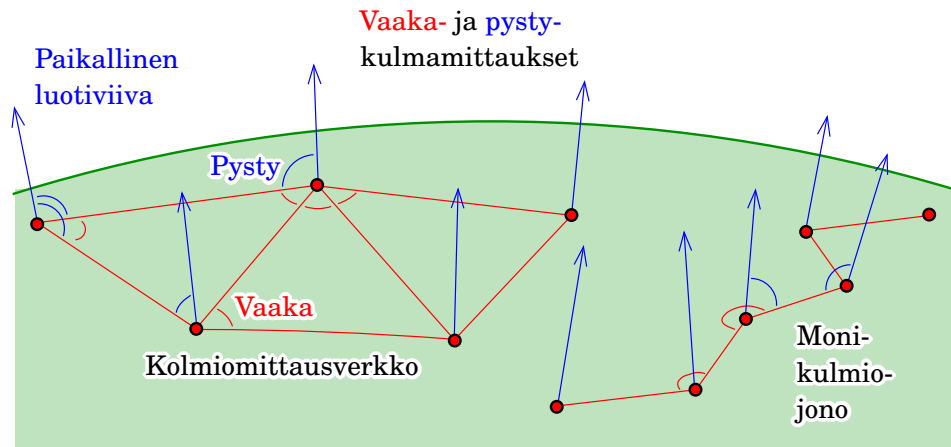
KUVA 8.3. Suomen EUREF-FIN ensimmäisen vaiheen tihennysverkko, osa. Nämä pisteet yhdessä FinnRef™-pisteiden kanssa muodostavat E1-luokan.

tettä. Ensimmäisen vaiheen verkko käsittää 100 pistettä, katso kuva 8.3 ja JUHTA (2016a). Se mitattiin vuosina 1996–1997. Yhdessä jatkuvasti toimivan GNSS-verkon FinnRefin kanssa se muodostaa modernin luokan I eli E1. Yhdessä ne määrittävät EUREF-FIN-koordinaatiston. Toinen EUREF-FIN-tihennysvaihe, joka mitattiin vuosina 1998–1999, käsittää 350 pistettä ja on tarkoitettu helpommin saavutettavaksi pisteistöksi käytännön mittauksiin. Sen luokitus on E1b.

Maanmittauslaitos on suorittanut jo monta vuotta runkomittauksia staattisella GNSS-mittaustekniikalla: luokan E2 pisteitä, joiden mittaukset ovat suoraan sidottuja luokkien E1 ja E1b pisteisiin, on olemassa noin 2000. Viime vuosina kinemaattinen GNSS-mittaus (RTK, *real-time kinematic*) on yleistynyt alemman luokan runkoverkkojen mittauksissa, vaikka sen soveltuvuus tähän on uskottavasti kyseenalaistettu. Menetelmää tulisi käyttää vain tavalla, joka takaa mittausten luotettavuuden (JUHTA, 2012b).

Hyvän kuvauksen Suomessa käytetyistä koordinaattiratkaisuista ja





KUVA 8.4. Geodeettiset verkot ovat kolmiulotteisia. Kolmiomittausverkko ja monikulmiojono avaruudessa.

niiden välisistä yhteyksistä antavat Häkli ym. (2009).



#### 8.4 Maastosta, ellipsoidista ja karttatasosta

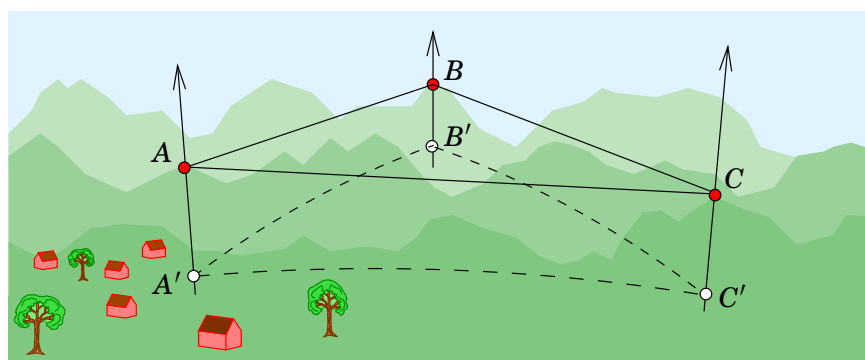
Geodeettiset mittausverkot, kuten kolmiomittausverkko ja monikulmiojono, ovat itse asiassa *kolmiulotteisia* verkkoja, kuva 8.4. Looginen ajatus on suorittaa myös verkon laskenta eli *tasointa* kolmiulotteisesti: pisteiden sijainnit kirjoitetaan kolmiulotteisesti suorakulmaisten koordinaattien muodossa. Jokainen havaintosuure kuvataan näiden pisteiden, joiden välillä mittaus tapahtuu, koordinaattien funktiona. Näin saadaan *havaintoyhtälöt*, joihin verkon tasointa perustuu.

Kolmiulotteinen verkkotasointa on houkutteleva ajatus, lähinnä sen perusidean yksinkertaisuuden vuoksi. Havaintoyhtälöiden muodostus on kuitenkin monimutkaista, koska mittaukset tehdään jokaisessa pisteessä *kojekoordinaateissa*, siis koordinaatistossa, jonka *z*-akseli osoittaa paikallista *luotiviivaa* pitkin ylöspäin. Luotiviivan suunta, jonka voi mitata tähtitieteellisin menetelmin, on erilainen jokaisessa pisteessä, kuten kuvasta 8.4 näkyy.

Tämä merkitsee, että ainakin vaakakulmien (atsimuuttien) ja zeniittikulmien havaintoyhtälöissä molempien päätepisteen luotiviivan suunnan on oltava mukana. Se tekee yhtälöistä huomattavan monimutkaisia. Vainoetäisyysmittauksilla sen sijaan on yksinkertainen havaintoyhtälö.

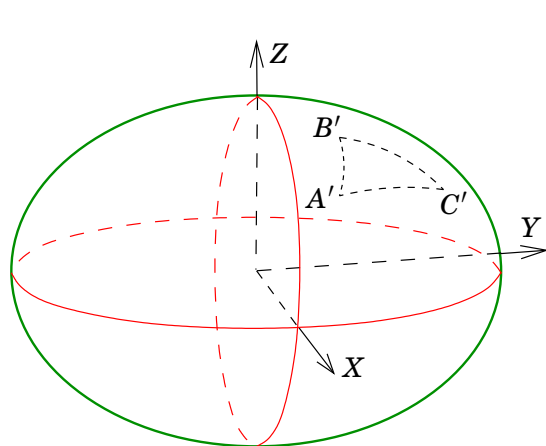
Terrestriset geodeettiset mittaukset tehdään aina Maan fyysikaalisen pinnan läheisyydessä, yleensä pinnan päällä olevien pisteiden välillä. Näin ollen tätä verkkogeometriaa voidaan kutsua ”kvasi-kaksiulotteiseksi”. Tuntuu järkevältä yrittää suorittaa myös laskennat kaksiulotteisesti,





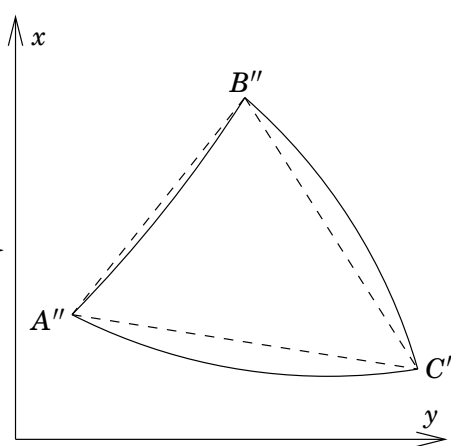
(a)

Mittaus maastossa



(b)

Projisoitu vertausellipsoidille



(c)

Karttaprojektiossa "suorat"  
kaareutuvat

KUVA 8.5. Vertausellipsoidin ja karttaprojektiotason käyttö vertauspintoina  
Maan kartoituksessa.

sopivasti valitun, Maan pintaa lähellä olevan ja matemaattisesti yksinkertaisen laskenta- eli *vertauspinnan* avulla. Kuitenkin Maan fysikaalinen pinta vuoristoineen ja syvyyksineen on liian rosainen laskentapinnaksi.

Sopivammat laskentapinnat ovat *vertausellipsoidi* tai — pienellä alueella — *karttaprojektiotaso*, kuva 8.5. Laskentaa varten havainnot *redukoitetaan* tähän laskenta- eli vertauspintaan.



#### 8.4.1 Tasoitus vertausellipsoidilla

Vertausellipsoidi yhtyy suhteellisen hyvin Maan pintaan ja yksinkertaisena matemaattisena pintana sopii laskentapinnaksi. Taulukko 8.2 kuvaa kiinteän Maan fysikaalisen pinnan ja vertausellipsoidin välisten



TAULUKKO 8.2. Vertausellipsoidin approksimaation hyvyys: Maan fysikaalisen pinnan ja vertausellipsoidin välinen etäisyys sekä kilometreisä että suhteessa Maan säteeseen.

Yksikkö	km	%
Korkein (Mount Everest)	+8,8	+0,138
Syvin (Mariaanien hauta)	−11	−0,17
Maan keskikorkeus	+0,84	+0,013
Meren keskisyvyys	−3,8	−0,06
Merenpinta (geoidi)	±0,1	±0,0016

<sup>1</sup> erojen suuruutta<sup>1</sup>. Ja huomautetaan vielä, että ihmiskunta elää kiinteän Maan pinnan läheisyydessä maa-alueilla, mutta merenpinnan läheisyydessä merialueilla: taulukon antama vaikutelma liioittelee ihmiskunnan elintilan paksuutta.

Vertailun vuoksi GRS80-vertausellipsoidin päiväntasaajan säteen ja napasäteen välinen erotus on jo 21,4 km eli 0,336 %. ”Vertauspallo” olisi jo selvästi heikompi approksimaatio.

Vertausellipsoidia käytettiin laskentapintana jo laajasti 1800-luvulla, ennen tietokoneiden ja satelliittipaikannuksen olemassaoloa. Tarvittava matematiikka on mutkikas, mutta menetelmä on intuitiivisempi: terrestiset geodeettiset verkot ovat Maan pinnalla lähellä vertausellipsoidia ja paikalliset luotiviivat, joiden suuntaisesti mittauskojeiden pysty akselit tasataan, ovat lähellä vertausellipsoidin pinnan normaalia.

Nykyisin runkoverkkoja mitataan satelliittitekniikan avulla ja perinteinen menetelmä on jäänyt historiaan. GNSS-verkkoja tasoitetaan aina aidosti kolmiulotteisesti.



#### 8.4.2 Tasoitus karttatasossa

Pienten paikallisten verkkojen, esimerkiksi monikulmiojonojen, tasoitus voidaan ilman merkittävää virhettä suorittaa suoraan karttaprojektiossa.

Karttaprojektio toteutetaan aina niin, että ensin maaston pisteille lasketaan geodeettiset koordinaatit  $\varphi$  ja  $\lambda$  vertausellipsoidin pinnalla. Näin

<sup>1</sup>Vertailun vuoksi: Mars-planeetan vuori Olympus Mons on 22 km korkea ympäristönsä suhteen, 0,65 % Marsin säteestä. Marsin painovoiman kiihtyvyys onkin vain kolmasosa Maan arvosta.

suoritetaan projektio ellipsoidin pinnalle. Tämän jälkeen ellipsoidilla olevat pisteet projisoidaan karttatasolle.

Tietenkään ellipsoidin kuperaa pintaa ei voida kuvata tasolle virheettömästi. Projisoidut kohteet *vääristyvät*: suunnat, etäisyydet ja pinta-alat saattavat kaikki olla vääriä karttatasossa. Karttaprojektio valitaan niin, että jotkut tärkeäksi katsotut asiat *eivät* vääristy. Jotkut muut asiat vääristyvät, joskus pahasti. Esimerkiksi *konforminen* projektio kuvaa kulmat ja pituussuhteet oikein, mutta kuten klassinen Mercatorin projektio näyttää, se voi kuvata pinta-aloja näyttävästi väärin.

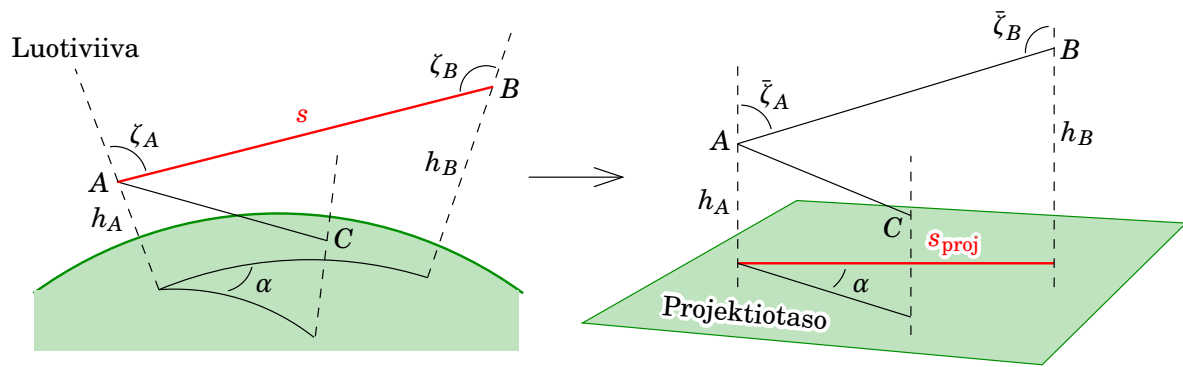
Konformisessa projektiossa pienet kohteet kuvautuvat oikean muotoisina: niiden mittakaava ja absoluuttinen orientointi voivat olla pielessä, mutta *muoto on oikein*. Suuremmissa kohteissa ellipsoidista projisoidut ”suorat” viivat ovat karttatasossa kaarevia. Karttatasossa *suunnat* voivat olla erilaisia kuin ellipsoidin pinnalla<sup>2</sup> — vaikka *kulmat* ovat konformisessa projektiossa identtisiä.

Karttaprojektiotasossa verkkotasoitustehtävän ilmaisu ja ratkaisu ovat suhteellisen yksinkertaisia, mutta ne edellyttävät, että

- Etäisyysmittaukset on redukoitu ensin vertauspintaan, sen jälkeen karttaprojektiotasoon (siis karttaprojektion *mittakaavareduktio* on tehty).
- Karttaprojektio on *konforminen*, jolloin mitatut vaakakulmat kelpaavat suoraan ilman reduktiota. Yleiskartoille käytetyt karttaprojektiot ovat konformisia, kuten Suomessa käytetty Gauss-Krüger-projektio ja UTM. Suomessa karttakoordinaatit siis kelpaavat suoraan käytettäväksi verkkotasoituksessa.
- Zeniittikulmat kahden mittauspisteen  $A$  ja  $B$  välillä on mitattu molempiin suuntiin, ja käytettävät kulmat ovat mittausten jonkinlaiset keskiarvot:  $\bar{\zeta}_A = \frac{1}{2}(\zeta_A + 200^\circ - \zeta_B)$ ,  $\bar{\zeta}_B = \frac{1}{2}(\zeta_B + 200^\circ - \zeta_A)$ . Silloin korkeuksia vertaustasosta voidaan laskea suorakulmaisen geometrian mukaan (katso alaosio 6.8.3).
- Tunnetuilla pisteillä, kuten monikulmiojonon tapauksessa alku- ja loppupisteillä sekä alku- ja loppuliitospisteillä, on tunnetut koordinaatit karttaprojektiotasossa.

Tämän lähestymistavan visuaalinen selostus on esitetty kuvassa 8.6.

<sup>2</sup>Klassisessa Mercatorin projektiossa ne ovat kuitenkin identtisiä, mikä on arvostettu ominaisuus merinavigoinnissa.



KUVA 8.6. Pienen verkon tasoituksen geometrian siirtäminen karttaprojektio-  
tasolle.



## 8.5 Kartoitusmittaus

*Kartoitusmittaus* (Kahmen ja Faig, 1988, sivut 285–303) on runkomittauksiin perustuva, maaston yksityiskohtien kartoitusta palveleva mittausprosessin vaihe. Se on koko kartoitusprojektin työläin vaihe. Kartoitusmittaus koostuu maastotietojen keruusta ja aineiston käsittelystä halutun lopputuotteen, kartan tai digitaalisen paikkatietoaineiston, aikaansaamiseksi. Kartoitusmittauksen käsittelyvaiheessa ovat mukana runkomittauksen tulokset, jotka varmistavat tuotteen geometrisen oikeellisuuden.

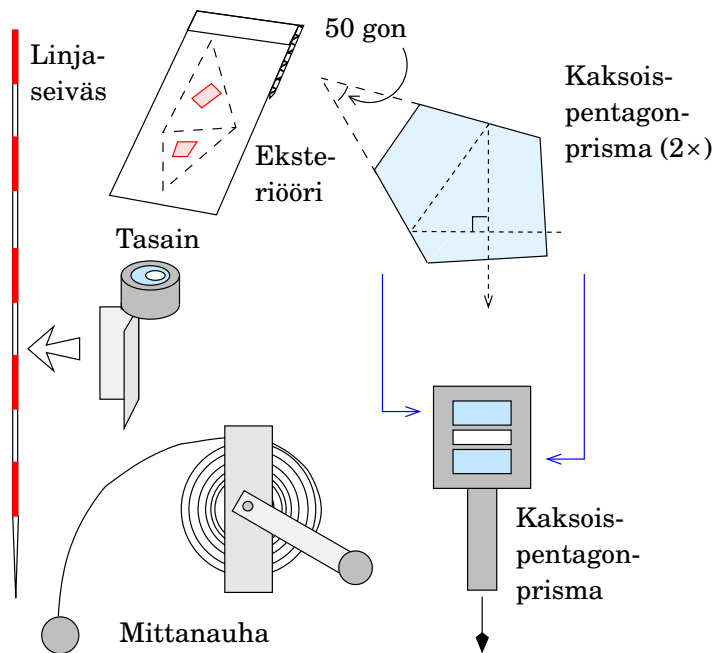
Seuraavassa käsitellään yksityiskohtaisemmin neljä klassista terestristä menetelmää: *suorakulmaista kartoitusta*, *sidoslinjamittausta*, *säteittäistä kartoitusta* ja *vapaan asemapisteen menetelmää*.

Suosittu kartoitusmittausmenetelmä on myös *tosiainainen kinemaattinen* satelliittipaikannus (engl. [RTK](#), *real-time kinematic*), joka on monesti kilpailukykyinen. Sen käyttö on kuitenkin hankalaa esimerkiksi korkearakenteisessa kaupunkimaisemassa, ”katukanjonissa”, ja mahdotonta maan alla.

Uusi laajojen alueiden kartoitusmittauksen menetelmä on *mobiilikartoitusjärjestelmä*. Järjestelmässä on integroituina auton katolle terestrisen laserkeilain, GNSS-vastaanotin, inertiamittausyksikkö ja kameroiden rykelmä. Auto ajaa reittiä mitattavan alueen sisällä. Menetelmä tuottaa valtavasti havaintoaineistoa, jonka käsittelytyö on vaativa. Menetelmän vahvuus on, että manuaalinen kenttätyö väistyy lähes kokonaan: ainoastaan tunnettujen pisteiden signalointi jää. Heikkous on, että aineistoon jää helposti katvealueita. Tulokset voidaan esittää perinteisen kartan lisäksi myös kolmiulotteisina maisemakuvina Google Street View<sup>TM</sup>:n tavoin.







KUVA 8.7. Suorakulmaisen kartoitusmenetelmän apuvälineet.

### 8.5.1 Suorakulmainen kartoitus (prismamittaus)

Välineiksi tarvitaan mittanauha, kaksoispentagonprisma, linjaseipäitä<sup>3</sup> karttalinjojen viitoittamiseksi ja ruutupaperia, kuva 8.7.

Mittaus suoritetaan kuvan 8.8 mukaan. *A* ja *B* ovat tunnettuja pisteitä, usein alimman hierarkialuokan monikulmiojonopisteitä. Suorat kulmat luodaan kaksoispentagonprisman avulla: kun seisoo linjalla *AB*, näkyvät molemmat päätepisteet (eli pystytetyt seipäät) päällekkäin laitteessa, joka sisältää kaksi viisikulmaista prismaa. Toinen katsoo suoran kulman ( $100^g$ ) verran oikeaan, toinen saman kulman verran vasempaan eli vastakkaiseen suuntaan.

Etäisyydet *b* saavat olla enintään yhden nauhamitan (50 m) pituisia.

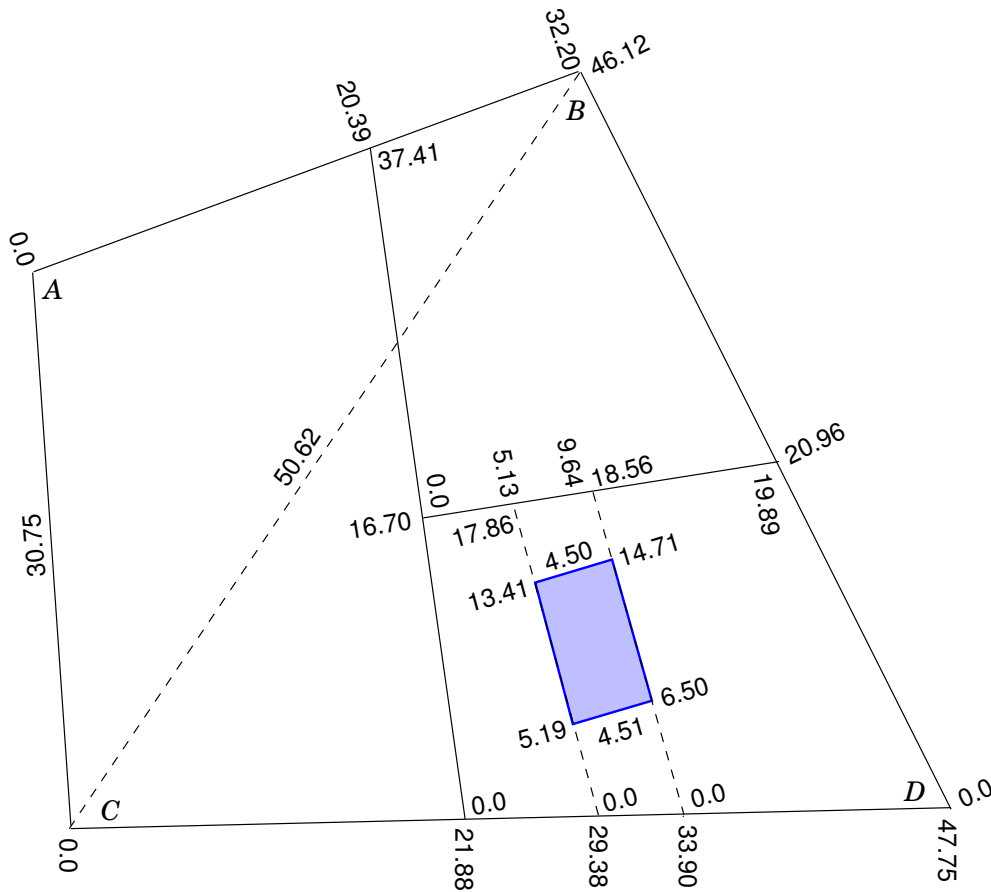
Kuvan oikealla puolella näkyy, miten rakennus mitataan suorakulmaisella menetelmällä.

Aina on huolehdittava siitä, että on riittävästi *redundanssia* tarkistusta varten, mahdollisten erehdysten löytämiseksi. Tässä esimerkissä voitaisiin mitata talon seinämitat.

Mittaukset numeroarvoineen kirjoitetaan kenttäpiirrokseen, *eksteriööriin*, mielellään siististi ja järjestelmällisesti, tavalla josta muutkin kuin itse piirtäjä piirtämisen hetkellä saavat selvää.

<sup>3</sup>Englanniksi *ranging rod*, Saksaksi *fluchtstab*, ranskaksi ja hollanniksi *jalon*.





KUVA 8.9. Sidoslinjamittaus. Ristimitta ja talon seinämitat toimivat tarkistuksina.

geodeettisen käänteistehtävän ratkaisuna pisteiden  $A$  ja  $B$  annetuista sijaintikoordinaateista.

Sen jälkeen

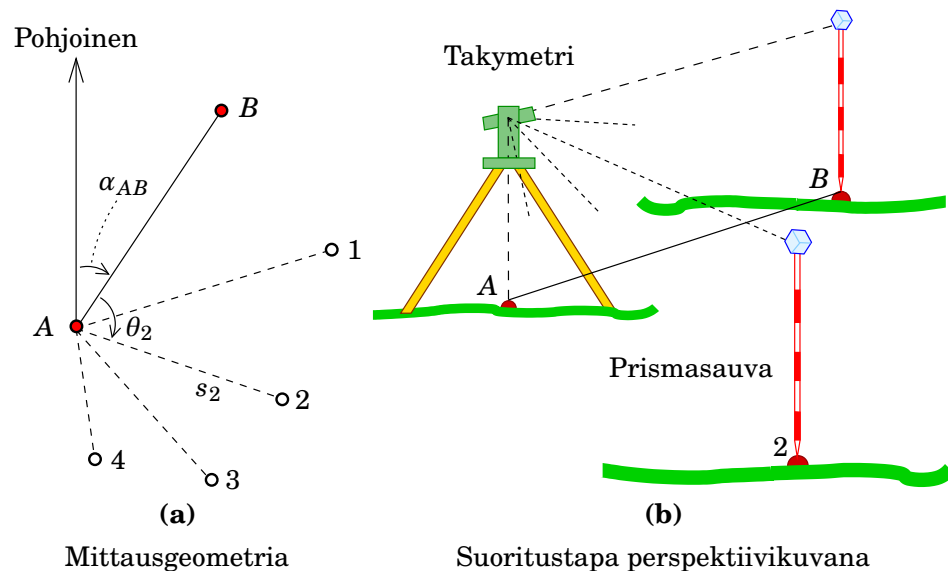
$$\begin{aligned}x_i &= x_A + \bar{s}_i \cos(\alpha_{AB} + \theta_i) = s_i \sin \zeta_i \cos(\alpha_{AB} + \theta_i), \\y_i &= y_A + \bar{s}_i \sin(\alpha_{AB} + \theta_i) = s_i \sin \zeta_i \sin(\alpha_{AB} + \theta_i).\end{aligned}$$

Tässä mitattu vinoetäisyys on redukoitu *vaakaetäisyydeksi*  $\bar{s}_i \stackrel{\text{def}}{=} s_i \sin \zeta_i$ , jossa  $\zeta_i$  on pysty- eli zeniittikulma, joka myös mitataan.

Sädekartoituksen osana saadaan näin trigonometrinen korkeusmittaus: koska koje mittaa sekä zenittikulman  $\zeta_i$  että vinoetäisyyden  $s_i$ , saadaan vaakaetäisyyden  $\bar{s}_i$  lisäksi myös kolmas koordinaatti

$$z_i = z_A + s_i \cos \zeta_i.$$

Joko pisteen  $A$  tai pisteen  $B$  korkeuden on oltava tunnettu korkeuskennan lähtöarvoksi. Jos pisteen  $B$  korkeus on annettu, ei tarvitse edes



KUVA 8.10. Säteittäinen kartoitusmenetelmä.

mitata takymetrin kojekorkeutta merkin A yläpuolella, koska prismasauvan korkeus ei muutu mittauksen aikana.

Käytettävä laitteisto on elektroninen takymetri, sopivalla ohjelmistolla varustettuna. Kojе valitaan tulevan kartoituksen tavoitetarkkuuden mukaan.

Säteittäinen kartoitus on *numeerinen kartoitusmenetelmä*, jossa kartta-tuote tehdään laskennallisesti mitta-arvojen  $\theta_i$ ,  $\zeta_i$  ja  $s_i$  pohjalta niiden metatietojen avulla. Kun mittaukset kerätään elektronisesti, on tämä edullinen ja helposti automatisoitava silloin, kun mitattavien pisteiden määrä on suuri ja tarkkuusvaatimukset korkeat.

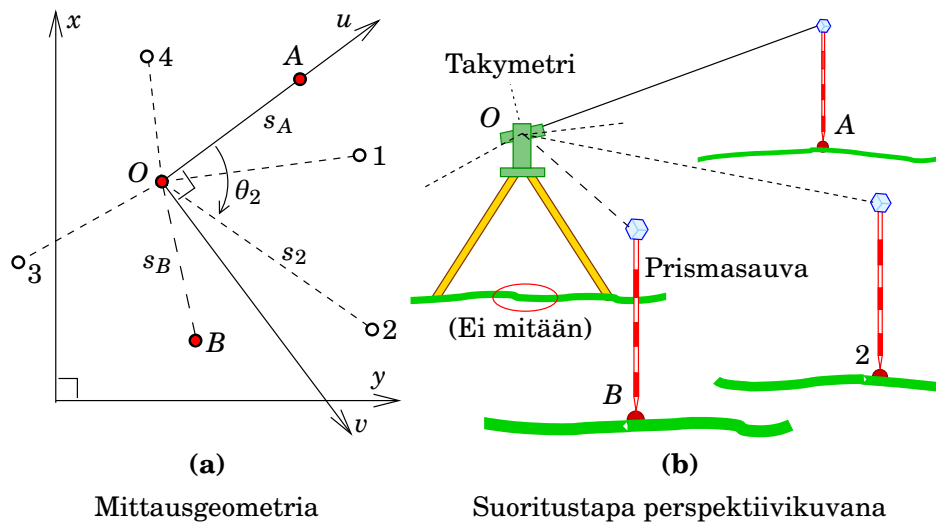
Erityisesti kaupunkialueiden mittauksissa sädekartoitus on käyttökelpoinen, koska suorakulmaisen menetelmän vaatima kartoituslinjojen viitoittaminen voi olla liikenteen vuoksi hankalaa. Myös sellaiset kohteet, joissa tarvitaan sekä taso- että korkeustietoja — tekniset erikoismittaukset, rakennus- ja johtokartoitukset — sekä ruuhkaiset työmaat ovat sädekartoitukselle sopivia.



#### 8.5.4 Vapaan asemapisteen mittaus

Vapaan asemapisteen menetelmällä — engl. *free stationing*, saks. *freie Standpunktwahl* — takymetri pystytetään maastossa vapaasti valittuun paikkaan, josta on hyvä näkyvyys mitattaviin pisteisiin sekä vähintään kahteen, mieluummin kolmeen-neljään, koordinaateiltaan tunnettuun,





KUVA 8.11. Vapaan asemapisteen kartoitusmenetelmä.

tavallisesti runkoverkkoon kuuluvaan pisteeseen. Menetelmän etuna on, että kojetta ei tarvitse pystyttää tarkasti tunnetun pisteen eli maastomerkin yläpuolelle: *keskistykseen*, ja kojekorkeuden mittaamisen, tarve väistyy.

Menetelmä on yleistynyt elektronisten takymetriä saatavuuden ja laskentatehon kasvun myötä. Periaatteessa menetelmää voitaisiin käyttää jopa teodoliitin ja mittanauhan avulla. Katso kuva 8.11. Huomaa, että takymetrin alla ei ole maastomerkkiä!

Olkoon koordinaateiltaan tunnettuja pisteet  $A(x_A, y_A)$  ja  $B(x_B, y_B)$ . Kojepystytetään merkitsemättömään pisteeseen  $O$ . Mitataan pisteille  $A$  ja  $B$  ja tuntemattomille pisteille  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  (kuvan esimerkkipiste  $i = 2$ ):

- vaakasuunnat  $\theta$
- etäisyydet  $s$ .

Jätetään korkeudet huomioimatta. Mittaus antaa paikallisissa eli kojekoordinaateissa  $(u, v)$ :

$$\begin{aligned} u_A &= s_A, & v_A &= 0, \\ u_B &= s_B \cos(\theta_B - \theta_A), & v_B &= s_B \sin(\theta_B - \theta_A), \\ u_i &= s_i \cos(\theta_i - \theta_A), & v_i &= s_i \sin(\theta_i - \theta_A). \end{aligned}$$

Näin lasketaan geodeettisen päätehtävän avulla  $(u, v)$ -koordinaatit kaikille pisteille  $A, B, 1, 2, \dots, n$  koordinaatistossa, jonka  $u$ -akseli on  $OA$ .

Helmertin muunnoksen tuntemattomat parametrit voidaan ratkais-



ta jos tunnetaan vähintään kahden pisteen,  $A:n$  ja  $B:n$ , koordinaatit molemmissa koordinaatistoissa.

Helmertin muunnoksella (osio 3.6) muunnetaan nyt kojekohtaiset koordinaatit  $(u_i, v_i)$  maastokoordinaateiksi  $(x_i, y_i)$ .



## 8.6 Kartoitussmittauksen suorittaminen

Kartoitussmittaus voidaan suorittaa maastomittauksena, jolloin se usein rajoittuu suppealle alueelle. Silloin käytettävä koje on *elektroninen takymetri*. Vaihtoehtoja ovat GNSS-RTK — tosiaikainen kinemaattinen menetelmä — tai ilmakuvauus, mutta ne eivät aina sovi yksinään maaston peitteisyyden vuoksi. Paikallisessa mittauksessa perinteinen prisma- ja mittanauhmittaus tulee kysymykseen, mutta nykyisin niin tehdään harvoin alhaisemman tuottavuuden takia.



### 8.6.1 Mitattavat tiedot ja työskentely

Mitataan jokaisesta mittausasemasta kolmiulotteisesti jokaisen mitattavan pisteen vaakasuunta ( $\theta$ ), zeniittikulma ( $\zeta$ ) ja vinoetäisyys ( $s$ ). Kojelase laskee toposentriset suorakulmaiset koordinaatit  $(x, y, z)$  ja suorittaa yksinkertaisia tarkistuksia. Kun koko kohde on kartoitettu, otetaan konseptitulostus työmaatoimistossa ja suoritetaan kokonaisvaltainen laaduntarkastus.

Seuraavat tiedot kerätään:

#### **Yleistiedot**

- työmaa, päivämäärä, kellonaika, sää, havaitsija
- tunnuksia ja koodeja tarpeen mukaan, katso alaosio 8.6.2.

#### **Jokaiselta asemapisteltä**

- asemapiste (numero, laji), kojekorkeus
- liittopisteet (numero, laji), vaakasuunta, zeniittikulma, etäisyys, prisman korkeus
- kartoituspisteet (numero, laji), vaakasuunta, zeniittikulma, etäisyys, prisman korkeus.

#### **Työskentelyvaiheet**

- 1) Maastopisteet valitaan maaston ja mittauksen käyttötarkoituksen mukaisesti. Esimerkiksi jos halutaan muodostaa epätasaisen alueen tarkka maastomalli, on kerättävä pisteitä sopivan tiheästi.



- 2) Suoritetaan mittausta: kerätään ja esikäsitellään havaintotietoja.
- 3) Aineisto käsitellään.
- 4) Tulos esitetään ja arkistoidaan. Tulos on mittaustyön raportti sisältäen muun muassa käytettyjen menetelmien kuvauksen, mittausolosuhteet, pistekoordinaatit ja niiden tarkkuusarvion, konseptikartan, ja mahdollisesti pinta-ala- tai tilavuuslaskennat sekä muut relevantit mittaustulokset.

Työskentelytapa on täysin digitaalinen.

### Laitteisto ja ohjelmisto

Takymetrioiden oma tietojenkäsittelykyky riittää monenlaisen käyttöön. Kuitenkin

- Yhä tavallisempaa on nähdä tabletti tai vastaava monipuolisin ohjelmistoinen ohjaamassa takymetria langattomasti.
- Tabletin tulee olla kestävä maastokäyttöä varten.
- Ohjelmistot ohjaavat koko havaintotyöskentelyä maastossa.
- Ohjelmistot mahdollistavat *keruun*, *tarkastuksen*, *käsittelyn* ja *raportoinnin* maastossa.

Maastomittauksen laskennassa *runkomittaus* ja *kartoitus* ovat erillisiä vaiheita. Molempia varten on kehitetty omat rutiinit.



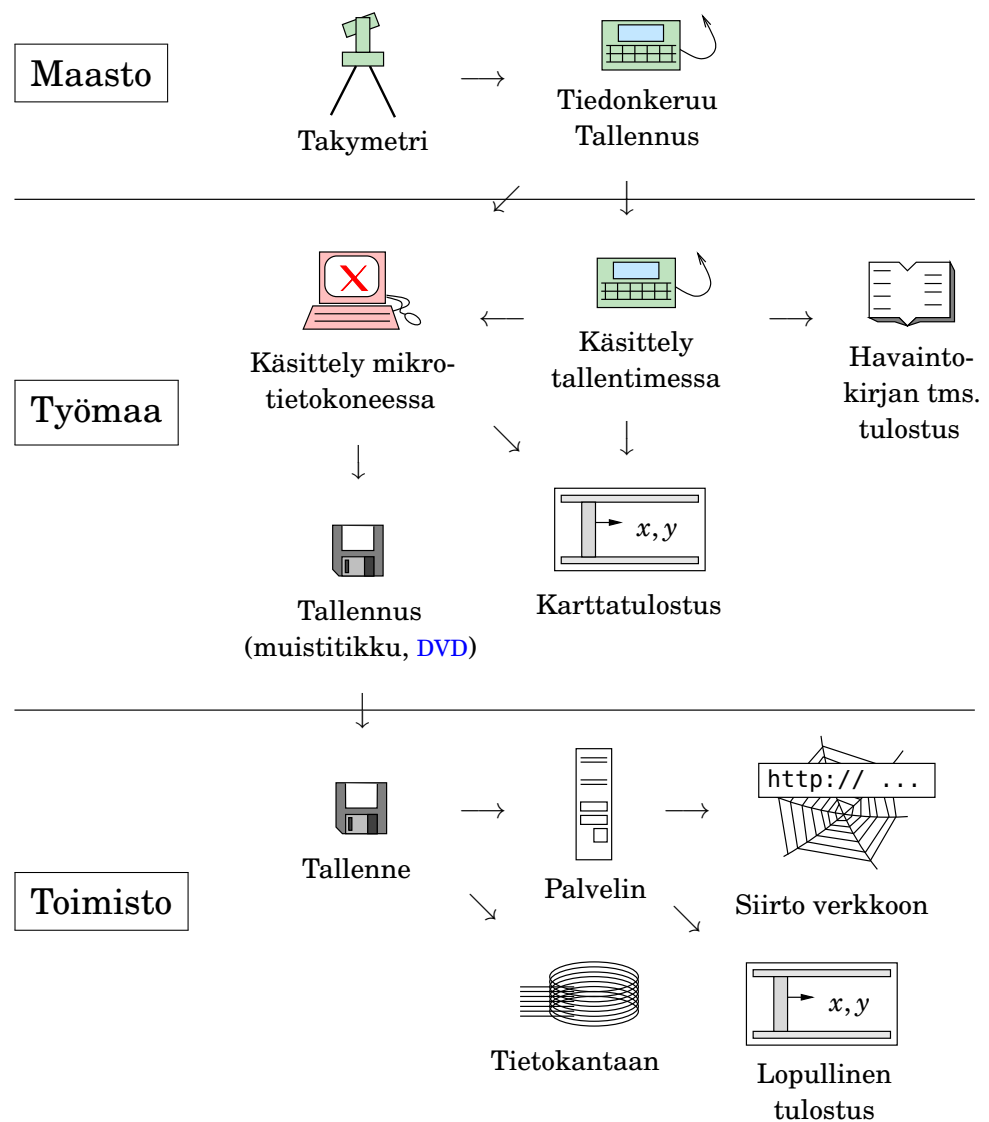
### 8.6.2 Maastotietojen koodaus

*Maastotietojärjestelmä* on paikkatietojärjestelmän erikoistapaus. Se palvelee maastotietojen tehokasta keräämistä geodeettisin keinoin jatkokäsittelyä varten ja eroaa siten yleispaikkatietojärjestelmistä.

Maastotietojärjestelmän ääriesimerkkinä voi mainita Maa- ja metsätalousministeriön ehdotuksen yhdeksi kansalliseksi maastotietojärjestelmäksi (Karlsson, 2015). Sen on määritelty koostuvan seuraavista osioista (§ 3.1.2):

- Valtakunnallinen koordinaatti- ja korkeusjärjestelmä [lienee tarkoitettu taso- ja korkeusvertauskehyksiä].
- *Maastotietokanta* ja siihen liittyvät tiedonhallintajärjestelmät.
- Kaikki ne tietoaaineistot ja -tuotteet, jotka kerätään tai tuotetaan maastotietokannan ylläpitämiseksi, ja palvelut, joita ylläpidetään vihjetietojen saamiseksi maastotietokannan ylläpitoa varten.





KUVA 8.12. Karttoitusmittauksen työskentelykaavio. Kuvassa on entisajan teknologioita, kuten kynäpiirturit ja levykkeet, joista aika on jättänyt, vaikka työvaiheet pysyvät.



- Kaikki ne tieto- ja palvelutuotteet, jotka maastotietojärjestelmän hallinnoija tuottaa maastotietokannasta sen käyttöön saattamiseksi ja käytettävyyden parantamiseksi.

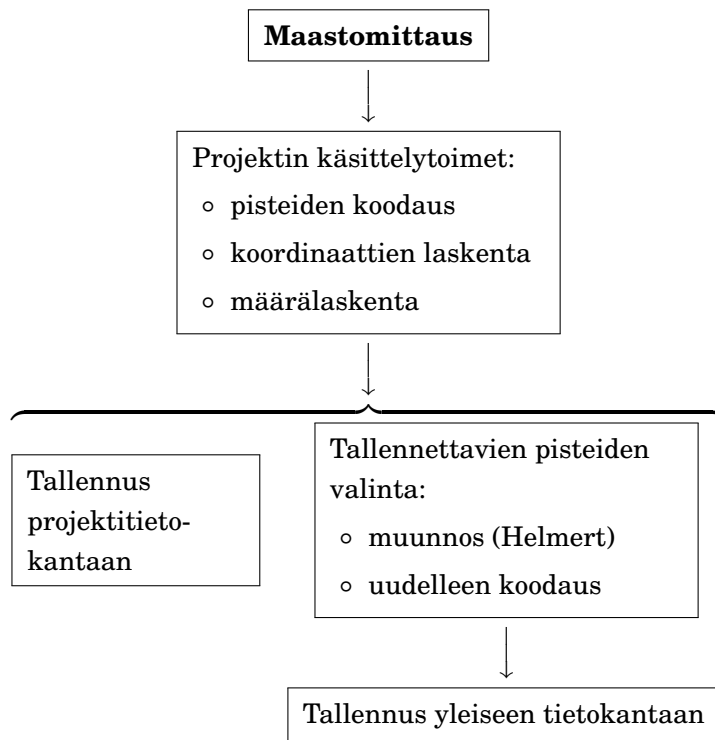
Tietysti useammat maastotietojärjestelmät eivät ole kansallista tasoa.

Maastomittaustiedot kerätään numeerisina, ja niihin kuuluu piste-kohtaisten mittaustietojen lisäksi myös *metatietoa* eli metadataa, dataa kuvaava dataa.

Metatiedon käsite voidaan kuvata maastokartan esimerkin avulla: kartalle on kuvattu paljon enemmän kuin vain mitattuja pisteitä. Pis-







KUVA 8.13. Maastotietojen koodausprosessi. Tiedot voidaan viedä harkinnanvaraisesti yleiseen tietokantaan myöhempää käyttöä varten.

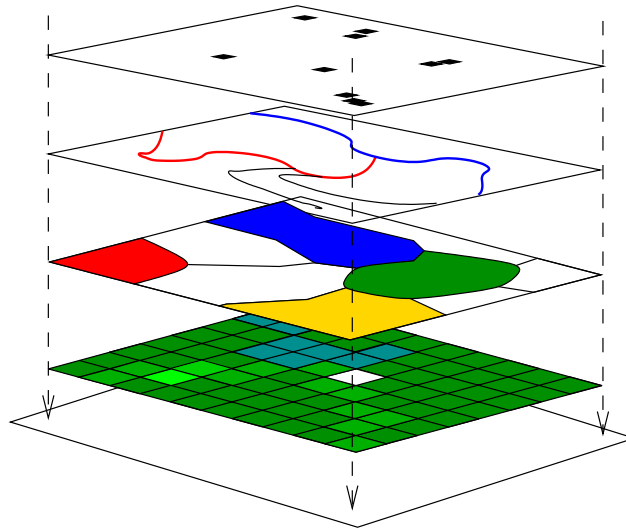
teet muodostavat *kohteita*: lineaarisia (tiet, kadut, vesitiet, ...), alueen muotoisia (tonttien rajat, rakennukset, metsät ja pellot, ...) tai kolmiulotteisia (kukkulat ja laaksot, maastonmuodot). Kaikki kuvataan eri tavalla kartalle ja käytetty kuvaustapa dokumentoidaan kartan *legendassa*<sup>4</sup>.<sup>4</sup> Legenda on siis tavallisen paperikartan metatieto.

Mittausten dokumentointi jo mittausvaiheessa edellyttää, että samalla *tallennetaan myös metatiedot*: kuuluuko tämä piste tontin rajaan, onko se tien reuna, onko se puu (ja mikä laji), vai onko se vain maaston korkeuspiste, josta tullaan laskemaan korkeuskäyriä tai maamassoja? Tarkoitukseen on kehitetty eri maastotietojen *koodausmenetelmiä* eli *katalogeja*, joiden avulla tiedot siirtyvät helpommin ja mahdollisimman automaattisesti. Katso esimerkiksi [OGC, Catalogue Service](#).

Tietyt asiat on koodattava *maastossa* maastomittausta tehtäessä:

- Maastossa mitattujen pisteiden pistenumerot. Ne voidaan generoida myös (puoli-)automaattisesti.

<sup>4</sup>Legenda, lat. *mikä on luettavissa*.



KUVA 8.14. Kohteiden ominaisuustiedot eri kerroksina. Paikkatietojärjestelmän avulla paikkatietoja voidaan tehokkaasti yhdistellä, analysoida ja jalostaa.



- Pisteiden lajikoodit.
- Muiden pisteistä koostuvien kohteiden, kuten viivojen ja alueiden, lajikoodit.
- Tietyt yksilöivät ominaisuustiedot.

Laskennan ja tietokantoihin talletuksen yhteydessä koodausta voidaan tietyiltä osin *täydentää*, esimerkiksi topologiatiedolla. Maastossa suoritettu koodaus ei myöskään ole lopullinen seuraavista syistä:

- Kaikkia maastopisteitä ei viedä yleisiin tietokantoihin.
- Projektikohtainen koodaus ei sovi yleiseen käyttöön.

Usein projektikohtaisia tietoja ei tallenneta yleiseen tietokantaan lainkaan, vaan alue kartoitetaan uudestaan, kun työ on valmis — ”*as-built*”-kartoitus. Idea on, että kartoitetaan valmis tilanne, jolloin ei voi tulla sekaannuksia sen välillä, mitä on toteutettu ja mitä on vain suunniteltu, mutta eriävän toteutuksen jälkeen ei mitattu uudelleen.

Katso kaavio 8.13.

Vanhat, laajassa käytössä olevat koodaukset perustuvat Kaavoitusmittausohjeiden luokitukseen. Tavoitteena on karttatuotteen tulostaminen. Päälähtökohtana on paikkatietojen *yhteiskäyttö* alan eri toimijoiden kesken.

Paikkatietotekniikka antaa mahdollisuudet tähän ja moneen muuhun tehokkaaseen käyttöön, muun muassa





TAULUKKO 8.3. Maastotiedon luokitus.

Luontotiedot	Kulttuuritiedot	Sijaintitiedot	Ominaisuustiedot
Maan pinta- kerroksen laatu	Kiinteistöt	Koordinaattitiedot ( <i>missä</i> )	Yksilöivät o.
Maan pinnan muodot	Rakennukset, rakennelmat	Geometriatiedot ( <i>minkä muotoinen</i> )	Paikantavat o.
Maaperä, kallioperä	Katu- ja johtoverkostot	Topologiatiedot ( <i>suhteet</i> <i>naapureihin</i> )	Ajoittavat o.
Kasvillisuus	Kaavoitus		Kuvailevat o.
Vesistöt	Kadunnimet, paikalliset nimet		

- o Kohteiden sijainnit on annettu samassa yhteisessä koordinaatistos-  
sa. Ennen tämä oli [KKJ](#) ja sen karttaprojektiokoordinaatistot, katso  
alaosiot [3.2.1](#) ja [3.3.1](#). Nykyisin se on aina [EUREF-FIN](#) ja sen eri  
karttaprojektiokoordinaatistot, katso alaosiot [3.2.3](#) ja [3.3.3](#). Koordi-  
naatistojen väliset muunnokset ovat tiedossa. Tämä helpottaa eri  
kohteiden yhdistämistä ja antaa lisäarvoa.
- o Käytettävissä on monia menetelmiä ja työkaluja tietojen yhdiste-  
lyyn, analyysiin ja jalostukseen.
  - Usein eri ominaisuustiedot esitetään digitaalisen kartan eri  
*tietokerroksina*, joita voi käsitellä yhdessä käyttäen erilaisia  
operaattoreita: *kartta-algebra*, kuva [8.14](#).
  - Kohteiden sisältämiä tietoja voidaan lajitella ja luokitella eri  
ominaisuuksien perusteella, esimerkiksi
    - \* karttalehden kaikki [GNSS](#)-pisteet
    - \* ruudussa  $(x_a, y_a) - (x_b, y_b)$  olevat kairauspisteet
    - \* kunnan viemäriverkon kaivonkannet.
- o Paikkatietoja voidaan *visualisoida* ja näin saattaa myös ei-kartta-  
ammattilaisten käyttöön.

Sisällön mukaan maastotiedot voidaan jakaa kahteen tietotyyppiin: luon-  
totietoihin ja kulttuuritietoihin ([Salmenperä, 1998](#), sivut 83–84). Toinen  
maastotiedon luokitustapa ovat sijaintitiedot ja ominaisuustiedot. Katso  
taulukko [8.3](#).

Osa kulttuuritiedoista ei näy maastossa, kuten paikannimet, omistus-  
suhteet, tonttirajat, kaavoitus ja historialliset seikat.



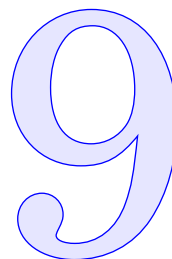


### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on runkomittauksen tehtävä?
- 2) Miten verkkohierarkia toimii? Miksi se on tärkeä? Mikä voisi mennä pieleen jos verkkohierarkiaa ei tehdä oikein?
- 3) Mitä on rekognosointi? Mitkä ovat hyvän pistekortin vaatimukset?
- 4) Mitä laskenta- eli vertauspintoja käytetään tavallisesti geodeettiseen verkkolaskentaan?
- 5) Mitä terrestrisiä kartoitusmittauksen menetelmiä on olemassa? Vahvuudet ja heikkoudet.
- 6) Selitä, miksi fotogrammetria ilmasta ei voi olla *ainoa* kartoitusmittauksen menetelmä.
- 7) Selitä, miksi GPS — esimerkiksi tosiaikainen kinemaattinen GPS, RTK — ei voi olla *ainoa* kartoitusmittauksen menetelmä.
- 8) Mitä on metadata, ja miksi se on tärkeää? Anna metadatan esimerkki.



# Rakentamisen mittaus



Bergensbanen



Video: Norsk Rikskringkasting

Laulu: *Everloving* – Moby



## 9.1 Kaavoitus ja maastoon merkintä

Maankäyttö- ja rakennuslain (1999/132) ([Ympäristöministeriö, Maankäyttö ja rakentaminen](#)) mukaisia kaavamuotoja ovat *asemakaava* (aikaisemmat asema-, rakennus- ja rantakaava) ja *yleiskaava*. Molemmat hyväksyy kunta. Tämän lisäksi on vielä *seutukaava*, joka on korkeamman tason kaava.

Yleiskaava on kunnan alueiden pääpiirteinen maankäyttösuunnitelma. Kaavoihin kuuluu pohjakarttoja, joiden mittakaava vaihtelee 1 : 20 000 – 1 : 10 000 ja 1 : 5000 – 1 : 4000 välillä.

Uusien kaavoitusmittausohjeiden ([JUHTA, 2014](#)) mukaan määritellään *kolme mittausluokkaa*. Jokaisella mittausluokalla on vastaava pohjakartan suositusmittakaava. Digitaalisella karttatuotteella ei ole varsinaista mittakaavaa, mutta kerätyn karttatiedon tarkkuuden on oltava suositusmittakaavaa vastaava. Koordinaatti- ja korkeusjärjestelmät ovat [EUREF-FIN](#) ja [N2000](#), ja karttaprojektioksi käytetään Gauss-Krüger-projektiota: [ETRS-GK \$n\$](#) , jossa  $n$  on kunnan pituusaste kokonaislukuna.

- 1) *Ensimmäiseen mittausluokkaan* kuuluvat asemakaava-alueet ovat taajama-alueet, joilla maa on erittäin arvokasta ja joilla on voimassa sitovan tonttijaon asemakaava tai rakennuskielto tällaisen asemakaavan laatimista varten. Asemakaavan pohjakartan mittakaava on 1 : 500 tai 1 : 1000. Kartoituksissa, joita on tarkoitus

käyttää osana kunnan paikkatietojärjestelmää ja hyödyntää suurta tarkkuutta edellyttävässä teknisessä suunnittelussa, voidaan käyttää vieläkin tarkempaa *mittausluokkaa 1e*.

- 2) *Toiseen mittausluokkaan* kuuluvat asemakaava-alueet ovat taajama-alueita, joille laadittavassa asemakaavassa ei edellytetä sitovaa tonttijakoa. Pohjakarttojen mittakaava on 1 : 1000 tai 1 : 2000.
- 3) *Kolmanteen mittausluokkaan* kuuluvat ranta-asemakaava-alueet ja ranta-alueet sekä muut sellaiset alueet, joilla maa on maa- ja metsätalousmaata selvästi arvokkaampaa, esimerkiksi niin sanotut haja-asutusalueet. Pohjakartat laaditaan mittakaavassa 1 : 2000 tai erityistapauksissa 1 : 4000 tai 1 : 5000.

Kaavan rajamerkkien ja rakennusten paikan merkitseminen maastoon eli ”paalutus<sup>1</sup>” on suoritettava tarpeen mukaan ennen varsinaisten rakennustöiden alkua. Maastoon merkinnän tarkkuudesta ja töiden suoritustavasta on Kaavoitusmittausohjeissa tarkat ohjeet. Kaava-alueen runkoverkkoa on tarpeen vaatiessa täydennettävä.

Maastoon merkinnässä käytetään automaattista takymetriä, tosiaikaista kinemaattista GNSS-mittausta (RTK, *real-time kinematic*) tai muuta riittävän tarkkaa mittaustekniikkaa. Kojeen muistiin viedään sekä tunnettujen pisteiden että maastoon merkittävien pisteiden koordinaatit. Voidaan käyttää säteittäistä kartoitusta tai vapaan asemapisteen menetelmää. Kojelasketaan etukäteen paalutus- eli *merkitsemismittat*. Maastossa voidaan joustavasti päättää, mihin koje sijoitetaan: kartalta ei aina näy pisteiden välistä näkyvyyttä.



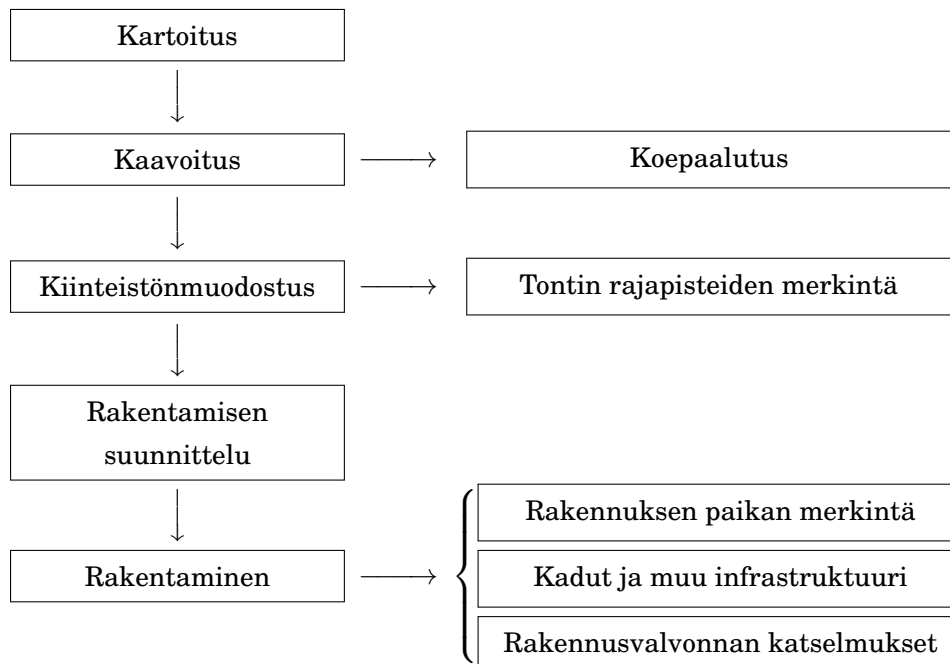
## 9.2 Maastoon merkintä ja infrastruktuuri

Kaavoituksen yhteydessä suunnitellaan kaavoitetun alueen infrastruktuuri:

- Kaavalla määritetään alueelle tietty käyttötarkoitus.
- Kiinteistönmuodostus järjestää maan omistussuhteet ja -rajat sekä rasitteet (ruots. *servitut*), kuten tieoikeudet.
- Suunnittelu ja rakentaminen toteuttavat kaavassa ilmoitetun käyttötarkoituksen ja alue otetaan käyttöön.

Kunnallistekniikan eli infrastruktuurin, kuten katujen, teiden, katuka-

<sup>1</sup>Suomen kielellä sana *paalutus* merkitsee rakennusallalla myös perustuspaalujen lyömistä maahan. Virallisempi ilmaisu on ”rakennuksen paikan merkitseminen maastoon”.



KUVA 9.1. Maastoon merkintä eli ”paalutus”, prosessikuvaus.

luston, maanalaisten johtojen ja kaapeleiden, rakentamisen mittaukset ovat oma mittaamisen osa-alue.

Kaavan laskenta:

- Kaavan piirros, graafinen esitys, esitetään numeerisessa muodossa.
- Kaava tulkitaan ympyrän kaareina ja janoina lähtien tunnetuista elementeistä, kuva 9.2. Esimerkissä lasketaan ensin *murtoviiva*  $A_1, \dots, A_7$ , ja sovitetaan siihen ympyrän kaaret  $K_1, \dots, K_7$ .

Maastoon on merkittävä *kaavarajat*: kortteleiden, tonttien, tilojen, yleisen liikenteen ja virkistysalueiden sekä rakennusalojen rajat.

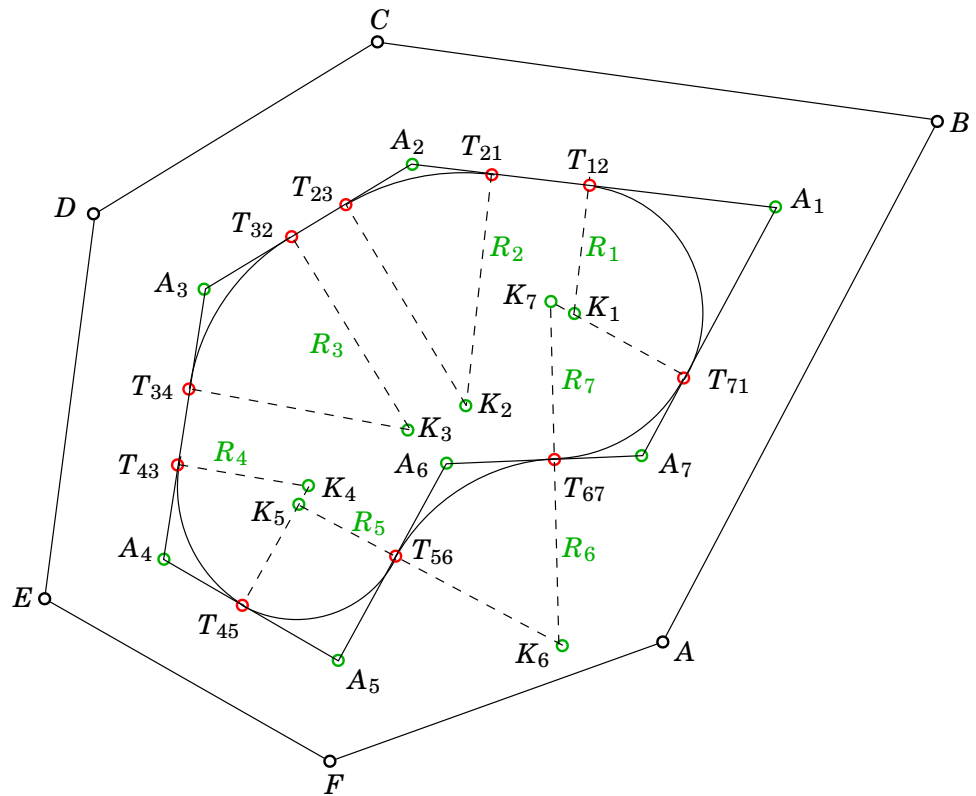
- Maastoon merkittävälle kohteille lasketaan koordinaatteja.

Katso kuva 9.3. Geodeettisella käännteistehtävällä lasketaan merkittävälle pisteille suuntia ja etäisyyksiä kojeen sijaintipaikasta. Säteittäistä kartoitusmenetelmää käyttäessä kojeen paikaksi valitaan tunnettu piste.

Säteittäinen kartoitus (alaosio 8.5.3) maastoon merkinnässä toimii näin:

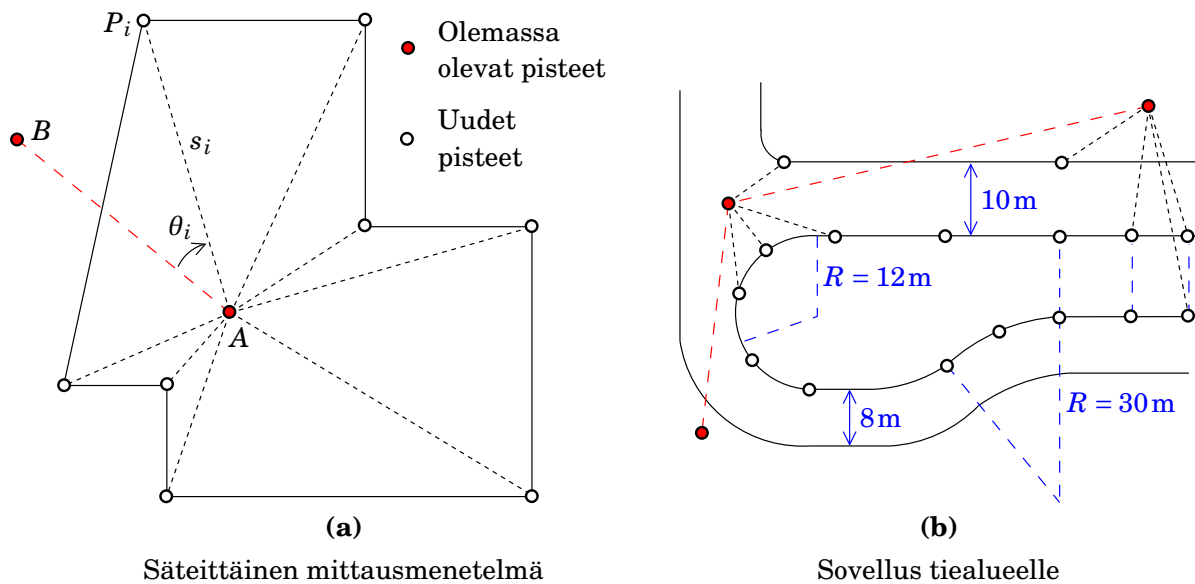
- 1) Merkitsemismitat, kulma  $\theta_i$  ja etäisyys  $s_i$ , lasketaan käyttäen pisteiden  $P_i$ ,  $A$  ja  $B$  koordinaatit.
- 2) Kojee asetetaan pisteelle  $A$  ja suunnataan tähykselle  $B$ , molemmat tunnettuja. Vaakakehän lukema asetetaan nolllaksi.





KUVA 9.2. Kaavan laskenta — esimerkki.

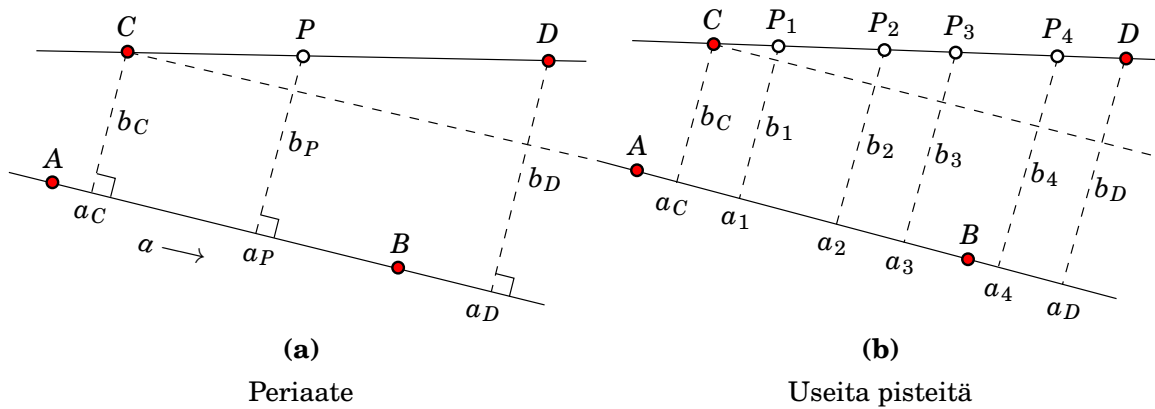
- 3) Käännetään kaukoputki niin, että lukemaksi tulee  $\theta_i$ .
- 4) Heijastinprisma siirretään teleskoopin näkökentässä niin, että sen etäisyyslukemaksi pisteestä A tulee  $s_i$ .



KUVA 9.3. Maastoon merkintä säteittäistä kartoitusmenetelmää käyttäen.







KUVA 9.4. Suora merkitsemistapa.

- 5) Lyödään *paalu*, tarkka merkki, jonka kohdalle rakennetaan esi-merkiksi rajamerkki.

Myös vapaan asemapisteen ja suorakulmaista merkintää käytetään.



### 9.3 Suorat, ympyrän kaaret, kulmien pyöristys



#### 9.3.1 Suoran merkintä maastoon

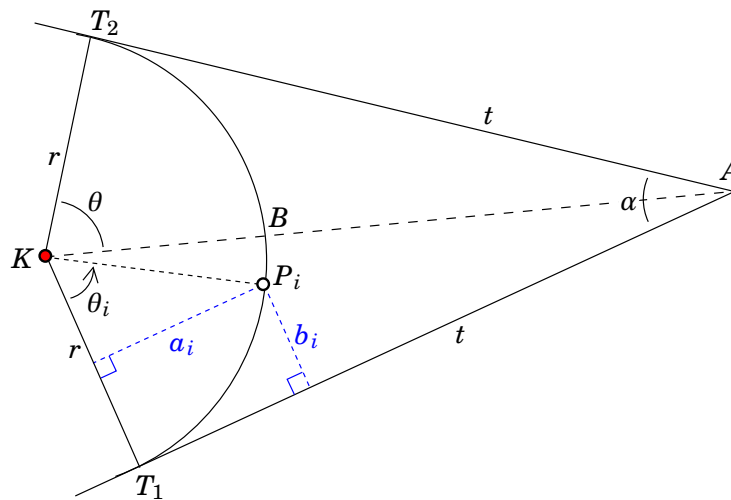
On saatava tuntemattoman pisteen  $P$  merkitsemismitat  $(a_P, b_P)$  annetusta suorasta  $AB$ . Jos tiedetään, että piste  $P$  on suoralla  $CD$ , voidaan pisteen  $P$  merkitsemismitat johtaa suoraan pisteiden  $C$  ja  $D$  merkitsemismitoista  $(a_C, b_C)$  ja  $(a_D, b_D)$  ja pisteen  $P$  sijainnista suoralla  $CD$ , etäisyys  $CP$ :

$$a_P = a_C + \frac{CP}{CD}(a_D - a_C), \quad b_P = b_C + \frac{CP}{CD}(b_D - b_C).$$

Tämä on *suora merkitsemistapa*, esimerkiksi mittanauhan ja suorakulma- eli kaksoispentagonprisman avulla.

Vaihtoehtoisesti käytetään *koordinaatteja*. Jos esimerkiksi pisteiden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  koordinaatit tunnetaan jo, voidaan laskea matkan  $CP$  avulla pisteen  $P$  koordinaatit. Tämän jälkeen lasketaan pisteen  $P$  merkitsemismitat  $(a_P, b_P)$  suoran  $AB$  suhteen. Huomaa, että merkitsemismitat ovat tavallaan suorakulmaisia koordinaatteja ja niiden laskenta on koordinaattimuunnos tasossa.

Tulos on helppo yleistää käytännön tapaukseen, jossa suoralla  $CD$  on useita  $P_i$ -pisteitä, joille kaikille lasketaan merkitsemismitat  $(a_i, b_i)$ .



KUVA 9.5. Kulmien pyöristys ympyrän kaarella.



### 9.3.2 Ympyrän kaari

*Ympyrän kaaria* käytetään niiden yksinkertaisuuden vuoksi paljon suunnittelussa. Ympyrän kaari on neljän parametrin määrittämä, kuva 9.5:

- tangenttien välinen kulma  $\alpha$
- kaaren keskikulman puolikas  $\theta$
- kaaren säde  $r$
- tangentin pituus  $t$ .

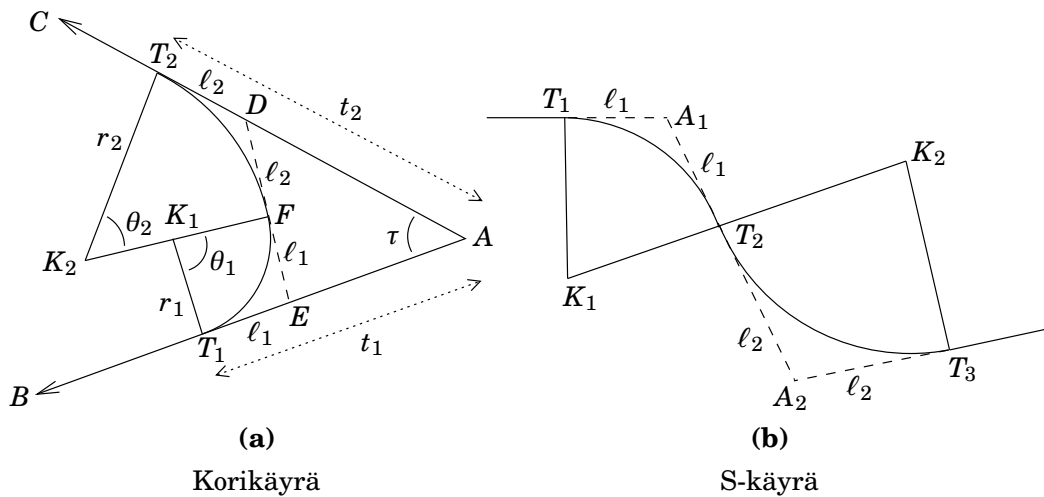
Parametrien välillä on kaksi riippuvuutta:

$$\begin{aligned} \theta = 100^g - \frac{\alpha}{2} &\iff \alpha = 200^g - 2\theta, \\ t = r \tan \theta &\iff r = t \cot \theta. \end{aligned}$$

Kaaren merkintä maastoon sujuu seuraavasti:

- 1) Tavallisesti jo suorien laskemisen yhteydessä on kahden tangentin leikkauspiste A ja kulma  $\alpha$  saatu määritetyksi.
- 2) Valitaan yksi lisäparametri: säde  $r$ , ja lasketaan muut yllä annettujen yhtälöiden avulla.
- 3) Mitataan A:sta tangentteja pitkin etäisyys  $t$ , jolloin saadaan tangenttipisteet  $T_1$  ja  $T_2$ .
- 4) Molemmista määritetään kaksoispentagonprisman ja mittanauhan avulla kaaren keskipiste K (redundanssi!)
- 5) Linjalla KA merkitään nyt kaaren piste B.
- 6) Keskipisteestä K käsin voidaan merkitä riittävä määrä kaaripisteitä etäisyyden  $r$  avulla. Kuvaan on merkitty yksi esimerkkipiste  $P_i$ .





KUVA 9.6. Kulmien pyöristys korikäyrällä. S-käyrä on korikäyrän erikoistapaus.

7) Myös pisteen  $P_i$  suorakulmaiset merkitsemismitat  $(a_i, b_i)$  on helppo saada.

*Kulmien pyöristys* tapahtuu yleensä ympyrän kaaren avulla. Suorien ja ympyrän kaarien yhdistäminen on varsin tavallista asemakaavoissa ja rakennussuunnitelmissa yleensä. Viivat yhdistetään tilanteen mukaan eri ehtojen avulla, millä varmistetaan jatkuvuus ja tasaisen kaareutumisen vaikutelma. Tässä esitetään muutama esimerkkitapaus.

### 9.3.3 Korikäyrä

Eräs esimerkkitapaus on kahden suoran yhdistäminen kahden (tai useamman) erisäteisen, samaan suuntaan kaartuvan ympyrän kaaren avulla: *korikäyrä* tai *korikaari*, kuva 9.6a, Jamal (2017), Taimela (2011). On siis yksinkertaisimmillaan kyse kahdesta suorasta ja kahdesta ympyrän kaaresta, jotka ovat liitospisteissään — niitä on kolme — samansuuntaisia.

Kuvan 9.6a tilanteessa on olemassa seuraavat parametrit:

- tangenttien pituudet  $t_1 = AT_1$ ,  $t_2 = AT_2$
- kaarien säteet  $r_1$ ,  $r_2$
- tangenttien leikkauskulma  $\tau$
- kaarien keskuskulmat  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ .

Parametrien välillä on olemassa useita yhteyksiä:

- Kolmiossa  $\triangle ADE$  nähdään heti, että  $\angle ADE = \theta_2$ , koska  $K_2F \perp DE$



ja  $K_2T_2 \perp AC$ , ja samoin  $\angle DEA = \theta_1$ . Siksi

$$\tau + \theta_1 + \theta_2 = 200^\circ.$$

Lisäksi  $T_1E = EF = \ell_1$  ja  $T_2D = DF = \ell_2$ .

$$\circ \ell_1 = r_1 \tan \frac{1}{2}\theta_1, \ell_2 = r_2 \tan \frac{1}{2}\theta_2.$$

◦ Sinisäännön mukaan on

$$\frac{AD}{\sin \theta_1} = \frac{AE}{\sin \theta_2} = \frac{DE}{\sin \tau} \implies \frac{t_2 - \ell_2}{\sin \theta_1} = \frac{t_1 - \ell_1}{\sin \theta_2} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\sin \tau}$$

ja sijoittamalla

$$\frac{t_2 - r_2 \tan \frac{1}{2}\theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{t_1 - r_1 \tan \frac{1}{2}\theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_1 \tan \frac{1}{2}\theta_1 + r_2 \tan \frac{1}{2}\theta_2}{\sin \tau}.$$

Näin ollen voidaan laskea *kaikki* yllä luetellut seitsemän parametria, jos on annettu

- kolmesta kulmasta  $\tau, \theta_1, \theta_2$  kaksi, ja
- neljästä pituudesta  $r_1, r_2, t_1, t_2$  kaksi.

Kuvan mukaisessa tapauksessa maastoon merkintä suoritetaan näin:

- 1) Mitataan  $A$ :sta tangentteja pitkin etäisyydet  $t_1 - \ell_1$  ja  $t_2 - \ell_2$ , jolloin saadaan pisteet  $E$  ja  $D$ .
- 2) *Yksittäisten ympyrän kaarien* tangenttien leikkauskulmat pisteissä  $D$  ja  $E$  ovat  $T_1EF = 200^\circ - \theta_1$  ja  $T_2DF = 200^\circ - \theta_2$ .
- 3) Tämän jälkeen maastoon merkintä sujuu *erikseen* ympyrän kaarille 1 ja 2 yllä jo selostetulla tavalla.



### 9.3.4 S-käyrä

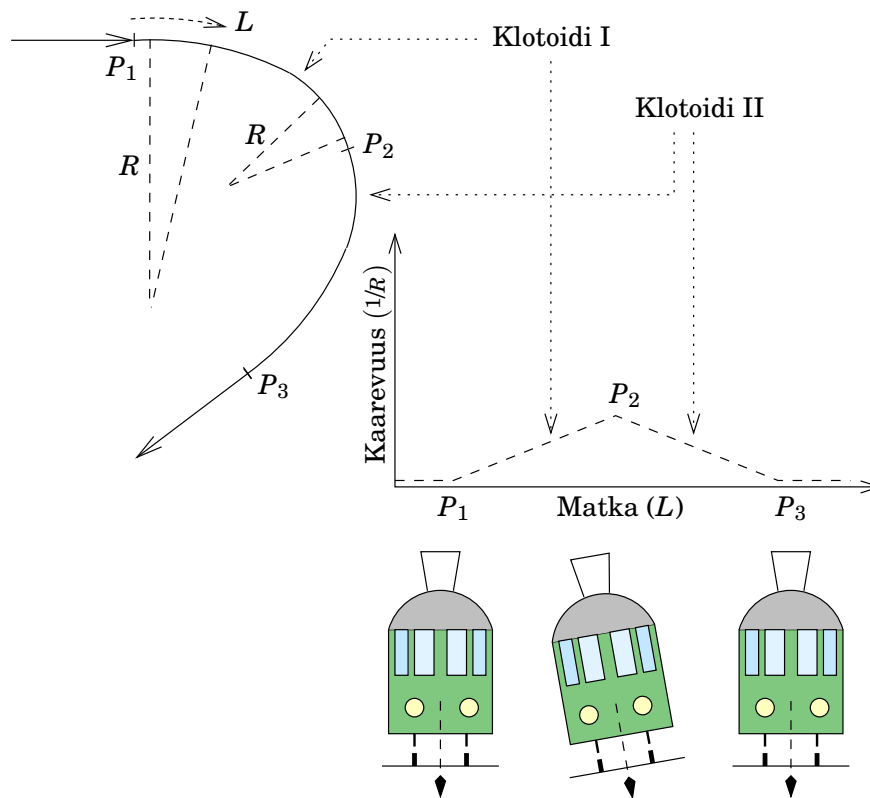
Vaihtoehtoinen tapaus, jossa ympyrän kaaret kaartuvat vastakkaisiin suuntiin (mutta muuten tilanne on samanlainen kuin korikäyrän tapauksessa), on *S-käyrä*, kuva 9.6b, [Jamal \(2017\)](#), [Taimela \(2011\)](#). Tilannetta hankaloittaa hieman suorien<sup>2</sup>  $T_1A_1$  ja  $T_3A_2$  leikkauspisteen  $A$  mahdollinen olemattomuus, nimittäin jos suorat ovat yhdensuuntaisia.



## 9.4 Siirtymäkaari

Siirtymäkaaria, Eulerin spiraalia ([Wikipedia, Euler spiral](#)) eli *klotoidia*, käytetään rautateiden ja nopeiden moottoriteiden suunnittelussa ([Taimela, 2011](#)). Nopeassa liikenteessä on itse tien keskiviivan lisäksi myös sen *kaarevuuden*<sup>3</sup> oltava jatkuva, seuraavista syistä:

<sup>2</sup>S-käyrän kuvassa käytetty notaatio ei vastaa suoraan korikäyrän kuvan notaatiota.



KUVA 9.7. Klotoidin periaate.

- Esimerkiksi täysperävaunullisen rekan liikkeiden hallinta ohjauspyörän avulla on hidasta.
- Tien tai rautatien pinta kallistetaan sivusuunnassa keskipakoisvoimaa vastaan. Tämä *poikittaiskallistuma*, joka on verrannollinen tien kaarevuuteen, saa muuttua vain hitaasti ja jatkuvasti tien pituussuunnassa.

Näistä syistä on suorien ja ympyrän kaarien yhdistelmä sopimaton.

Klotoidin yhtälö on

$$RL = A^2,$$

jossa  $A$  on klotoidin *parametri*,  $L$  on matka klotoidia eli tietä pitkin, ja  $R$  on paikallinen kaarevuussäde. Kuten näkyy, muuttuu kaarevuussäde matkan jatkuvana funktiona

$$R = \frac{A^2}{L}.$$

Vakionopeudella keskipakoisvoima<sup>4</sup>  $F$  on kääntäen verrannollinen kaa-

<sup>3</sup>Kaarevuus on kaarevuussäteen käänteisluku!

revuussäteelle:

$$F = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{A^2}L, \quad (9.1)$$

siis olettaen, että tien *suunnittelunopeus*  $v$  on vakio, keskipakoisvoima, ja siten myös tarvittava tienpinnan poikittaiskallistuma, on matkan *lineaarinen* funktio. Tämä selittää klotoidikäyrän sopivuuden moottoriteiden ja rautateiden kaarien muodoksi.

Tietysti on huolehdittava siitä, että klotoidikäyrä täyttää alku- ja loppupisteessä kaarevuussäteen jatkuvuusehdon toisen klotoidikäyrän, ympyräkaaren tai suoran ( $A = R = \infty$ ) kanssa. Katso kuva 9.7, jossa suora liittyy klotoidiin I ( $P_1P_2$ ), joka liittyy klotoidiin II ( $P_2P_3$ ), joka taas jatkuu suorana pisteestä  $P_3$  eteenpäin. Juna saapuu pisteeseen  $P_1$  pystysuorassa asennossa. Välillä  $P_1P_2$  se kallistuu sivusuunnassa vakiokulmanopeudella ja saavuttaa maksimikallistumansa pisteessä  $P_2$ . Välillä  $P_2P_3$  kallistuma vähenee lineaarisesti, ja pisteessä  $P_3$  juna on taas pystysuorassa asennossa ja jatkaa matkaa suoraan eteenpäin.

Jos junan nopeus on sama kuin poikittaiskallistumien suunnittelunopeus  $v$  yhtälön 9.1 mukaisesti, on painovoiman ja keskipakoisvoiman resultantti aina *kohtisuorassa* junan lattiaa vasten ja matkustajat eivät huomaa mitään.

Myös moottoriteiden suunnittelussa käytetään klotoidia, vaikka siellä kulkuneuvojen tosiasialliset nopeudet vaihtelevat.



## 9.5 Tien- ja kadunmittaus

Tietekniikkaan kuuluvat seuraavat mittaus- ja laskentatehtävät:

- Maastomittaus tiesuunnitelman pohjakartan laatimiseksi, käyttäen esimerkiksi ilmakuvausta (fotogrammetriaa), tiesuunnittelun pohjaksi.
- Tielinjojen laskeminen koordinaatteina ja merkitsemismittoina.
- Tien rakenteiden ja erityiskohteiden (sillat, tunnelit, alikulut ynnä muita) koordinaattien, merkitsemismittojen, ja tarvittaessa maamassojen ja muiden määrien, laskeminen.
- Tietyömaan mittaukset, maastoon merkintä.
- Hankkeen valmistumisen jälkeen suoritetaan tavallisesti ”as-built”-mittaus.

<sup>4</sup>... tarkemmin, kulkuneuvon matkustajien kokema *pseudovoima* per massayksikkö, joka toimii kuitenkin heidän kannaltaan täysin samalla tavalla kuin painovoima.

Muissakin laajamittaisten rakennushankkeiden teknisissä mittaustöissä on samoja työvaiheita. Katso [Tikka \(1991\)](#) sivut 384–...



## 9.6 Rakennusmittaukset

Rakennusmittaukseen kuuluu rakennusten, rakennusosien, siltojen, tunnelien, patojen, teollisuuskoneiden ja vastaavien rakenteiden asennusmittaukset.

- Mittaus lähtee runkoverkosta. Luodaan projektille *mittausperusta*, riittävä joukko taso- ja korkeuskiintopisteitä projektialueella. Kiintopisteinä käytetään perus- eli runkopisteitä. Luodaan tarpeen mukaan tihennys- eli käyttöpisteitä hierarkkisella työskentelytavalla.
- Varsinaiset mittaukset suoritetaan käyttöpisteistä. Mittaukset tehdään erikseen taso- ja korkeusmittauksina, myös osittain eri pisteistöillä.
- Mittausten normittamiseksi on luotu kansallisia ja kansainvälisiä standardeja.



### 9.6.1 Rakennuksen paikan merkitseminen maastoon

Kun rakennuslupa on saatu, voi rakentaja hakea viranomaisilta päätöstä rakennuspaikan *maastoon merkinnästä*, kansanomaisesti ”paalutuksesta”. Menettelyllä on *kolme tavoitetta*:

- Rakennuksen sijainnin merkintä maastoon. Varmistetaan, että mikään rakennuksen osa ei ole liian lähellä tontin rajaa.
- Rakennuksen seinämittojen oikeellisuuden tarkistaminen. Tämä on rakentajalle tärkeä tieto.
- Rakennuksen korkeusaseman oikeellisuuden varmistaminen.

Maanmittausviranomaiset mittaavat vain rakennuspaikan osoittamista varten, ellei muuta ole sovittu. Tarkkuus ja pisteiden määrä eivät riitä itse rakentamista varten. Rakentaja voi jatkaa mittaustyötä varsinaisen rakennustyön yhteydessä.

Vertauspisteeksi valitaan joko jonopiste tai rajamerkki. Ellei niitä löydy lähistöltä tarpeeksi tai niiden tarkkuudet eivät ole sopivia, joudutaan ensimmäisenä työnä mittaamaan uusia *peruspisteitä*. Niille lasketaan karttakoordinaatit  $(x, y)$  ja ne merkitään asemapiirrokseen.

*Tarkistusmitoiksi* käyvät seinämitat, ristimitat, etäisyydet rajoista ja etäisyydet jo olemassa olevista rakennuksista.

Rakennuksen korkeusasema saadaan linjavaaituksen avulla, joka kulkee yleisestä korkeuskiintopisteestä toiseen. Rakennuspaikan lähelle luodaan *vähintään kaksi* korkeusperuspistettä myöhempää työtä varten, ellei lähistöltä löydy jo ennestään sopivia yleisiä pisteitä. Oikea korkeus-sijainti on kriittinen viemäreiden toimivuuden sekä alavilla paikoilla tulvaturvallisuuden kannalta.



### 9.6.2 Rakennuksen sijaintikatselmus

Sijaintikatselmuksessa (ruots. *lägessyn*) todetaan, että rakennus on oikealla paikalla ja korkeudella. Sijaintikatselmus suoritetaan, kun rakennuksen kivijalka tai muu perustus on valmistunut. Hyväksymisen jälkeen rakennustyö voi jatkua.



## 9.7 Muut mittaukset



### 9.7.1 Tekniset mittaukset, deformaatiomittaus

Tekniset mittaukset eli *insinöörigeodesia* muodostavat oman erikoisalan-  
sa. Siihen kuuluvat myös tarkat muodonmuutosmittaukset:

- Muodonmuutosten seuranta sekä rakentamisen aikana että sen jälkeen kohteen elinkaaren aikana. Kohteina padot, tunnelit, sillat, muut suuret rakenteet, pilvenpiirtäjät ja niin edelleen.
- Nykyisin usein monitorointi eli *seurantamittaus* automaattilaitteistolla.
- Teollisuusmittaukset sisätiloissa tai ulkona, suurkoneiden asennusmittaukset, paperikoneet, telakat.
- Insinöörimittaukset (*”engineering surveying”*).
- Tunneli- ja kaivosmittaukset. Niille on ominaista mittausgeometrian tiukat rajoitukset ja GNSS-menetelmän soveltumattomuus.

Näissä mittauksissa mitattujen suureiden *jäljitettävyyys* on keskeistä. Huolellisella (järjestelmä-)kalibroinnilla ja hyvällä metrologisella menetelytavalla on suuri merkitys.



### 9.7.2 Työkoneohjaus

GNSS-teknologiaa käytetään laajasti, perinteisemmän paikannusteknologian lisäksi, *työkoneiden* ohjaamisessa tosiajassa. Ohjauksen luotet-





KUVA 9.8. AGA/Minilir-infrapunaseurantalaite — ranskalaista sotilasteknologiaa — käytössä Hollannin Itä-Schelden myrskyvuoksisuojan rakennustyömaalla vuonna 1980. © 2016 Nicolàs de Hilster, (De Hilster), kuva 4, tekijän luvalla.

tavuusvaatimukset ovat ilmeisen kovia, jos monen miljoonan työkone ohjataan levittämään esimerkiksi moottoritien asfalttia. Seisokit ovat kalliita, virheet vieläkin kalliimpia.

Patojen, siltojen, tunneleiden ja muun infrastruktuurin rakentamisessa käytetään tavallisesti terrestristä tosiaikaisohjausta. Alankomaiden Itä-Schelden myrskyvuoksisuojan (kuva 9.8) ja Tanskan Ison-Beltin ja Juutinrauman silta-tunneliratkaisujen rakennusvaiheissa käytettiin tämän tyyppistä teknologiaa, kuten monessa muussa vastaavassa projektissa.

Myös satama-alueiden kontit ja nosturit paikannetaan tosiajassa GNSS-teknologialla tehokkuuden lisäämiseksi (Pitkä, 2009).

Maa- ja metsätalouskoneet voidaan ohjata tosiaikaisella GNSS-tekniikalla: täsmäviljely, jonka avulla siemenet, lannoitteet ja torjunta-aineet voidaan annostella tarkasti hyvin paikallistenkin tarpeiden mukaan.



### 9.7.3 Johtokartoitus

Maanalaisista johdoista, kuten puhelin-, data- ja sähkökaapeleista sekä viemäri-, vesi- ja kaukolämpöjohdoista, vain osa on kartoitettu tyydyttävällä tavalla. Suurin osa on kuntien eri laitosten valmistamilla kartoilla, ja laitoksia voi olla kunnassa useita. Kun johtokartoitus on näin hajautevasti toteutettu, on karttojen geodeettinen taso vaihteleva.

Kaupungit käyttävät yleisesti esitys- ja valmistustapaa, joka on vuoden 1974 johtokarttastandardin SFS 3161 mukainen. Standardi uusittiin vuonna 1996.

Johtokarttoja käytetään monenlaiseen tarpeeseen: kaavoituksen teknisen huollon ja verkoston suunnitteluun, rakennustöiden yhteydessä, johtojen kunnossapitoa varten, sekä kriisitilanteiden hallitsemista ja vahingonkorvauksia varten. Mittakaava on useimmiten 1 : 500.

#### Kartoitusmenetelmät:

- Mittauksen tulee perustua alueella oleviin yleisiin kiintopisteisiin, jotta tulos saadaan samaan järjestelmään. Tarvittaessa suoritetaan *verkkotihennys* eli luodaan uusia kiintopisteitä Kaavoitusmittausohjeiden mukaisesti.
- Käytetään samoja mittausmenetelmiä kuin yleisemmin kartoitusmittauksessa, osio 8.5.
- Uusien johtojen kartoitus suoritetaan rakennusvaiheessa, kun johdot ovat vielä näkyvissä.
- Vanhojen johtojen näkyvät osat (kaivojen kannet, jakokaapit) kartoitetaan. Maanalaiset osat voidaan joskus paikantaa metalli-ilmaisimen avulla. Myös maatutkaa (*GPR*, *ground-penetrating radar*) ja sähköistä tomografiakuvausta (*ERT*, *electrical resistivity tomography*) on käytetty.

**Johtojen näyttöpalvelu:** Rakentajille näytetään, missä johdot sijaitsevat, kaivuutyön aiheuttamien kalliiden vaurioiden välttämiseksi. Palvelun tarjoaa useimmiten johtojen omistaja, esimerkiksi voimalaitos.



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mitä on kaavoitus ja miksi sitä tarvitaan?
- 2) Montaako mittausluokkaa Suomessa käytetään? Miten ne on mää-



ritelty? Missä mittakaavassa ovat kaavan pohjakartat jokaisessa mittausluokassa?

- 3) Selosta eri menetelmät, joilla kohteet voidaan merkitä maastoon.
- 4) Mikä on korikäyrä? S-käyrä?
- 5) Miten monet riippumattomat parametrit määrittävät korikäyrän yksiselitteisesti?
- 6) Selosta, miksi nopeille teille ja rautateille käytetään klotidia.
- 7) Selosta sijaintikatselmus. Missä rakentamisen vaiheessa se suoritetaan?
- 8) Minkä tyyppisten kohteiden deformaatiot voidaan havaita tarkassa seurannassa?
- 9) Miten maanalaiset johdot kartoitetaan?





# Numeeriset maastomallit ja määrälaskenta

## 10



Viinitynnyrin tilavuuden mittaaminen mittatangolla, Johannes Keplerin ”viinitynnnyrikaavan” eli Simpsonin säännön inspiraatio (kuva [Deutsche Fotothek](#), 1523)

RAKENNETUN YMPÄRISTÖN RAKENTAMISESSA ja suunnittelussa sekä niihin liittyvissä teknisissä mittauksissa käytetään laajasti *digitaalisia korkeus- ja maastomalleja*.

Digitaalisella korkeusmallilla (*digital height model*, [DHM](#), tai *digital elevation model*, [DEM](#)) tai digitaalisella maastomallilla (*digital terrain model*, [DTM](#)) tarkoitetaan maanpinnan pisteistä muodostettua tiedostoa, joka kuvaa, paremmin tai huonommin, maanpinnan muotoa. Korkean erotuskyvyn maastomallit ovat suurille alueille kalliita tuottaa, mutta niitä on saatavana monista maista. Suomen maastomallit tuottaa

Maanmittauslaitos.

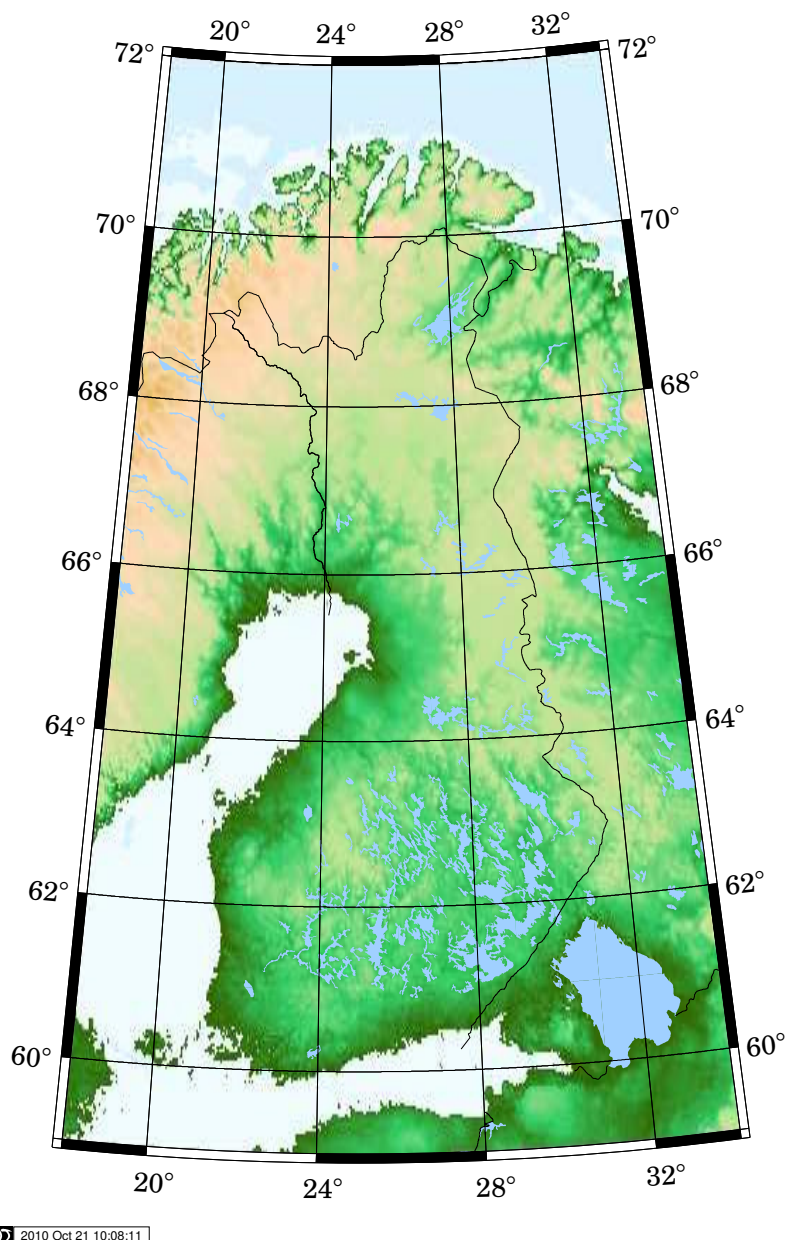
Tietoa maanpinnasta ja sen muodoista hankitaan maastomittauksien avulla, fotogrammetrisesti ilmakuvauksella tai *keilaamalla* lentokoneesta tai satelliitista käsin. Keilain voi olla laserpohjainen tai mikroaaltotutka, **SAR** eli *synthetic-aperture radar*, synteettisen aukon tutka, joka saavuttaa interferometrisesti hyvin korkean erotuskyvyn.

### Globaalit maastomallit

- 1) Vanhempi malli GTOPO30 (US Geological Survey, alkupe-  
räinen 1996, **USGS**, **GTOPO30**). Erotuskyky on 30", noin  
kilometri. Malli päivitettiin käyttämällä **SRTM**:n tuottamaa  
dataa, katso kohta 4 alla. Malli ei sisällä merien syvyystieto-  
ja.
- 2) GLOBE-malli (Global One-km Base Elevation project (**NOAA**  
ja monet muut, **GLOBE Task Team and others**, 1999). Ero-  
tuskyky on myös 30"  $\approx$  1 km. Mallin nykyversio ei sisällä  
syvyystietoja.
- 3) ETOPO1-malli, joka korvaa vanhemmat ETOPO5- ja  
ETOPO2-mallit (**NOAA ym.** 2008). Erotuskyky on 1', noin  
1,8 km. Malli sisältää syvyystietoja korkeustietojen lisäksi.
- 4) **Shuttle Radar Topography Mission** kuvasi maapallon topo-  
grafiaa leveysasteiden 60°N ja 56°S välillä. Lento tapahtui  
helmikuussa 2000. Resoluutio on yksi kaarisekunti Maan pin-  
nalla, noin 30 m. Vuonna 2014 *kaikki* **SRTM**:n data julistettiin  
julkiseksi. Data ei sisällä merien syvyystietoja.

**Valtakunnallinen maastomalli** Uudet teknologiat, kuten laserkei-  
laus ilmasta, ovat olleet jo monta vuotta operationaalisia ja  
laajassa käytössä. Myös Suomessa Maanmittauslaitos on jo pit-  
kään keilannut eri alueita tarkan valtakunnallisen maastomallin  
rakentamiseksi. Malleja on kaksi: malli **KM10** on tällä hetkellä  
valmis spatiaalisella erotuskyvyllä 10 m, **Maanmittauslaitos**,  
**Korkeusmalli 10 m**, ja malli **KM2** on osittain valmis resoluutiolla  
2 m, **Maanmittauslaitos**, **Korkeusmalli 2 m**. **KM2**-mallin on määrä  
valmistua vuonna 2020. **INSPIRE**-direktiivin (**INSPIRE Knowledge**  
**Base**) perusteella data on ilmainen.





KUVA 10.1. Globaali maastomalli ETOPO2 versio 2 Suomen alueella.

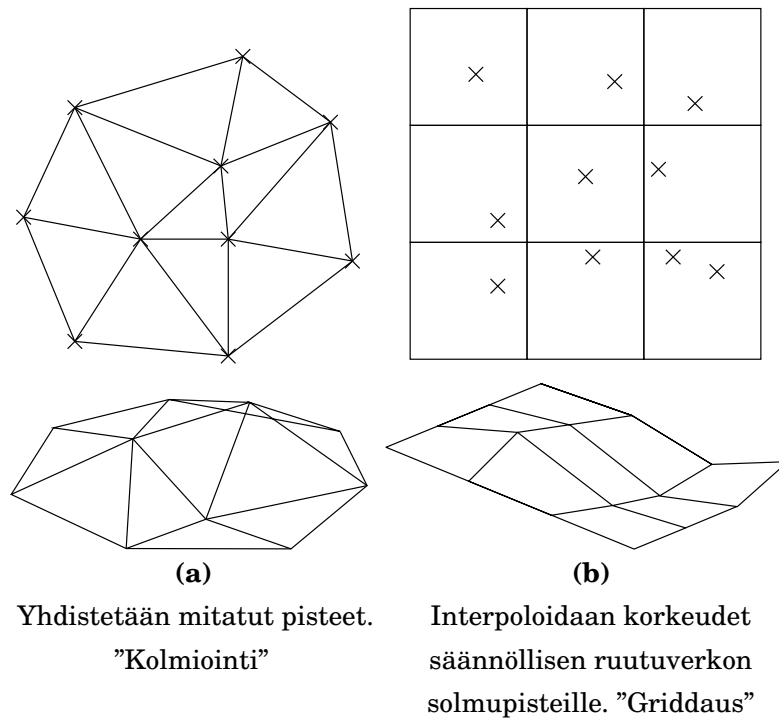
## 10.1 Maastomallien mittaus, muodostaminen, esitystapa

### 10.1.1 Mittausgeometria

- Mitattavien pisteiden paikat eivät yleensä muodosta säännöllistä kuviota, vaan voivat olla vapaavalintaisia, ainakin käytetyn havaintotekniikan puitteissa.
- Hajapistemenetelmä on tilastollinen otantamenetelmä. Otostiheys voi olla suurempi siellä, missä maaston muodoissa on enemmän vaihtelevuutta.







KUVA 10.2. Maastomallien esitystapoja: kolmiointi vai pistehila.

- o Pisteiden tiheys valitaan suuremmaksi lähellä maaston taiteviivoja, lineaarisia piirteitä, joissa maaston kaltevuus muuttuu.



### 10.1.2 Mittausteknologiat

**Geodeettinen maastomittaus** Tämä on alhaisen tuottavuustason tekniikka, joka usein vain täydentää muita menetelmiä.

**Fotogrammetria** Pisteet mitataan kahden ilmakuvan muodostamassa orientoidussa stereomallissa, nykyisin usein automaattisesti digitaalisten kuvien *korrelaatiolaskun* avulla. Kuitenkin tukipisteet (GCP, *ground control points*) ja ilmakuvauksen katvealueet mitataan geodeettisesti.

**Ilmalaserkeilaus** Tämä tekniikka kerää valtavia kolmiulotteisten maastopisteiden määriä *pistepilvenä*, josta maaston pinta voidaan määrittää sopivalla käsittelyllä.

Mitatusta pistedatasta lasketaan joko kolmiointiverkko tai säännöllinen pistehila.



### 10.1.3 Mallien esitys

- <sup>1</sup> Maastomalleissa käytetään erilaisia *esitystapoja*<sup>1</sup>:





**Pistehila-esitystapa** Tämä sopii hyvin yhteen tietokoneiden työskentelevän kanssa: suurienkin aineistojen käsittely on suoraviivaista ja helppoa.

Säännöllinen hila voi olla neliön muotoinen, suorakulmainen tai monimutkaisempi, kuten heksakuvio (”mehiläiskkenno”) tai kolmiokuvio.

**Kolmiointi-esitystapa** Tässä valitaan maaston muotoja edustavia pisteitä ja kytketään ne yhteen väliviivojen avulla muodostaen kolmioiden peite. Tunnettu matemaattinen kolmiointitapa on *Delaunay’n kolmiointi*, joka antaa kauniita mahdollisimman tasasivuisia kolmioita.

Kolmiointityyppinen maastoesitys on vaikeampi käsitellä, mutta se osaa esittää vaikeatkin maaston muodot, kuten terävät reunat, paremmin kuin hilaesitys, ja vieläkin pienemmällä pistemäärällä. Jos maastomallin erotuskyky vaihtelee alueittain, on kolmiointiesitys parempi, koska kolmioiden koot vaihtelevat erotuskyvyn mukaan.

Kirjallisuudessa puhutaan **TIN**-menetelmästä: *triangulated irregular network*.

**CAD**-ohjelmistot (*computer-aided design*), joita käytetään suunnittelutoimistoissa, osaavat käyttää digitaalisia maastomalleja ja esittää ne monin eri tavoin, esimerkiksi perspektiivikuvana. Myös rakennussuunnitelmat ovat digitaalisessa muodossa ja ne voidaan yhdistää tähän.

Tässä yhteydessä pitää mainita myös moniresoluutioiset ”kaakelointi”-menetelmät, jotka perustuvat diskreettiin aallokemuunnokseen (**DWT**, **Wikipedia**, **Discrete wavelet transform**) ja on tarkoitettu aineistojen interaktiiviseen esittämiseen, esimerkiksi **Fraser ym. (2013)**. Myös kuvaformaatti **JPEG 2000** ja Google Earth™ perustuvat tähän tekniikkaan. Esitystapa mahdollistaa nopeita katselupaikan siirtoja ja zoomauksia. Se soveltuu jopa Delaunay’n kolmiointia paremmin aineistojen interaktiiviseen esittämiseen, jos aineiston resoluutio vaihtelee suuresti.



## 10.2 Maastomallien käyttö

Maastomalleja sovelletaan muun muassa seuraaviin käyttötarkoituksiin:

- Ilmakuvien *oikaisu*: ilmakuvauksen projektiovirheiden poisto orto-

<sup>1</sup>Kuvankäsittelyssä puhutaan vastaavalla tavalla pikseli- ja vektorigrafiikasta.



kuvakarttojen tuotannossa.

- Kartassa esitettävien korkeuskäyrien laskeminen.
- Liikenneväylien (teiden, katujen, vesiväylien, sähkölinjojen...) reittien suunnittelu. Minimoidaan (muiden reunaehtojen rajoittamana, kuten maksimikallistukset tai minimikaarevuussäteet):
  - siirrettävien maamassojen määrä, osio 10.4
  - poistettavien ja lisättävien maa-ainesmäärien erotus
  - väylää käyttävän tyypillisen kulkuneuvon polttoaineen kulutus, matkustusaika.
- Kolmiulotteisten maisemamallien luominen ja visualisointi suunnittelun ja suunnitelmista käytävän julkisen keskustelun avuksi.
- Näkyvyyskysymysten ratkaiseminen, esimerkiksi matkapuhelin- tai radiomastojen sijoittamisen yhteydessä.
- Laskettelurinteiden suunnittelu.
- Sotilaallinen sovellus: risteilyohjusten, mutta myös hävittäjälentokoneiden, automaattiohjaus matalalennolla piiloutumassa tutkalta maaston ”sisällä”.
- Maastomassojen painovoimavaikutuksen (maastokorjauksen) laskeminen painovoimakentän ja geoidin määrittämisessä.
- Numeeristen sääennustusmallien (NWP) ja ilmastotutkimuksen yleisten virtausmallien (*general circulation models*, GCM) alempi reunapinta.
- Realistiset maisemat videopeleille ja lentosimulaattoreille.
- Monet muut.

Tarkasti ottaen digitaalinen korkeusmalli (DEM, *digital elevation model*) kuvaa maaston lisäksi esimerkiksi rakennusten ja puiden latvuston korkeudet, kun taas digitaalinen maastomalli (DTM, *digital terrain model*) kuvaa vain itse maaston korkeutta. Silti näitä sanoja käytetään usein synonyymeina.

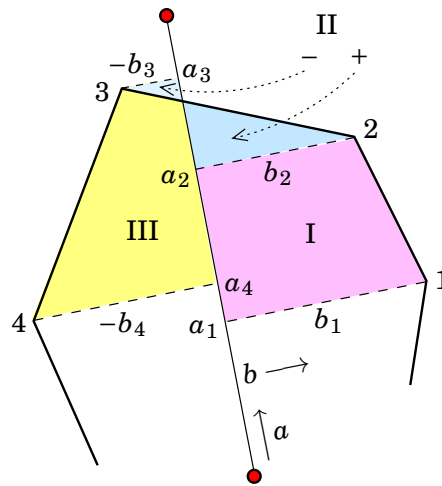


### 10.3 Pinta-alojen laskenta

Pinta-alojen laskentaa on käsitelty kirjassa Kahmen ja Faig (1988) osiossa 8.6.

Kätevä laskentatapa on käyttää merkitsemismittoja tietyn kantaviivan suhteen. Kuvassa 10.3 merkitsemismitat muodostavat trapetsoideja.





KUVA 10.3. Merkitsemismittojen käyttö pinta-alojen laskennassa.

Alue I lasketaan seuraavasti:

$$A_I = \frac{1}{2} (a_2 - a_1) (b_1 + b_2),$$

ja alue III seuraavasti:

$$A_{III} = \frac{1}{2} (a_4 - a_3) (b_3 + b_4),$$

joissa on kiinnitettävä huomiota etumerkkeihin.

Myös alue II saadaan vastaavalla tavalla, vaikka se onkin kahden pinta-alan erotus (se on kuitenkin muodollinen trapetsoidi):

$$A_{II} = \frac{1}{2} (a_3 - a_2) (b_2 + b_3).$$

Kaikki yhtälöt saadaan yhteensopiviksi sopimalla esimerkiksi, että  $b$ -arvot ovat positiivisia  $a$ -kulkusuuntaan nähden oikealla puolella ja negatiivisia vasemmalla puolella. Edetään  $a$ -indeksien numerojärjestyksessä, esimerkkitapauksessa vastapäivään. Silloin saadaan kokonaispinta-ala summaamalla

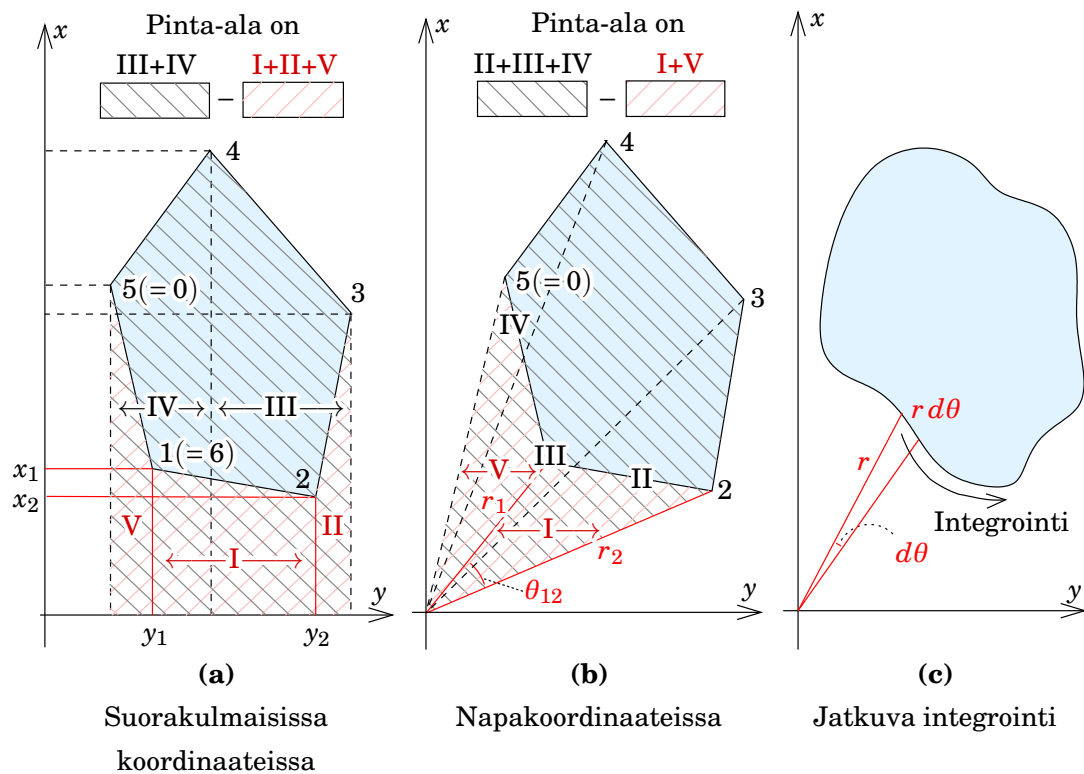
$$A = A_I + A_{II} + A_{III} + \dots$$

ja kaikki etumerkit, myös pienten kumoutuvien kolmioiden, ovat automaattisesti oikeita.

Jos käytettävissä on koordinaatteja, pinta-alan laskentaan on muitakin tapoja. Kokonaispinta-ala saadaan trapetsoidien summana ( $i$ -indeksi on sirkulaarinen:  $n + 1$  on sama kuin 1):

$$A = +\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} + y_i), \quad (10.1)$$





KUVA 10.4. Pinta-alan laskenta.

ja vaihtamalla  $x$  ja  $y$  keskenään:

$$A = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} + x_i). \quad (10.2)$$

Yhtälöstä 10.1 saadaan

$$A = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} + y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{i+1} (y_{i+1} + y_i),$$

ja uudelleen numeroimalla toinen termi — kun  $i$ -indeksi on sirkulaarinen:

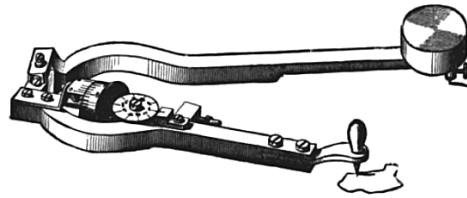
$$A = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} + y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_i + y_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_{i+1}).$$

Vastaavasti saa yhtälöstä 10.2

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1}).$$

Nämä yhtälöt tunnetaan *kengännauhakaavoina* ([Wikipedia](#), [Shoelace formula](#)).





KUVA 10.5. Napaplanimetri vuodesta 1908 (Wikipedia, Planimetri). Pinta-ala mitataan piirtämällä kuvion ulkoreunaa pitkin.

Jos yhtälöt 10.1 ja 10.2 lasketaan yhteen ja jaetaan kahdella, saadaan

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1}y_i - y_{i+1}x_i).$$

Tämä yhtälö laskee monikulmion pinta-alan *origosta lähtevien kolmioiden summana*. Voidaan näyttää — graafinen todistus kuvassa 10.6 — että sellaisen kolmion (kuvassa esimerkki) pinta-ala on

$$A_{i,i+1} = \frac{1}{2} (x_{i+1}y_i - y_{i+1}x_i) = \frac{1}{2} r_i r_{i+1} \sin \theta_{i,i+1}. \quad (10.3)$$

Tämä *planimetriyhtälö* 10.3 on *napaplanimetrin* toimintaperiaate<sup>2</sup>. Tietysti yhtälöä voidaan käyttää suoraan myös numeerisesti, jos kuvio on annettu napakoordinaateissa:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i r_{i+1} \sin \theta_{i,i+1}.$$



## 10.4 Tilavuuksien laskenta

Maamassojen määrälaskentaa on selostettu kirjassa Kahmen ja Faig (1988) osioissa 14.2 ja 14.3. Usein on kyse siirrettävän soran, hiekan tai vastaavan rakennusaineen määrän laskennasta esimerkiksi tierakentamisen yhteydessä.

Mittauksen tai määrittelyn välineet ovat

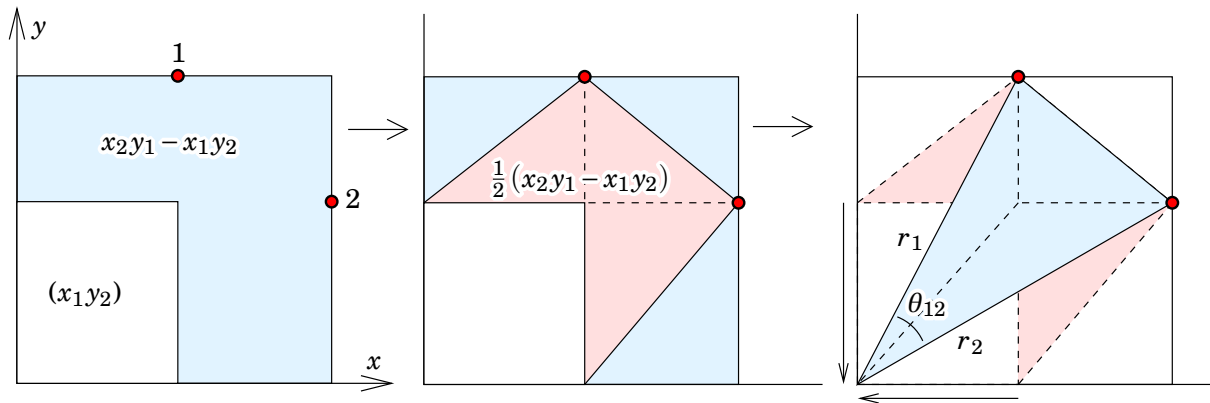
- Pintavaaitus tai lasertason käyttö. Vain pienet kohteet, työntensivinen.

<sup>2</sup>Napaplanimetri integroi mekaanisesti lausekkeen

$$\frac{1}{2} \oint r^2(\theta) d\theta,$$

joka on suljetun kuvion pinta-ala.





KUVA 10.6. Planimetriyhtälön graafinen todistus.

- Fotogrammetria ilmasta tai terrestrisesti pekkaniskalta™ eli henkilönostimelta.
- Laserkeilaus, ilmasta tai terrestrisesti — korkea tuottavuus.
- Korkeuskäyrät kartalta, menetelmän laskenta on verrattavissa pinta-alan laskentaan, osio 10.3.
- Digitaalinen maastomalli.



#### 10.4.1 Simpsonin sääntö ja neliöinti

Kätevä tapa integroida numeerisesti eli *neliöidä* maa-aineksen tilavuutta profilitiedoista on Simpsonin sääntö<sup>3</sup>, Kahmen ja Faig (1988) alaosio 14.2.1. Yhtälö on

$$V = \frac{1}{6} (\omega_1 + 4\omega_m + \omega_2) \ell, \quad (10.4)$$

jossa  $\omega_1, \omega_2$  ovat ääripäiden läpileikkausten pinta-alat,  $\omega_m$  on keskimäisen leikkauksen pinta-ala ja  $\ell$  on koko kappaleen pituus.

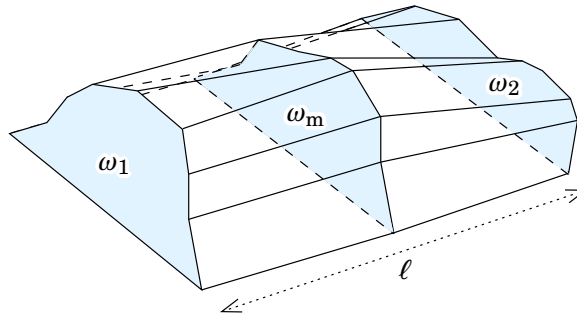
Simpsonin sääntö voidaan todistaa seuraavasti. Olkoon integroitava funktio  $f(x)$  ja olkoon käytettävissä funktion arvot pisteissä  $(-\Delta x, 0, \Delta x)$ :

$$f_{-1} = f(-\Delta x), \quad f_0 = f(0), \quad f_1 = f(\Delta x).$$

Approksimoidaan funktio  $f$  neljännen asteen polynomilla:

$$\tilde{f}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

<sup>3</sup>Thomas Simpson (1710–1761) oli englantilainen kutojan poika ja itseoppinut matemaatikko, Royal Societyn *fellow*. Hän ei itse asiassa keksinyt Simpsonin sääntöä, vaikka se esiintyy hänen oppikirjassaan: sääntö oli jo Johannes Keplerin tiedossa.



KUVA 10.7. Simpsonin integrointisääntö tilavuuslaskennassa.

Polynomin integraali on

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta x}^{+\Delta x} \tilde{f}(x) dx &= \left( ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{4}dx^4 + \frac{1}{5}ex^5 \right) \Big|_{-\Delta x}^{+\Delta x} = \\ &= 2a \Delta x + \frac{2}{3}c \Delta x^3 + \frac{2}{5}e \Delta x^5. \quad (10.5) \end{aligned}$$

Kirjoita myös

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{-1} &= a - b \Delta x + c \Delta x^2 - d \Delta x^3 + e \Delta x^4, \\ \tilde{f}_0 &= a, \\ \tilde{f}_1 &= a + b \Delta x + c \Delta x^2 + d \Delta x^3 + e \Delta x^4, \end{aligned}$$

jolloin lineaariyhdistelmä

$$\begin{aligned} I = p_{-1}\tilde{f}_{-1} + p_0\tilde{f}_0 + p_1\tilde{f}_1 &= a(p_{-1} + p_0 + p_1) + \\ &+ (b \Delta x + d \Delta x^3)(-p_{-1} + p_1) + (c \Delta x^2 + e \Delta x^4)(p_{-1} + p_1). \quad (10.6) \end{aligned}$$

Vertaamalla yhtälöitä 10.5 ja 10.6 nähdään, että saadakseen  $I$  mahdollisimman lähelle integraalia 10.5 on valittava

$$p_{-1} + p_0 + p_1 = 2 \Delta x, \quad -p_{-1} + p_1 = 0, \quad p_{-1} + p_1 = \frac{2}{3} \Delta x,$$

jolloin saadaan

$$p_{-1} = p_1 = \frac{1}{3} \Delta x, \quad p_0 = \frac{4}{3} \Delta x.$$

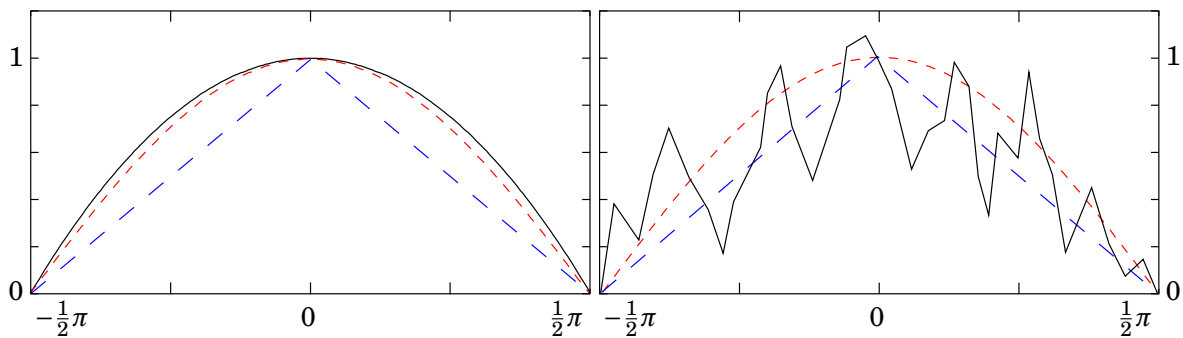
Sijoittamalla tämä yhtälöön 10.6 saadaan

$$I = 2a \Delta x + \frac{2}{3}c \Delta x^3 + \frac{2}{3}e \Delta x^5, \quad (10.7)$$

ja ero integraalin kanssa on

$$\int_{-\Delta x}^{+\Delta x} \tilde{f}(x) dx - I = -\frac{4}{15}e \Delta x^5,$$





KUVA 10.8. Neliöinnin vaihtoehdot. Vasemmalla, matemaattisesti hyvin käyttäytyvä funktio ( $\cos x$ , musta), Simpson (punainen) toimii parhaiten. Oikealla, ”rosainen” funktio. Trapetsoidisääntö (sininen) toimii yhtä hyvin. Realistinen maasto on näiden ääripäiden välillä.



viidennen asteen pistevälin  $\Delta x$  funktio. Tämä merkitsee, että valitsemalla  $\Delta x$  sopivan pieneksi, saadaan lauseke 10.7 hyvin nopeasti lähestymään polynomin oikeaa arvoa. Voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} I &= p_{-1}\tilde{f}_{-1} + p_0\tilde{f}_0 + p_1\tilde{f}_1 = \frac{1}{3}\tilde{f}_{-1}\Delta x + \frac{4}{3}\tilde{f}_0\Delta x + \frac{1}{3}\tilde{f}_1\Delta x = \\ &= \frac{1}{6} \left[ \tilde{f}_{-1} + 4\tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 \right] \cdot 2\Delta x. \end{aligned}$$

Tähän sijoitetaan funktion oikeat arvot  $f_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1$ ,  $f_0 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_m$ ,  $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_2$  ja  $\ell = 2\Delta x$ , jolloin saadaan Simpsonin sääntö 10.4. Jos integroitava funktio  $f$  ei ole patologinen — mutta maaston muodot saattavat hyvinkin olla — suppenee Simpsonin sääntö myös nopeasti siihen.

Huomaa, että Simpsonin sääntö on eksakti ei vain toisen, vaan jopa kolmannen asteen polynomeille.



#### 10.4.2 Vaihtoehtoiset neliöintisäännöt

Usein yksinkertaisempi neliöintisääntö

$$V = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\ell$$

(”trapetsoidisääntö”) kelpaa, tai jopa

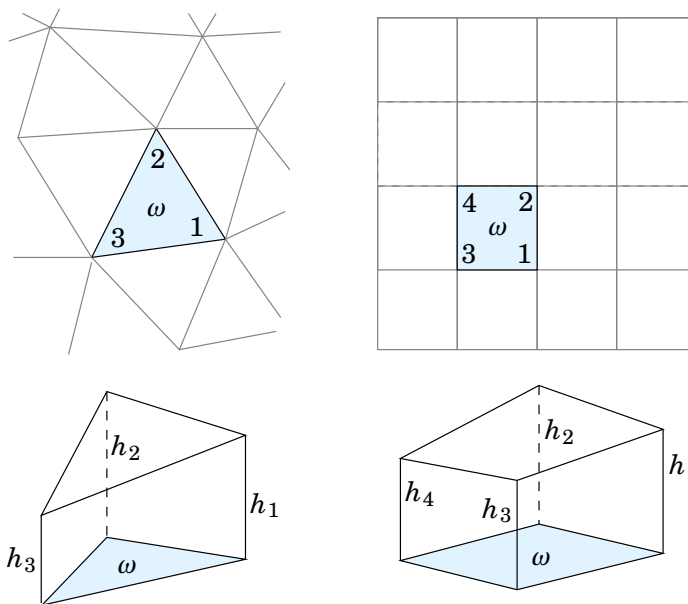
$$V = \omega_m\ell$$

(”suorakulmiosisääntö”). Ne eivät suppene kuitenkaan yhtä kauniisti kuin Simpsonin sääntö: molemmille virhe on verrannollinen pistevälin, eli kappaleen pituuden, kuutioon,  $\Delta x^3 = \ell^3$ .

Jos Simpsonin säännön tarkkuus ei ole riittävää, koska kappale on liian rosainen eli ”patologinen”, voi saavuttaa paremman tarkkuuden







KUVA 10.9. Tilavuuslaskenta digitaalisista maastomalleista.

jakamalla kappale viipaleisiin, soveltamalla jotain yksinkertaisempaa neliöintisääntöä jokaiseen niistä ja laskemalla yhteen saadut osuudet.

Tilavuuslaskenta *kolmiointi-* tai *pistehilatyyppisten* maastomallien tapauksissa on kuvattu kuvassa 10.9. Kolmiointimallin tapauksessa pinta-alkion tilavuus lasketaan yhtälön

$$V = \omega \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

mukaan. Pistehilamallin tapauksessa käytettävä yhtälö on

$$V = \omega \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}.$$

*Yleistys:* pinta-alkion pinta-ala  $\omega$  kerrottuna  $n$  nurkkapisteestä lasketulla keskimääräisellä korkeudella

$$\bar{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i.$$

Nämä yhtälöt ovat likimääräisiä mutta usein riittäviä.



## Olenko ymmärtänyt tämän?

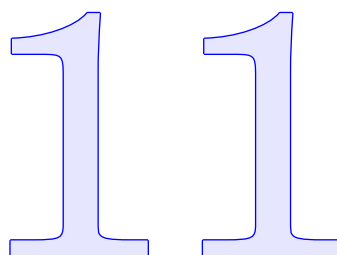
- 1) Mitä havaintotekniikoita on saatavilla maastopisteiden tietojen keräämiseen maastomallien rakentamiseksi?
- 2) Mitkä ovat kaksi pääasiallista maastomallien esitystapaa?



- 3) Esitä maastomallien sovellukset.
- 4) Selitä, miten tontin pinta-ala voidaan määrittää sen reunan merkitsemismitoista.
- 5) Selitä, miten napaplanimetri toimii.
- 6) Selitä, miten tilavuuksien neliöinti profilidatasta Simpsonin säännön avulla toimii.
- 7) Mikä oli *Shuttle Radar Topography Missionin* (SRTM:n) takana oleva ajatus?



# Kolmas ulottuvuus



Here as he walked by  
on the 16th of October 1843  
Sir William Rowan Hamilton  
in a flash of genius discovered  
the fundamental formula for  
quaternion multiplication  
 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$   
& cut it on a stone of this bridge.

---

Kirjoitus *Broom Bridgessä* Dublinissa



## 11.1 Geosentriset koordinaattijärjestelmät

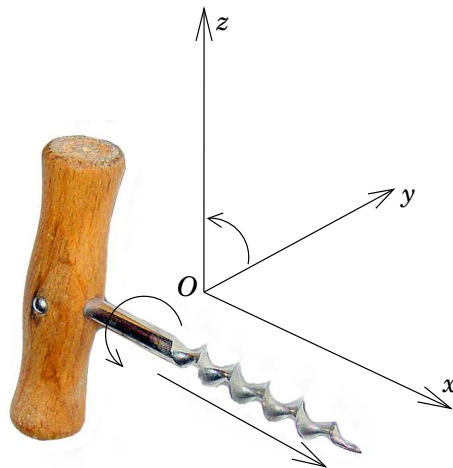
Modernissa geodesiassa satelliitti- ja avaruusgeodeettiset mittausmenetelmät kuuluvat maailmanlaajuiseen geodeettiseen havaintojärjestelmään (**IUGG**, **GGOS**) sen olennaisina osina. Toisin kuin perinteiset geodeettiset havaintomenetelmät, jotka suorittavat mittauksiaan Maan pinnalla tai sen lähellä, ovat nämä mittaukset *aidosti kolmiulotteisia*. Ne edellyttävät kolmen ulottuvuuden käyttöä myös laskennassa. Lisäksi ainakin satelliittimittausten alustat ovat Maata kiertävillä radoilla, jolloin Maan massakeskipiste astuu luonnollisella tavalla käytetyn koordinaattiston origon rooliin. Siksi satelliittigeodesiassa käytetään *geosentrisiä*, *kolmiulotteisia* koordinaattijärjestelmiä. Katso kuva 11.1. Geosentristen koordinaattien symboleina käytetään usein versaaleja, kuten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

**Geosentrinen** Järjestelmän origo on Maan massakeskipisteessä ja sen  $Z$ -akseli on Maan pyörähdysakselin suuntainen.

Geosentrisiä järjestelmiä on olemassa kahdenlaisia:

**Inertiaalinen eli taivaallinen** Pyörähdysliikettä ei ole. Akse-





KUVA 11.2. Oikeakätinen koordinaatisto.  $y \rightarrow z$  -korkkiruuvi (Wikimedia Commons, Korkkiruuvi) etenee  $x$ :n suuntaan — kuten myös  $z \rightarrow x$  -korkkiruuvi  $y$ :n suuntaan ja  $x \rightarrow y$  -korkkiruuvi  $z$ :n suuntaan.

koordinaatteja, geodeettisia eli maantieteellisiä koordinaatteja, tai ellipsoidisia koordinaatteja. Niiden välillä on olemassa seuraavat yhteydet (kuva 11.3):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix},$$

jossa  $(\phi, \lambda, r)$ , etäisyys  $r$  Maan keskipisteestä sekä *geosenttrinen* leveys- ja pituusaste  $\phi$  ja  $\lambda$ , ovat pallokoordinaatteja ja

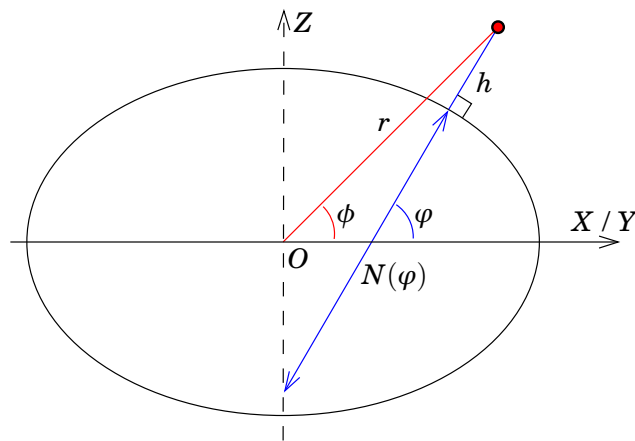
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N(\phi) + h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N(\phi) + h) \cos \phi \sin \lambda \\ \left( (b^2/a^2) N(\phi) + h \right) \sin \phi \end{bmatrix},$$

jossa  $(\phi, \lambda, h)$ , korkeus vertausellipsoidista  $h$  ja *geodeettinen* leveys- ja pituusaste  $\phi$  ja  $\lambda$ , ovat geodeettisia eli maantieteellisiä koordinaatteja. Suureet  $a$  ja  $b$  ovat maaellipsoidin iso- ja pikkuakselin puolikkaat, toisin sanoen, päiväntasaajan säde ja napasäde. Poikittaiskaarevuussäde on

$$N(\phi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}.$$

Kolmas geosenttrinen koordinaattityyppi, *ellipsoidiset* koordinaatit, käytetään joskus tieteellisessä työssä, mutta maanmittauksessa ne ovat ilman käytännön merkitystä, katso Heiskanen ja Moritz (1967) sivut 39–45.





KUVA 11.3. Geosentrinen ( $\phi$ ) ja geodeettinen ( $\varphi$ ) leveysaste sekä poikittaiskaarevuussäde  $N$ .



- <sup>1</sup> Suorakulmaisten<sup>1</sup> koordinaattien etu on, että laskenta on helppoa. Esimerkiksi kahden pisteen  $(X_1, Y_1, Z_1)$  ja  $(X_2, Y_2, Z_2)$  välinen etäisyys  $s$  on yksinkertaisesti<sup>2</sup>

$$s_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}.$$

Jos pisteet ovat annettuja muodossa  $(\varphi_1, \lambda_1, h_1)$ ,  $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)$ , on vastaava yhtälö aika lailla monimutkaisempi!



## 11.2 Toposentriset koordinaatit

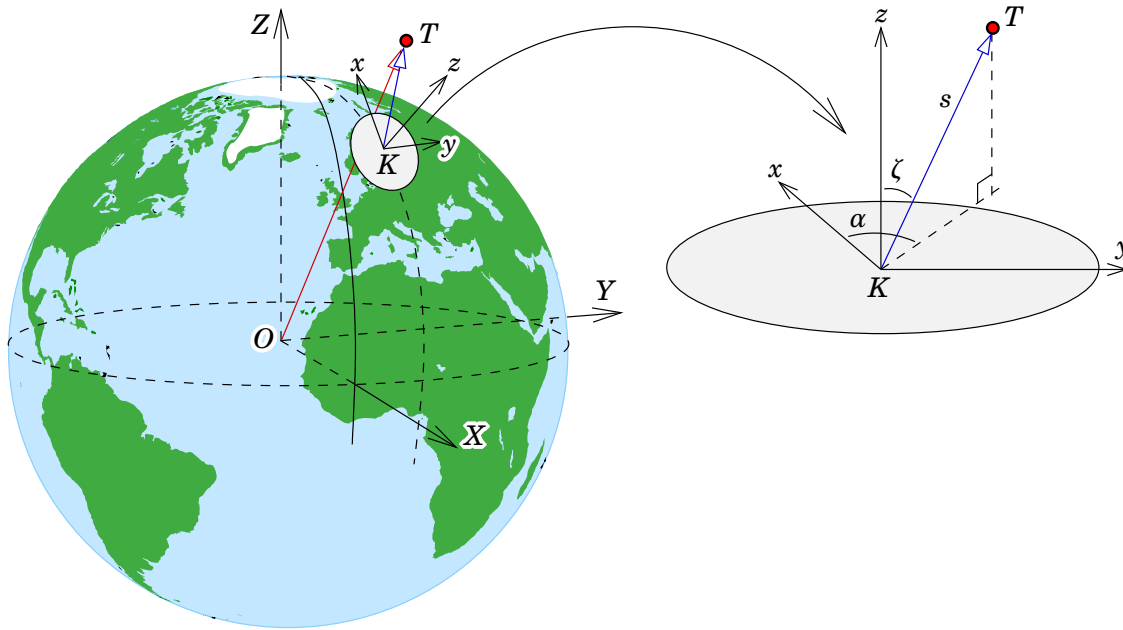
- Käytännön mittaustyössä käytetään usein paikallista eli *toposentristä*<sup>3</sup>, kolmiulotteista koordinaatistoa, jonka origo on itse mittausta paikka eli koje (*kojekoordinaatit*). On luonnollista käyttää pallokoordinaatteja  $(\alpha, \zeta, s)$ , jossa  $s$  on vinoetäisyys kojeesta,  $\alpha$  on atsimuutti eli vaakata-son suuntakulma ja  $\zeta$  on zeniittikulma. Niistä laskee helposti tähyksen

<sup>1</sup>Suorakulmaisia koordinaatteja kutsutaan usein *karteesisiksi* koordinaateiksi, René Descartesin mukaan. Tarkasti ottaen karteesisilla koordinaateilla on aina suorat koordinaattilinjat, kun suorakulmaiset koordinaatit voivat olla myös kaarevalinjaisia. Itse asiassa sekä pallokoordinaatit että geodeettiset koordinaatit ovat tässä laajemmassa merkityksessä suorakulmaisia.

<sup>2</sup>Tietenkin tämä on suora matka avaruudessa, joka menee usein Maan kiinteän kappaleen läpi. Yleensä kiinnostaa enemmän matkaa Maan pintaa pitkin.

<sup>3</sup>Kreik. *topos* = paikka, vertaa *utopia* = olematon paikka.





KUVA 11.4. Toposentrisen eli kojokeskeinen koordinaatisto sekä geosentrisen koordinaatisto. Kojee on  $K$ , Maan massakeskipiste  $O$  ja mitattu paikka eli tähys  $T$ . Huomaa, että tämä koordinaatisto on vasenkätinen.

suorakulmaisia koordinaatteja:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \sin \zeta \cos \alpha \\ \sin \zeta \sin \alpha \\ \cos \zeta \end{bmatrix}.$$

*Elektroniset takymetrit* osaavat antaa ulos juuri näitä kojekoordinaatteja joko pallokoordinaatteina<sup>4</sup>  $(\alpha, \zeta, s)$  tai suorakulmaisina  $(x, y, z)$ . Toposentriset koordinaatit on tapana kirjoittaa *gemenalla*.

Kuvassa 11.4 on piirretty sekä toposentrisen  $(x, y, z)$ -järjestelmän koordinaattiakselit että geosentrisen järjestelmän akselit  $(X, Y, Z)$ . Tässä kuvassa tähys  $T$  voi olla Maan päällä oleva, mitattava piste, mutta myös Maata kiertävä satelliitti. Joka tapauksessa mittaukset saadaan ensin aina toposentrisesti, siis havaintopaikan  $K$  ja paikallisen horisonttitason (harmaan ympyrän) suhteen.

Muunnos näiden kahden suorakulmaisen, kolmiulotteisen järjestelmän

<sup>4</sup>Tarkasti ottaen vain gyroteodoliitit osaavat mitata absoluuttista atsimuuttia  $\alpha$ . Tavalliselle kojeelle vaakakehän nollakohdan tuntematon atsimuutti olisi määriteltävä erikseen, esimerkiksi verkkotasoituksen tai tähtitieteellisen atsimuuttimäärityksen (osio 11.6) avulla.

välillä on *kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos* eli *Helmertin muunnos*. Sitä käsitellään seuraavaksi.



### 11.3 Kolmiulotteiset muunnokset

Kaksiulotteinen yhdenmuotoisuus- eli Helmertin muunnos on, jos kääntymiskulma  $X$ -akselista  $Y$ -akseliin on samansuuntainen kuin positiivinen kulma  $\alpha$ :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{bmatrix},$$

jossa  $\alpha$  on kiertokulma,  $K$  on mittakaavasuhde, ja  $\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 \end{bmatrix}^T$  ovat uuden järjestelmän origon koordinaatit vanhassa järjestelmässä kirjoitettuina.

Vastaava kolmiulotteinen muunnosyhtälö saadaan lisäämällä  $Z$ -akseli ja pitämällä sen suunta muuttamattomana:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}.$$

Yhtälössä näkyvää  $3 \times 3$ -kokoista *kiertomatriisia* voidaan kutsua nimellä  $R_3(\alpha_3)$ .

Samalla tavalla kuin  $Z$ -akselin ympäri voi  $Y$ - tai  $X$ -akselien ympäri tapahtua kiertoa. Siinä tapauksessa saadaan analogisesti kiertomatriisit

$$R_1(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad R_2(\alpha_2) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Yleisen yhdenmuotoisuus- eli Helmertin muunnoksen yhtälö, joka sisältää kaikki kolme kiertoa (ja kolme siirtymää, ja skaalausta), voidaan nyt kirjoittaa seuraavaan, kompaktiin muotoon:

$$\bar{\mathbf{R}}' = KR(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_0). \quad (11.1)$$

Tässä vektorit kirjoitetaan niiden *komponenttien* eli paikkakoordinaattien sarakevektoreina seuraavasti:

$$\bar{\mathbf{R}}' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}}_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}.$$





Yläpalkki on merkintä siitä, että on kyse komponenttien sarakevektorista eikä itse avaruusvektorista. Se voidaan jättää pois ellei ole sekaannuksen vaaraa<sup>5</sup>.

5

Lisäksi kierto

$$R = R_3(\alpha_3)R_2(\alpha_2)R_1(\alpha_1)$$

on kolmen kierron yhdistelmä eli ”ketjutus”. Yhtälöä 11.1 kutsutaan (kolmiulotteiseksi) Helmertin eli yhdenmuotoisuusmuunnokseksi. Koordinaatiston kiertoa esittävän  $3 \times 3$  -kokoisen matriisin  $R$  alkiot ovat monimutkaisia kulmien  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ja  $\alpha_3$  trigonometrisia lausekkeita, joita emme tässä laske.



## 11.4 Muunnos pienten kiertokulmien tapauksessa

Usein kahden koordinaatiston akselit ovat hyvin lähellä toisiaan. Siinä tapauksessa kiertokulmat ovat pieniä ja voidaan tehdä approksimaatio, että  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja  $\cos \alpha \approx 1$ . Silloin yhtälöt yksinkertaistuvat. Jos lisäksi oletetaan, että mittakaavasuhde  $K$  on lähellä yksikköä, voidaan kirjoittaa

$$K = 1 + m,$$

jossa  $m$ , mittakaavavääristymä, on pieni.

Lisäksi

$$R_1 \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_3 \approx \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kun kaikki  $\alpha_i$  ovat pieniä, saa lisäksi olettaa, että kaikki  $\alpha_i \alpha_j \approx 0$ .

Saadaan

$$R = R_3(\alpha_3)R_2(\alpha_2)R_1(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = I + \Delta R,$$

<sup>5</sup>Itse vektorit ovat

$$\mathbf{R} = k(X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) = \mathbf{R}_0 + k'(X'\mathbf{i}' + Y'\mathbf{j}' + Z'\mathbf{k}'), \quad \mathbf{R}_0 = k(X_0\mathbf{i} + Y_0\mathbf{j} + Z_0\mathbf{k}),$$

jossa  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  ja  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$  ovat avaruuden ortonormaaleja kantoja, vastaavasti vanhalle ja uudelle koordinaatistolle. Myös  $K = k/k'$ , kahden koordinaatiston mittakaavavääristymien suhde. Puhtaalle kiertoliikkeelle saadaan

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = X'\mathbf{i}' + Y'\mathbf{j}' + Z'\mathbf{k}'.$$



jossa  $I$  on  $3 \times 3$  -kokoinen yksikkömatriisi ja

$$\Delta R = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

on antisymmetrinen matriisi:  $\Delta R^T = -\Delta R$ .

Nyt yhtälöstä 11.1 saadaan

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}' &= (1+m)(I + \Delta R)(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_0) \approx (I + mI + \Delta R)(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_0) \\ \implies \bar{\mathbf{R}}' - \bar{\mathbf{R}} &= (mI + \Delta R)\bar{\mathbf{R}} - (I + mI + \Delta R)\bar{\mathbf{R}}_0. \end{aligned}$$

Jos nyt myös siirrot  $\bar{\mathbf{R}}_0$  oletetaan pieniksi, seuraa tästä *koordinaattien korjausyhtälö*

$$\bar{\mathbf{R}}' - \bar{\mathbf{R}} \approx (mI + \Delta R)\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_0 = \begin{bmatrix} m & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & m & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_0, \quad (11.2)$$

jossa  $m$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\bar{\mathbf{R}}_0$  ja  $\bar{\mathbf{R}}' - \bar{\mathbf{R}}$  ovat kaikki pieniä (mutta  $\bar{\mathbf{R}}$  ja  $\bar{\mathbf{R}}'$  ovat isoja).

Esitystapa 11.2 on yleisen Helmertin muunnoksen ”pieni” muoto, kahden lähellä toisiaan olevan vertausjärjestelmän realisoinnin, esimerkiksi ITRS:n eli *International Terrestrial Reference Systemin* eri realisointien, välillä. Silloin kiertokulmat  $\alpha_i$  ovat luokkaa kaarisekunnin murto-osa ja siirtovektori  $\bar{\mathbf{R}}_0$  on alle 10cm.



## 11.5 Muunnos kahden vertausellipsoidin välillä

Klassinen tapaus on muunnos kahden geodeettisen datumin välillä, jotka on määritelty kahdella eri tavalla ei-geosentrisellä vertausellipsoidilla, esimerkiksi Euroopassa ED50-datumin Hayfordin ellipsoidin ja Itä-Euroopan Krasovskin ellipsoidin välillä. Raaka-voima-menetelmä on silloin muuntaa ensin geodeettiset koordinaatit  $(\varphi, \lambda, h)$  suorakulmaiseksi  $(X, Y, Z)$ , suorittaa kolmiulotteinen Helmertin muunnos kahden datumin välillä, ja muuntaa tulos takaisin toisen datumin geodeettiseksi koordinaateiksi  $(\varphi', \lambda', h')$ .

Jos ero kahden datumin välillä on pieni ja vain vertausellipsoidin keskipisteen siirto, on olemassa yksinkertainen yhteys keskipisteen siirron ja geodeettisten koordinaattien muutosten välillä. Katso kuva 11.5.



Olkoon pisteen sijaintivektori toisen ellipsoidin keskipisteestä  $\mathbf{R}_1$  ja toisesta  $\mathbf{R}_2$  ja ero suorakulmaisissa geosentrisissä koordinaateissa<sup>6</sup> 6

$$\Delta \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_2 - \bar{\mathbf{R}}_1 = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}.$$

Pisteen ympärillä määritetään paikalliset toposentriset koordinaatit  $(x, y, z)$  yksikkövektori- eli ortonormaalilla kannalla  $\{\mathbf{N}, \mathbf{E}, \mathbf{U}\}$  ("north, east, up"). Pisteen paikassa vertausellipsoidin pääkaarevuussäteet ovat  $M(\varphi)$ , meridiaanikaarevuussäde, ja  $N(\varphi)$ , poikittaiskaarevuussäde. Nyt toposentriset koordinaattierot ovat

$$\Delta x = M(\varphi) \Delta \varphi, \quad \Delta y = N(\varphi) \cos \varphi \Delta \lambda, \quad \Delta z = \Delta h,$$

ja

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{N} \Delta x + \mathbf{E} \Delta y + \mathbf{U} \Delta z = \mathbf{N} M(\varphi) \Delta \varphi + \mathbf{E} N(\varphi) \cos \varphi \Delta \lambda + \mathbf{U} \Delta h.$$

Matriisinotaatiossa tämä on

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{E} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(\varphi) \Delta \varphi \\ N(\varphi) \cos \varphi \Delta \lambda \\ \Delta h \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} N_X & E_X & U_X \\ N_Y & E_Y & U_Y \\ N_Z & E_Z & U_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(\varphi) \Delta \varphi \\ N(\varphi) \cos \varphi \Delta \lambda \\ \Delta h \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa matriisi on ortogonaalinen, itse asiassa kiertomatriisi:

$$R = \begin{bmatrix} N_X & E_X & U_X \\ N_Y & E_Y & U_Y \\ N_Z & E_Z & U_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

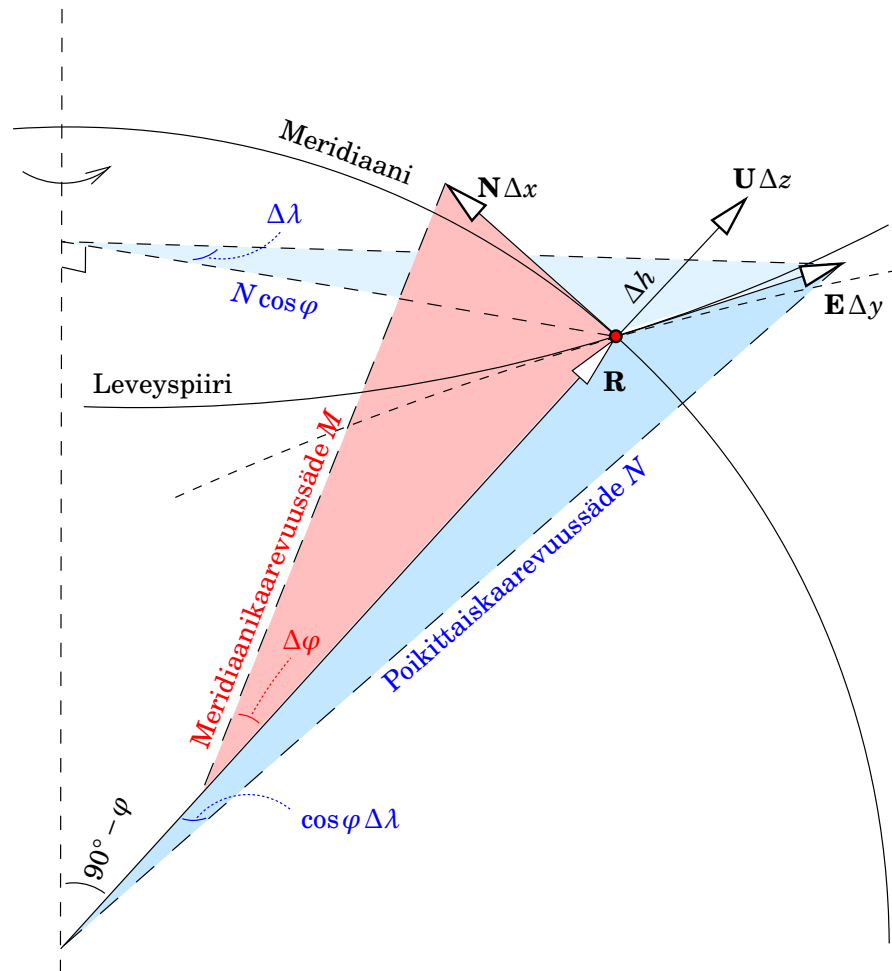
Matriisin sarakkeet ovat vektoreiden  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{U}$  geosentrisiä komponentteja.

Ortogonaalisen matriisin kääntäminen on helppoa:  $R^{-1} = R^T$ , eli

$$\begin{bmatrix} M(\varphi) \Delta \varphi \\ N(\varphi) \cos \varphi \Delta \lambda \\ \Delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}.$$

<sup>6</sup>Tämä on myös vektori vertausellipsoidien keskipisteiden välillä!





KUVA 11.5. Differentiaalinen yhteys suorakulmaisten  $(\mathbf{N}, \mathbf{E}, \mathbf{U})$ -koordinaattien ja vertausellipsoidin geodeettisten koordinaattien välillä.

Näin voidaan helposti laskea, mitkä ovat vertausellipsoidin keskipisteen siirtämisen vaikutukset geodeettisiin koordinaatteihin  $(\varphi, \lambda, h)$  laskettuina ellipsoidilla:

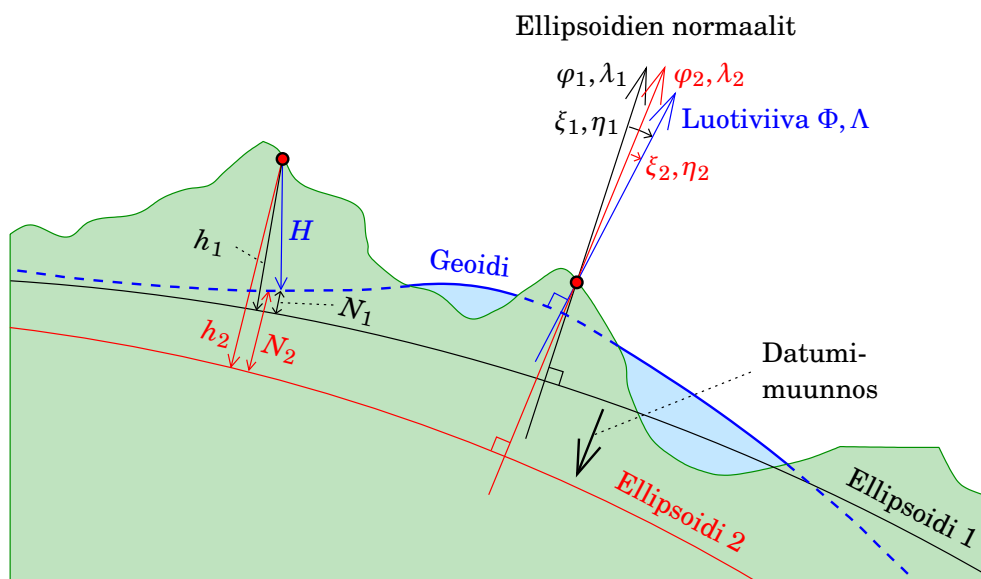
$$\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \lambda_2 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (M(\varphi))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (N(\varphi) \cos \varphi)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R^T \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix}.$$

Ja kun geodeettiset koordinaatit  $(\varphi, \lambda, h)$  muuttuvat, niin muuttuvat myös luotiviivan poikkeamat ja geoidin korkeudet: niiden määritelmät-hän ovat

$$\xi = \Phi - \varphi, \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi, \quad N = h - H, \quad (11.3)$$

jossa  $(\Phi, \Lambda)$  ovat tähtitieteellisesti määritetyt leveys- ja pituusasteet,  $(\xi, \eta)$  luotiviivan poikkeamat pohjois- ja itäsuuntaan,  $h$  on korkeus ellipsoidista ja  $H$  merenpinnasta eli geoidista, kun  $N$  on geoidin korkeus





KUVA 11.6. Datumimuunnoksen (vertausellipsoidin keskipisteen siirron) vaikutus geodeettisiin leveys- ja pituusasteisiin  $\varphi$  ja  $\lambda$ , luotiviivan poikkeamiin  $\xi$  ja  $\eta$ , geoidin korkeuksiin  $N$  ja pisteiden korkeuksiin  $h$  vertausellipsoidista.

vertausellipsoidista. Tästä saa suoraan

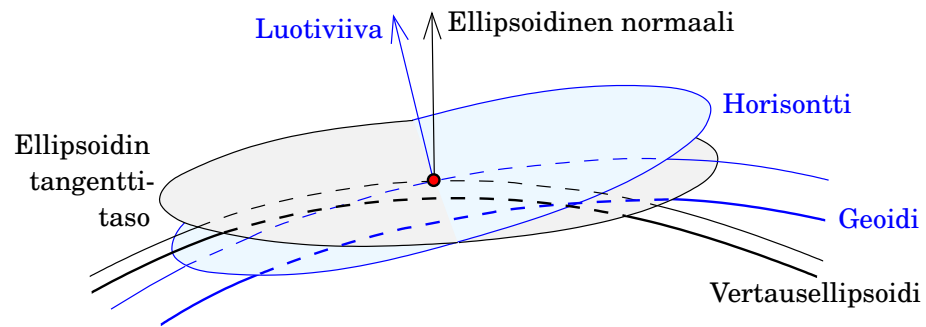
$$\begin{bmatrix} -M(\varphi) \Delta \xi \\ -N(\varphi) \Delta \eta \\ \Delta N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix},$$

koska  $\Phi$ ,  $\Lambda$  ja  $H$  ovat suoraan laskettavissa mittauksista ilman vertausellipsoidin käyttöä. Katso kuva 11.6.

## 11.6 Laplacen atsimuuttimittaus

Vertausellipsoidilla laskettu geodeettinen verkko orientoidaan tähtitieteellisten mittausten avulla. Kolmesta vapausasteesta kaksi kiinnitetään tekemällä ellipsoidisen normaalin suunta datumipisteessä tai -pisteissä identtiseksi tähtitieteellisesti mitatun luotiviivan suunnan kanssa. Tämä jättää kolmannen vapausasteen vapaaksi: verkon suuntaus paikallisen pohjoissuunnan suhteen.

Verkossa mitatut suunnat ovat paikalliselle horisonttitasolle projisoituneet suunnat. Jos jätetään huomioimatta paikalliset luotiviivan poikkeamat — siis oletetaan, että paikallinen horisonttitaso on yhdensuuntainen paikallisen vertausellipsoidin tangenttitason kanssa — voidaan sanoa, että tähtäysatsimuutit ovat vertausellipsoidiin projisoituneet suunnat. Tämä



KUVA 11.7. Paikallisen luotiviivan poikkeama vertausellipsoidin pinnan normaalista. Yleinen tilanne pisteessä, joka ei sijaitse vertausellipsoidilla eikä geoidilla.



olettaa *ei ole kuitenkaan oikea*. Paikallinen horisontti on kohtisuorassa paikalliseen painovoimaan nähden, ja painovoiman suunta eroaa jonkin verran vertausellipsoidin normaalin suunnasta. Tämä ilmiö on juuri *luotiviivan poikkeama*, katso kuva 11.7.

Luotiviivan poikkeamat ovat  $\xi$  etelä-pohjoissuunnassa ja  $\eta$  länsi-itäsuunnassa. Niiden yhtälöt 11.3 annettiin jo:

$$\xi = \Phi - \varphi, \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \Phi,$$

jossa  $(\Phi, \Lambda)$  ovat tähtitieteelliset leveys- ja pituusasteet.  $\varphi$  ja  $\lambda$ , maantieteelliset leveys- ja pituusasteet, ovat *geodeettisesti laskettuja* koordinaatteja, sellaisia jotka löytyvät kartoilta ja jotka on laskettu tietyn <sup>7</sup> vertausellipsoidin suhteen<sup>7</sup>.

Olkoon paikalliseen horisonttitasoon nähden mitattu absoluuttinen suunta eli *tähtitieteellinen atsimuutti*  $A$ , ja sama tähtäys vertausellipsoidiin nähden mitattuna eli *geodeettinen atsimuutti*,  $\alpha$ .

Silloin voidaan sanoa, että

$$\begin{aligned} A - \alpha &= \eta \tan \Phi + (\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \cot \zeta = \\ &= (\Lambda - \lambda) \sin \Phi + ((\Phi - \varphi) \sin \alpha - (\Lambda - \lambda) \cos \alpha \cos \Phi) \cot \zeta, \end{aligned} \quad (11.4)$$

jossa  $\zeta$  on zeniittikulma. Yhtälö 11.4 on *Laplacen atsimuuttiyhtälö*. Jos tähtäyssuunta on vaakatasossa, on  $\cot \zeta = 0$  ja ylläoleva korjaus on mitauspaikkakohtainen vakio, koska atsimuutin  $\alpha$  riippuvuus häviää.

<sup>7</sup>Tämä merkitsee siis, että luotiviivan poikkeamat riippuvat valitusta vertausellipsoidista. Paikallisen vertausellipsoidin eli *datum*in valinta tehtiin usein näin, että luotiviivan poikkeamien neliöiden summa minimoituisi kohdealueella. Toisin sanoen, että ellipsoidi sopisi mahdollisimman hyvin yhteen paikallisen painovoimakentän tasapotentiaali-pinnan eli *geoidin* kanssa.

Kuva 11.8 selittää, mistä molemmat termit ovat peräisin:

- Ensimmäinen termi  $\eta \tan \Phi$  johtuu taivaannavan suunnan eri projektioista paikalliselle horisontille ja vertausellipsoidin tangenttitasolle. Se riippuu taivaannavan korkeudesta eli tähtitieteellisestä leveysasteesta  $\Phi$ .
- Toinen termi  $(\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \cot \zeta$  johtuu tähtäyssuunnan eri projektioista paikalliselle horisontille ja ellipsoidin tangenttitasolle. Se riippuu tähtäyksen zeniittikulmasta  $\zeta$  ja häviää jos  $\zeta = 100^\circ$ .



## 11.7 Perinteiset ”2D+1D” -koordinaatit

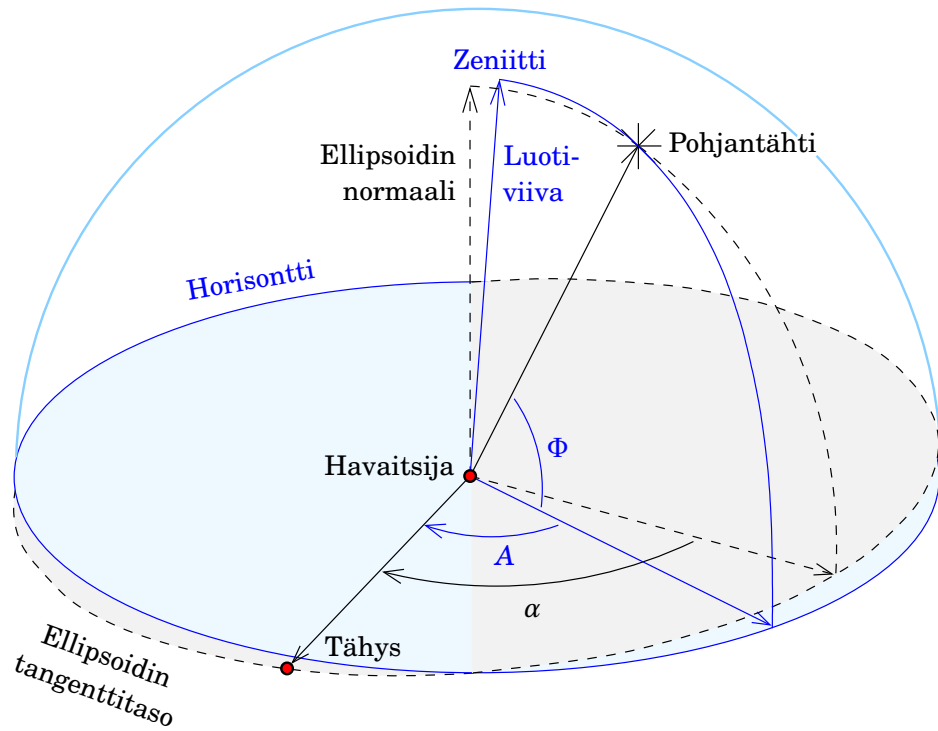
Jo kauan on laajassa käytössä ollut koordinaatistoja, joissa vaakasijainti ja korkeus ilmoitetaan erikseen. Esimerkki tästä on Suomessa pitkään käytössä ollut, mutta nyt väistynyt, Kartastokoordinaattijärjestelmä **KKJ** ja korkeusjärjestelmä **N60**. **KKJ** antaa vaakakoordinaatteja Gauss-Krüger-projektiossa Hayfordin eli vuoden 1924 Kansainvälisellä ellipsoidilla. Koordinaatit perustuvat **ED50**-järjestelmään (European Datum 1950), joka luotiin vuonna 1950 kaikkien Länsi-Euroopan maiden kolmioverkkojen yhteistasoituksen avulla. Tämä on perinteinen, ei-geosentrinen datumi.

**N60**-järjestelmä antaa ortometrisia korkeuksia, siis korkeuksia *geoidista* eikä vertausellipsoidista. Geoidi (katso osio 16.4) on kumpuileva, keskimerenpinnan kaltainen vertauspinta. Kansainvälisen ellipsoidin kanssa on käytettävä *Bomfordin*<sup>8</sup> *geoidimallia*, joka laskettiin aikoinaan **ED50**-projektin yhteydessä.

Pisteen kolmiulotteisen sijainnin ilmaiseminen muodossa  $(x, y, H)$ , jossa  $(x, y)$  on **KKJ**-koordinaattipari ja  $H$  ortometrinen **N60**-korkeus, on ongelmallinen: yhteys satelliittipaikannuksen käyttämiin järjestelmiin on mutkikas. Koordinaattien  $(x, y, H)$  muuntaminen geosentrisiksi  $(X, Y, Z)$ -koordinaateiksi sisältää seuraavat vaiheet:

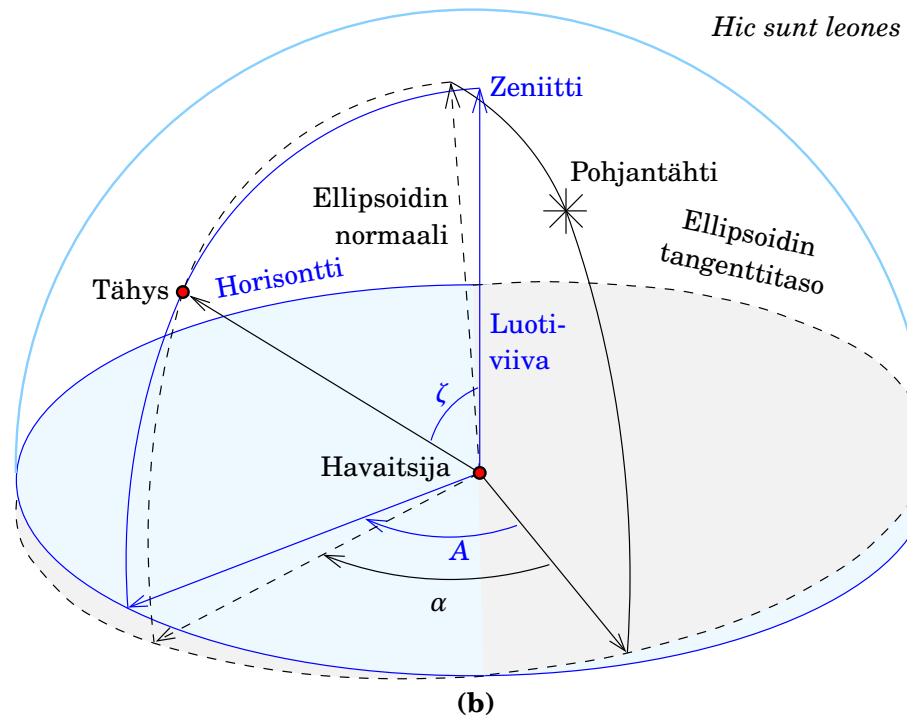
- 1) **KKJ**-koordinaatit  $(x, y)$  ovat jo läpikäyneet kaksiulotteisen Helmerlin muunnoksen, likimääräisen yhteensopivuuden aikaansaamiseksi vieläkin vanhemman **VVJ**:n (Vanhan valtion järjestelmän, ”Helsingin järjestelmän”) kanssa. Tämä muunnos on dokumentoitu julkaisussa **Ollikainen (1993)**. Tämän muunnoksen käänteismuun-

<sup>8</sup>Brigadier Guy Bomford (1899–1996) oli etevä brittiläinen geodeetti ja geoidimäärityksen tutkija.



(a)

Navan korkeuskulmaan  $\Phi$  liittyvä osuus



(b)

Tähyksen korkeuskulmaan  $100^g - \zeta$  liittyvä osuus



KUVA 11.8. Laplace-ilmiö: luotiviivan poikkeaman vaikutus atsimuuttiin.





nos on sovellettava:  $(x, y) \implies (x', y')$ .

- 2) Gauss-Krüger-karttaprojektio sovelletaan käänteisenä  $(x', y') \implies (\varphi, \lambda)$ , Kansainvälisellä eli Hayfordin ellipsoidilla.
- 3) Ortometrisen korkeuden  $H$  muuntamiseksi korkeudeksi  $h$  vertausellipsoidista tarvitaan käytetyn vertausellipsoidin kanssa yhteensopiva geoidimalli, siis *Bomfordin geoidimalli*. Geoidin korkeus  $N = h - H$  tarvitaan jokaisessa pisteessä.
- 4) Geodeettiset koordinaatit  $(\varphi, \lambda, h)$  muunnetaan suorakulmaiseksi  $(X', Y', Z')$ -koordinaateiksi. Nämä kolmiulotteiset koordinaatit ovat edelleen European Datum 1950 -järjestelmässä, joka ei ole (tarkasti) geosentrinen.
- 5) Koska ED50-datumi on epägeosentrinen, tarvitaan vielä kolmiulotteinen Helmertin muunnos tarkasti geosentristen  $(X, Y, Z)$ -koordinaattien saamiseksi, katso osio 11.8.

KKJ on jo väistynyt uusien karttaprojektiojärjestelmien tieltä. Uudet järjestelmät perustuvat joko Gauss-Krüger-projektioon tai UTM-projektioon (Universal Transverse Mercator) GRS80-vertausellipsoidilla, ja EUREF-FIN-datumiin, ETRS89-järjestelmän (European Terrestrial Reference System 1989) Suomen kansalliseen realisointiin. Korkeusjärjestelmänä käytetään uutta N2000-järjestelmää, jonka yhteys ellipsoidisiin korkeuksiin on geoidimallin FIN2005N00 antama, katso Bilker-Koivula ja Ollikainen (2009). Yllä olevat kohdat 2–4 pätevät periaatteessa edelleen, vain nimet muuttuvat.




## 11.8 Case: ED50:n ja EUREF89:n välinen muunnos

Tämä on Helmertin muunnos, tyyppi 11.1, tarkasti geosentriseen järjestelmään. Koska ED50-datumin pohjana oleva Hayfordin ellipsoidi ei ole (tarkasti) geosentrinen, on koordinaatiston origo siirrettävä vertausellipsoidin keskipisteestä Maan massakeskipisteeseen. Siirrot (translaatiot) ovat luokkaa sata metriä, ja myös kiertokulmat ja mittakaavan muutos ovat huomattavia, katso Ollikainen (1993) sivu 15 ja taulukko 2 sivulla 13:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ED50}} = (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{EUREF89}} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix},$$

jolle taulukko 11.1 antaa muunnosparametrit Matti Ollikaisen ratkaisun mukaan Suomen alueella.



 TAULUKKO 11.1. Julkaisun [Ollikainen \(1993\)](#) mukaiset muunnosparametrit [EUREF89](#) → [ED50](#).

Parametri	Arvo	Tarkkuus	Yksikkö
$\Delta X$	93,477	$\pm 3,345$	m
$\Delta Y$	103,453	$\pm 5,534$	m
$\Delta Z$	123,431	$\pm 2,736$	m
$e_x$	-0,246	$\pm 0,168$	"
$e_y$	0,109	$\pm 0,106$	"
$e_z$	0,068	$\pm 0,112$	"
$m$	-2,062	$\pm 0,417$	ppm

[ED50](#) (European Datum 1950) on perinteinen eurooppalainen datumi, johon myös [KKJ](#) perustuu. Se luotiin reilusti ennen satelliittiaikakautta. Kuten taulukosta nähdään, on se *ei-geosentrinen*. [EUREF89](#) on nykyaikainen [GNSS](#)-pohjainen eurooppalainen vertauskehys. Taulukossa annetut tarkkuusluvut ovat isoja lähinnä siksi, että perinteisellä tavalla laajalle alueelle määritetyt koordinaatit eivät ole kovin tarkkoja.

Tuoreempi tieto koordinaatti- ja muunnosasioista Suomen alueella löytyy julkaisusta [Häkli ym. \(2009\)](#).

## 11.9 Case: ITRF:n ja ETRF:n välinen muunnos

Suomessa on käytössä kolmiulotteinen, satelliittipohjainen, siis geosentrinen, vertauskehys nimeltä [EUREF-FIN](#). Se on [ETRS89](#):n eli European Terrestrial Reference Systemin valtakunnallinen realisointi Suomen alueella. Muissa maissa on olemassa vastaavanlaisia realisoitteja.

Kuitenkin geodeettiset satelliittimittaukset antavat sijaintiratkaisun samassa kehyksessä kuin [GPS](#)-satelliittien rata-alkiot, vaikkapa [ITRF2005](#). Silloin tarvitaan seuraavaa muunnosta vastaavalle [ETRS89](#):n realisoinnille [ETRF2005](#):

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ETRF2005}}(t) &= \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ITRF2005}}(t) + \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}_{\text{ITRF2005}}^{\text{ETRF2005}} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -\dot{R}_3 & \dot{R}_2 \\ \dot{R}_3 & 0 & -\dot{R}_1 \\ -\dot{R}_2 & \dot{R}_1 & 0 \end{bmatrix}_{\text{ITRF2005}}^{\text{ETRF2005}} \times (t - 1989.0) \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ITRF2005}}(t),
 \end{aligned}$$

jossa piste  $R$ -parametrien päällä (Newtonin pistenotaatio) merkitsee deri-



TAULUKKO 11.2. Muunnosparametrien arvot ITRF2005 → ETRF2005 lähteestä Boucher ja Altamimi (2007) taulukot 3 ja 4.

Parametri	Arvo (cm)	Parametri	Arvo ( $10^{-3}''/a$ )
$T_1$	5,6	$\dot{R}_1$	0,054
$T_2$	4,8	$\dot{R}_2$	0,518
$T_3$	-3,7	$\dot{R}_3$	-0,781

vointia ajan suhteen.  $\dot{R}$ -parametrit tässä yhtälössä sisältävät Euraasian laatan tektonisen liikkeen.

Yhtälön parametrien arvot löytyvät EUREF-alakomission laatimasta ohjeesta ja esitetään taulukossa 11.2.

Kuten näkyy, ovat muunnosparametrien arvot tässä tapauksessa useita suuruusluokkia pienempiä kuin aiemmin kuvatussa EUREF-FINin ja ED50:n välisessä muunnoksessa. Molemmat vertauskehykset, ETRF2005 ja ITRF2005, ovat senttimetritasolla geosentrisiä.



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mitkä ovat geosentristen koordinaattijärjestelmien kaksi päätyyppiä?
- 2) Mikä on tähtiaika ja mitä se kuvaa?
- 3) Montako muunnosparametria on kolmiulotteisella Helmertin muunnoksella?
- 4) Nimeä kolmiulotteisen Helmertin muunnoksen parametrit.
- 5) Kuvaa Laplacen atsimuutin mittaus ja mihin sitä käytetään.



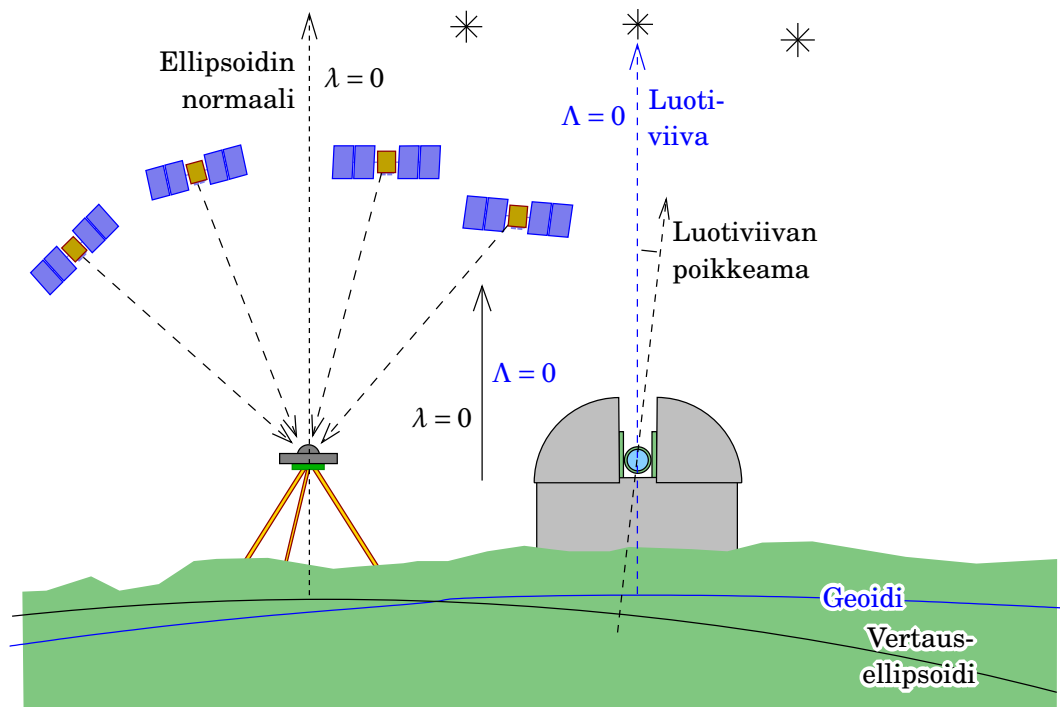
## Harjoitus 11–1: Greenwich: selitä tämä

Ihmiset ovat käyttäneet halpoja käsikäyttöisiä GNSS-vastaanottimiaan — jopa matkapuhelimiaan — Greenwichin meridiaanilla, siis nollameridiaanilla, kuva 2.11, ja havainneet, että *pituusaste ei ole nolla*.

Miten tämä on mahdollista?

Internetistä löytyy paljon hyvää selittävää aineistoa, mukaan lukien eräs *Journal of Geodesy* artikkeli vuodesta 2015 — ja paljon kunnon vanhaa keltaisen lehdistön puppua. Älä mene halpaan. Tässä harjoituksessa tehtävänäsi on laatia itse selostusteksti, joka näyttää, että olet ymmärtänyt, mistä tässä on kyse.





KUVA 11.9. Greenwichin geometria: pituusaste on *suunta* eikä *paikkaa*.

Kuvittele, että journalisti, joka on kuullut asiasta, soittaa ja pyytää sinulta geodeettina kommenttia. Selostuksesi — hissipuhe — on oltava niin selkeä, että journalisti oivaltaa, mistä on kyse, ja sen lisäksi, kun hän saapuu kotiin, hän pystyy kertomaan aviomiehelleen, mitä on oppinut. Silloin myös aviomies oivaltaa...



# Global Positioning System (GPS)

# 12

Wouldn't it be noteworthy that Transit 5B-5 (launched 1964) is the oldest active satellite in space? It never went into operation because the data up/download link system failed after deployment into LEO. But since that day it transmits its doppler carrier and marker signals on 136.650 MHz, of course the batteries failed many years ago and so the electronics only function when the satellite is in sunlight. But it still manages to boot up most days, after more than 50 years of operation, and can be received using simple handheld scanners. It's considered an admirable "space monument" by sat enthusiasts.

---

176.0.30.145, 29. marraskuuta 2015. [Wikipedia, Transit 5B-5 — oldest active satellite](#)

MAANMITTAUKSESSA [GPS](#):N ROOLI on parin, kolmen viime vuosikymmenen aikana kasvanut hallitsevaksi sekä Suomessa että maailmanlaajuisesti. Ammattikirjallisuus, etenkin englannin kielellä, on laaja. Suomen kielellä alan merkittävä teos on [Poutanen \(2017\)](#). Englanninkielisestä kirjallisuudesta hyvä perusteos on [Hofmann-Wellenhof ym. \(2001\)](#).

Tässä keskitymme [GPS](#)-järjestelmään, joka on jo pitkään ollut täysin toimiva. Tämän Yhdysvaltojen sotilasviranomaisten hallinnoiman järjestelmän rinnalle on viime vuosina ilmaantunut muiden maiden vastaavia järjestelmiä. Erityisesti pitää mainita venäläinen [GLONASS](#), joka on alennuskauden jälkeen kasvanut taas operationaaliseksi. Maanmittauksessa käytetään molempien järjestelmien satelliitteja rutiininomaisesti yhdessä.

Eurooppalaiset kehittivät oman Galileo-järjestelmänsä, kuten myös kiinalaiset oman BeiDou-järjestelmänsä ("*Compass*"). Molempien järjestel-

mien satelliitteja on toimimassa kiertoradalla ja molemmat järjestelmät ovat lähellä täyttä toimivuutta.

Näitä järjestelmiä kutsutaan yhdessä ”GNSS-järjestelmiksi” eli *Global Navigation Satellite Systems*. Alkuperäisen GPS-järjestelmän toiminta on yksinkertaisuutensa vuoksi alkeiden opettamiseen sopivin malli, joten tulemme keskittymään siihen.

GPS oli alun perin *navigointijärjestelmä*. Se ei ole ensimmäinen satelliittikäyttöinen radionavigointijärjestelmä: aikaisempi satelliittinavigointijärjestelmä oli Transit eli NNSS (Navy Navigation Satellite System), epävirallisemmin ”Doppler-paikannusjärjestelmä”. Tämä vuosina 1964–1996 toiminut järjestelmä koostui viidestä matalilla radoilla Maata kiertävästä satelliitista. Geodeettisesti käyttökelpoisen paikannuksen suorittaminen vaati useita satelliitin ylikulkuja, käytännössä vähintään vuorokauden verran havaintoja.

NNSS esitetään visuaalisesti kuvassa 12.3.

GPS-satelliitit ovat paljon korkeammilla radoilla, ja satelliitteja ”näky” taivaalla missä päin maapalloa tahansa, lähes millä hetkellä tahansa, ainakin kuusi. Tavallisemmin näky kahdeksasta yli kymmeneen<sup>1</sup>. Siksi GPS-paikannus voidaan tehdä lähes heti, muutaman sekunnin tai minuutin sisällä.



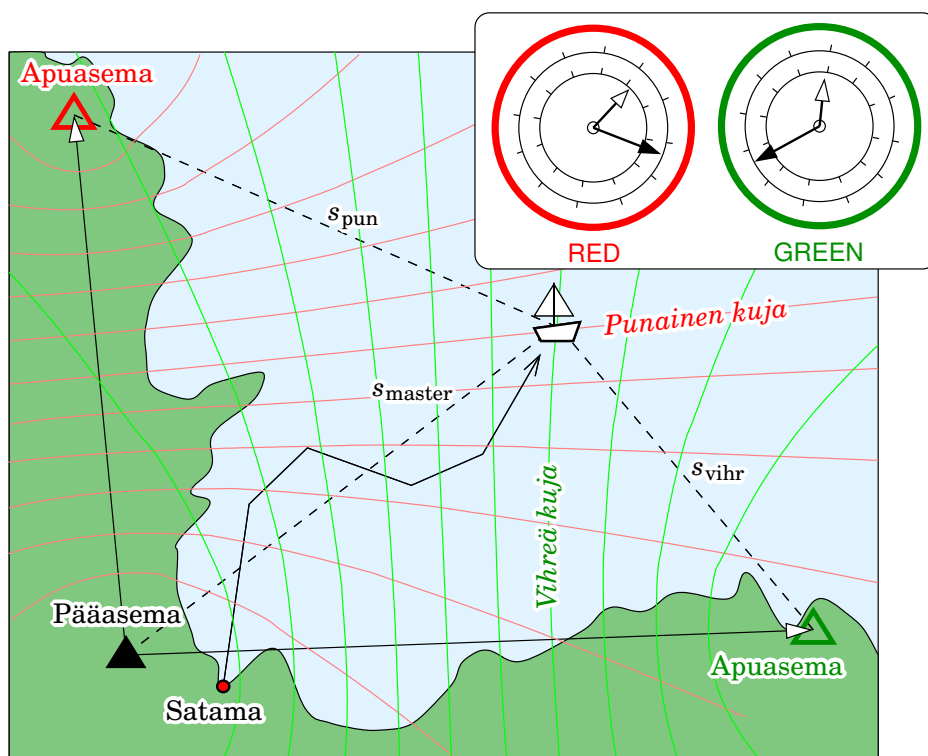
## 12.1 Radionavigointi ja hyperbolisia järjestelmiä

Vanhemmista, terrestrisistä merenkulun radionavigointijärjestelmistä mainittakoon vuonna 2000 lopetettu Decca-järjestelmä, joka on esimerkki *hyperbolisesta järjestelmästä*. Muita mainitsemisen arvoisia järjestelmiä<sup>2</sup> ovat Loran-C ja Omega, molemmat lopetettuja<sup>2</sup>.

Decca lähetti ei-moduloituja kantoaaltoja taajuusalueella 70–129 kHz, mikä vastaa aallonpituuksiin 2,3–4,3 km. Sen käyttö vaati ainakin kolme lähetintä, yksi ”master”-asema eli pääasema ja vähintään kaksi ”slave”-asemaa eli apuasemaa. Asemien lähetykset olivat tarkasti synkronoituja, vaikka ne kaikki lähettivät eri taajuuksilla.

<sup>1</sup> Monijärjestelmäiset paikannuskojeet, jotka osaavat käyttää sekä GPS- että GLONASS-satelliitteja, ”näkevät” vielä enemmän satelliitteja, jopa peitteisissä paikoissa, kuten keskellä suurkaupunkia.

<sup>2</sup> Jotkut maat, mukaan lukien Yhdysvallat, harkitsevat Loran-C:n eloon herättämistä nimellä ”eLoran” (*Enhanced Loran*), koska suuritehoisten pitkän aallon radiolähetinten käytön ansiosta se on GPS:ään verrattuna vähemmän häiriöaltis.



KUVA 12.1. Decca-järjestelmä.

Nimi ”hyperbolinen järjestelmä” perustuu siihen, että alus, jolla ei ole lähetysasemien kanssa synkronoitu kello, voi havaita vain kahden aseman lähettämien aaltojen välisen saapumisaikaeron (kuva 12.1).

Kartalla on piirretty kahdella eri värillä *hyperbeleitä*, käyriä joiden pisteiden etäisysero pääasemalta ja eräältä apuasemalta on vakio. Esi-



KUVA 12.2. Decca-vastaanotin. [Wikimedia Commons, Decca Navigator Mk 12.](#)

merkiksi punaisille hyperbeleille pätee

$$s_{\text{pun}} - s_{\text{master}} = \text{vakio}$$

ja vihreille hyperbeleille

$$s_{\text{vihr}} - s_{\text{master}} = \text{vakio}.$$

Jokaisella käyrällä on oma vakio. Valitettavasti tätä *vakiota ei voida*  
<sup>3</sup> *havaita*, koska kaikki kantoaallot ovat samannäköisiä<sup>3</sup>.

Siksi käytetään *inkrementaalista* mittaustapaa. Decca-laitteen jokaisella *lane*- eli *kujalaskurilla* on kaksi viisaria, yksi kujien laskemista varten ja toinen kujan sisäistä osamäärää varten. Viisarien liikkeet on kytketty yhteen kellon viisarien tavoin.

Aluksen on asetettava kujalaskurit oikeille lähtöarvoille tunnetussa paikassa, kuten lähtösatamassa. Sen jälkeen ne seuraavat risteilyn aikana kuja-arvojen kehitystä ajassa: jokaisen vaihe-erotaulun kujaviisari seuraa, montako täyttä kierrosta vaiheviisari on tehnyt — katso kuvat [12.1](#), [12.2](#). Edellytys on, että *radioyhteys tukiasemille säilyy katkeamattomana*<sup>4</sup>.

<sup>5</sup> Millä hetkellä tahansa voi laitteen antaman kahden<sup>5</sup> kujanumeron — kokonaisluvun — ja jäännösvaihe-eron — murtoluvun  $\in [0, 2\pi)$  — avulla lukea oman paikan merikartalta, jolle hyperbelit on piirretty valmiiksi.

Kuten GPS, myös Navy Navigation Satellite System NNSS oli hyperbolisen järjestelmän: hyperbelit muodostettiin satelliitin peräkkäiset paikat avaruudessa, hetkille  $t_0$  ja  $t_0 + 2\text{min}$ , polttopisteinä. Pisteiden etäisyyksien välinen erotus sykleinä saadaan integroimalla vastaanotetun taajuuden dopplersiirtymä tämän aikavälin yli. Yhtälö on

$$s(t_0) - s(t_0 + 2\text{min}) = \frac{c}{f} \int_{t_0}^{t_0 + 2\text{min}} (f' - f) dt,$$

jossa  $f$  on lähetetyn radiosignaalin nimellinen taajuus,  $f'$  vastaanotettu taajuus ja  $c$  valon nopeus. Tämä edellyttää, että lähetyksen nimellistaajuus on tarkka: NNSS-järjestelmä oli myös ensimmäinen satelliittijärjestelmä, joka palveli tarkan ajan jakamista.

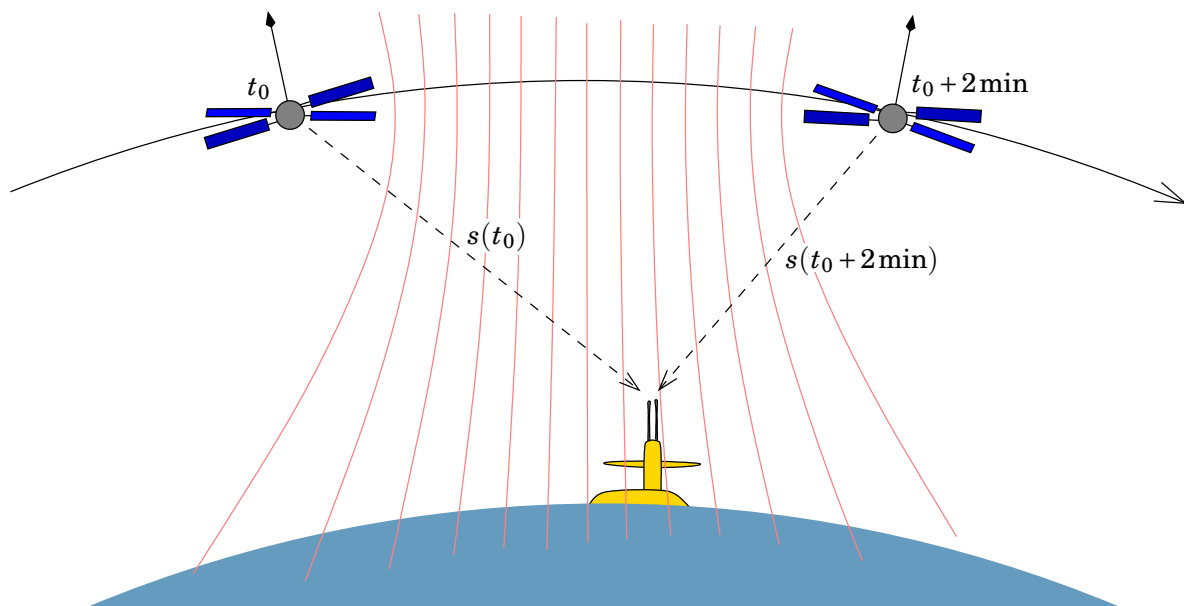
<sup>3</sup> GPS-järjestelmän yhteydessä tätä kutsutaan *ambiguiteettiongelma*ksi.

<sup>4</sup> Tätä kutsutaan *kinemaattiseksi menetelmäksi*. Ei mitata absoluuttista sijaintia, vaan seurataan jatkuvasti, mihin liikutaan tunnetun lähtöpisteen suhteen.

<sup>5</sup> Itse asiassa Decca käytti kolmea väriä: punainen (*red*), vihreä (*green*) ja violetti (*purple*).







KUVA 12.3. NNSS Transit-järjestelmä.

Jokainen pyörähdyshyperboloidi leikkaa Maan pintaa käyrässä. Kun Transit-satelliittien radat ovat polaarisia, käyrät kulkevat suunnilleen länsi-itäsuunnassa. Yksi ylilento riitti paikan määrittämiseen, ja monen sekä pohjoiseen että etelään menevien ratojen käyttö pienimmän neliösumman tasoituksessa<sup>6</sup> paransi leveys- ja pituusasteen määrittämisen tarkkuutta.

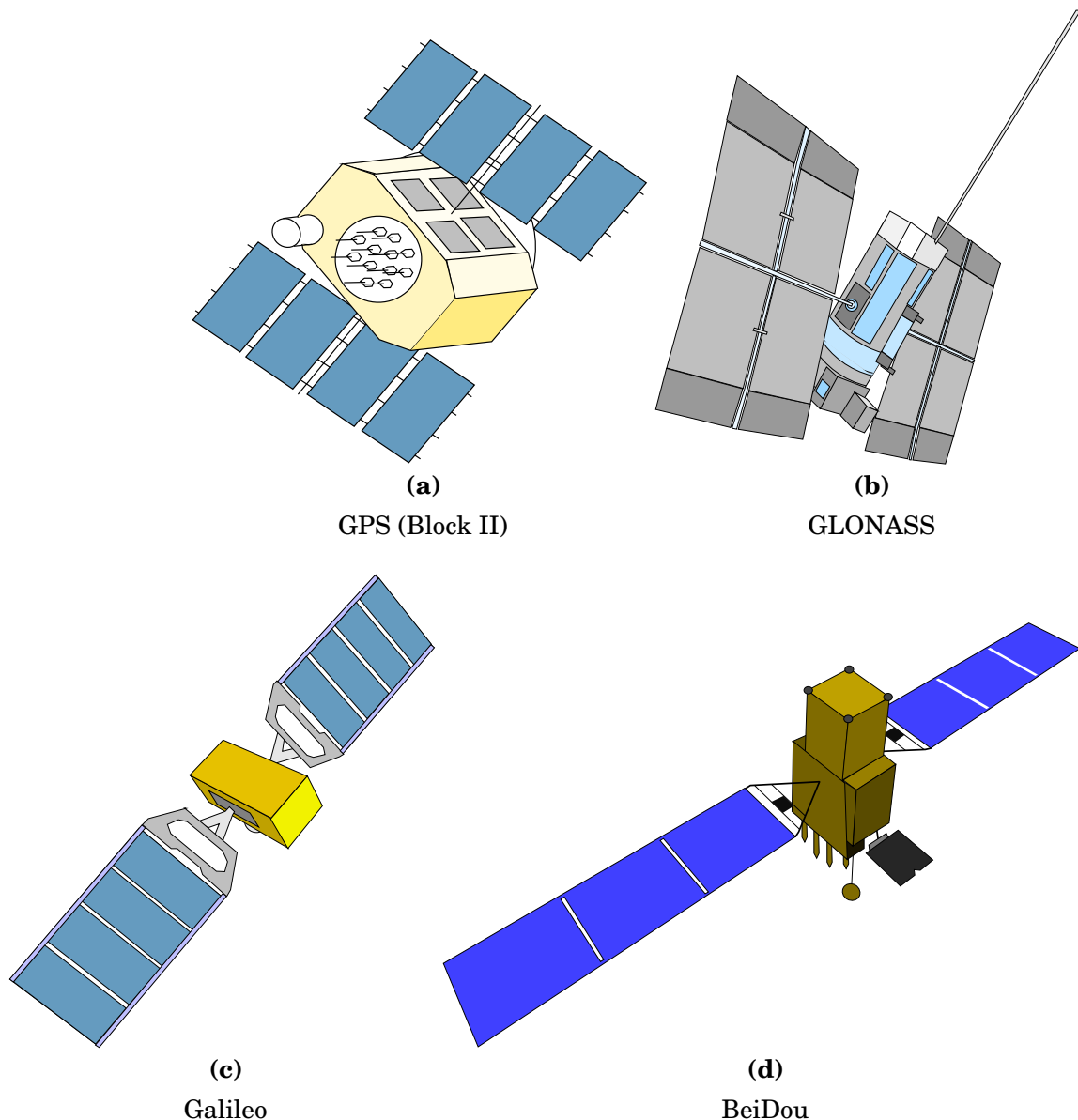
## 12.2 GPS-satelliitti

GPS-paikannusjärjestelmälle on alun perin sotilaallisena järjestelmänä ominaista, että *satelliitit* ovat *aktiivisia* ja *käyttäjät passiivisia*. Siis käyttäjien käyttämät paikannuskojeet eli GPS-vastaanottimet ovat hiljaisia, kun satelliitit sisältävät radiolähettä. GPS-satelliitti on tavallaan lentävä Decca-tukiasema.

GPS-satelliitti on iso, kuvan 12.4a näköinen kapine. Se sisältää muun muassa seuraavat komponentit:

- o Tarkka *atomikello*, joko cesium-, rubidium- tai vetymaserkello, joka synkronoi kaikki signaalit (kantoaallot ja modulaatiot), jotka satelliitti lähettää. Koska kellojen käyttöikä on rajallinen, jokainen

<sup>6</sup>Kun NNSS-järjestelmä rakennettiin, oli vielä vaikea saada riittävästi laskentatehoa, etenkin sukellusveneessä käytettäväksi. Suunniteltiin erikoistietokone, joka painoi neljännessä tonnissa, mutta mahtui pyörästettyine kulmineen ydinsukellusveneen luokan läpi, [Wikipedia](#), [The AN/UYK-1 \(TRW-130\)](#)!



KUVA 12.4. Paikannussatelliitteja.

satelliitti sisältää varakelloja.

- *Radiolähettimet.* Satelliitin antennit osoittavat koko ajan Maahan. Lähetysteho on merkittävä suuntakartiossa, johon maapallo mahtuu kokonaan; kokonaisteho on noin 50 W. Käytetään kahta kanta-aaltotaajuutta, 1575,42 MHz ( $L_1$ ) ja 1227,60 MHz ( $L_2$ ), mikä mahdollistaa ionosfäärin vaikutuksen poiston. Kanta-aaltoihin on moduloitu erilaiset koodit, joita käytetään paikannuksessa, ja koodin, joka sisältää rata- ja muuta informaatiota käyttäjille.
- *Tietoliikennekanavat.* Satelliitti vastaanottaa GPS-ohjauskeskuk-

sen lähettämää dataa. Ohjauskomentojen lisäksi data sisältää tietoja kaikkien GPS-satelliittien radoista, kellokorjauksista, ”terveydestä” jne. Tiedot tallennetaan satelliitin muistiin ja lähetetään eteenpäin käyttäjille kantoaaltoon moduloituna viestinä.

- *Aurinkopaneelit* tuottavat laitteiden tarvitsemaa sähköä. Sähkön määrä on kasvanut 400 W:sta (Block I) lähes kolmeen kilowattiin (Block IIF). Välillä satelliitti menee Maan varjon läpi; tätä varten on akkuja.
- Pienet *rakettimoottorit* asennon ja radan hallintaa varten sekä *ajoainevaranto* (hydratsiini). Ratahäiriöiden vuoksi tarvitaan säännöllisin välein ratakorjauksia.
- Satelliitit ovat kolmiakselistabiloituja: antennit osoittavat Maahan, aurinkopaneelit Aurinkoon. Stabilointiin käytetään *reaktiopyörejä* (”vauhtipyörejä”).

Koska elektroniikka-ala on kehittynyt valtavasti GPS-järjestelmän elinäkana, on satelliittisukupolvia olemassa useita: ”Block I”, ”Block II/IIA”, ”Block IIR”, ”Block IIR-M” ja ”Block IIF”, katso Misra ja Enge (2010). Ensimmäinen Block IIIA-satelliitti laukaistiin vuonna 2018.

Tällä hetkellä toimivat satelliitit ovat kaikki Block II tai sitä kehittyneempiä. Satelliittien massat ovat 845 kg (Block I), 1660 kg (Block II) ja 2269 kg (Block III). Satelliittien suunniteltu elinaika — jota rajoittaa radanhallintaa varten mukana oleva ajoainevaranto, aurinkokennojen ja akkujen heikkenevä teho sekä kellojen ja elektroniikan vikaantuminen Maan ulkoisessa säteilyvyöhykkeessä — on 4,5 (Block I), 7,5 (Block II) tai nykyisin jopa 12–15 vuotta. Satelliitit ovat säännöllisesti ylittäneet suunnitellun elinaikansa.



## 12.3 GPS-lohkot

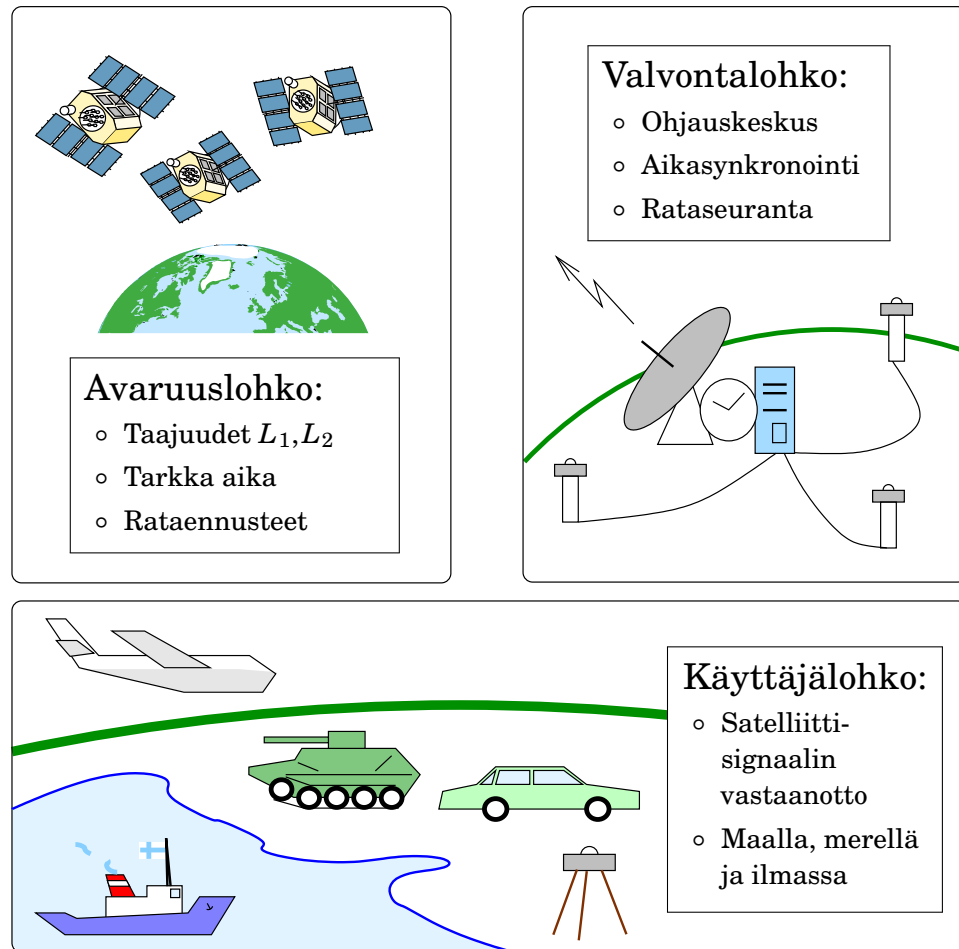
GPS-järjestelmä koostuu kolmesta segmentistä eli *lohkosta*, kuva 12.5:

**Avaruuslohko** Satelliitit itse.

**Valvontalohko** Valvontakeskus, telemetria ja ohjaus, seuranta-asemat, ratalaskenta, aikasynkronointi.

GPS-järjestelmän päävalvonta-asema eli *Master Control Station* on Colorado Springsissä. Rataseuranta- ja ohjausasemia on paritusinaa ympäri maailmaa. Kuten koko GPS-järjestelmä, on myös valvontalohko Yhdysvaltojen puolustusministeriön, tarkemmin ilmavoimien, alaisena.





KUVA 12.5. GPS-järjestelmän kolme segmenttiä eli lohkoa.

Jokainen valvonta- ja seuranta-asema on asianmukaisesti varustettu muun muassa tarkkaa cesiumkelloa käyttävällä GPS-vastaanottimella.

Kerran vuorokaudessa ladataan uudet ratatiedot — ”*broadcast ephemeris*” — ja satelliitin atomikellon korjaustieto satelliitteihin. Satelliitit sisällyttävät nämä rata- ja kellotiedot lähettämäänsä radiosignaaliin, kaikkien käyttäjien käyttöön.

**Käyttäjälohko** Kaikki käyttäjät maalla, merellä ja ilmassa — ja yhä enemmän myös avaruudessa, matalilla kiertoradoilla — vastaanottimiseen.



## 12.4 GPS-konstellaatio

GPS-järjestelmän suunniteltu konstellaatio koostuu 24 satelliitista se-

kä kolmesta aktiivisesta varasatelliitista, ”active spares”, jotka voidaan siirtää tilalle heti, jos aktiivinen satelliitti menee epäkuntoon. Satelliitit ovat kuudessa eri ratatasossa, jokaisessa tasossa on neljä satelliittia. Todellisuudessa toiminnassa on tällä hetkellä yli 30 satelliittia.

Ratojen korkeus Maan pinnasta on 20200 km. Periodi eli kiertoaika maapallon ympäri on  $11^h58^m$ , siis maapallon pyörähdettyä kerran akselinsa ympäri,  $23^h56^m$ , satelliitit ”näkyvät” taas samoissa paikoissa taivaalla kuin edellisenä päivänä. *GPS:n mittausgeometria toistuu joka päivä neljä minuuttia aikaisemmin*, koska kellojemme käyttämän, keski-Aurinkoa seuraavan ajan mukainen vuorokauden pituus on neljä minuuttia pidempi kuin Maan pyörähdysaika.

Ratatason kaltevuus eli *inklinaatio* on<sup>7</sup>  $i = 55^\circ$ . Tästä syystä korkean pohjoisen leveysasteen alueella GPS-konstellation geometria ei ole kovin vahva: satelliitit näkyvät sieltä pääasiassa eteläisellä taivaalla.

Järjestelmä on tällä hetkellä niin kattava, että vähintään neljä satelliittia on ”näkyvissä” (eli ovat korkeuskulman  $10^\circ$  yläpuolella) kaikkialla maailmassa millä hetkellä tahansa. Näkyvien satelliittien määrä on lähes aina, ja usein huomattavasti, tätä suurempi.



## 12.5 GPS-signaalin sisältämät koodit

GPS-satelliittien lähettämiin kahden eri taajuuden kantoaaltoihin moduloidaan kaksi *pseudosatunnaiskoodia*: **C/A-koodi** ja **P-koodi**. Tämän lisäksi on vielä navigointiviesti, joka sisältää ”broadcast ephemeris” ja almanakkatiedot. Myös navigointiviesti moduloidaan kantoaaltoihin<sup>8</sup>. Katso taulukko 12.1.

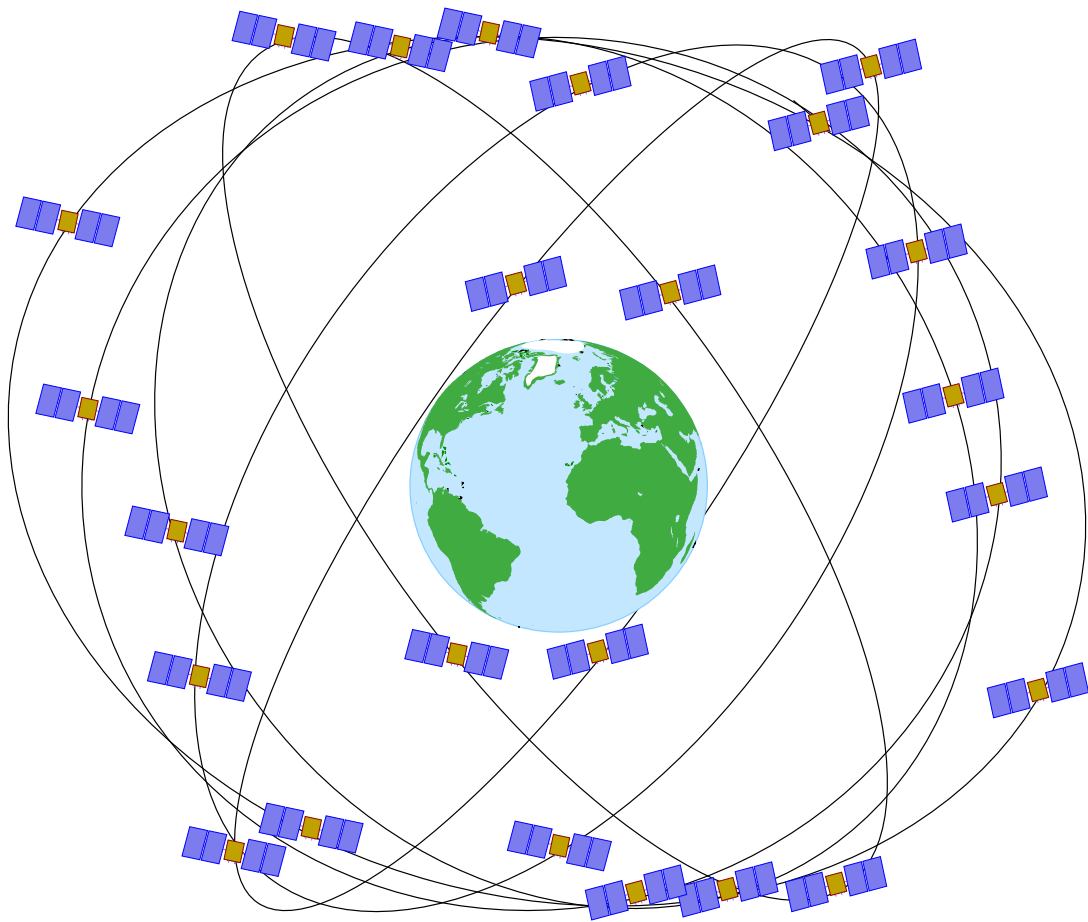
Käytetty modulaatiotyyppi on *vaihemodulaatio*<sup>9</sup>: kantoaallon vaihe kääntyy ”ylösalaisin” eli siirtyy  $180$  asteen eli  $\pi$ :n verran, kun koodin tila vaihtuu nollan (0) ja yhden (1) välillä.

<sup>7</sup>Block I -ryhmän satelliiteilla oli eri inklinaatio  $i = 63^\circ$ . Näistä satelliiteista ei ole enää yhtään toiminnassa.

<sup>8</sup>GPS:n modernisoinnin yhteydessä signaaliin on lisätty  $L_5$ -taajuus, 1176,45 MHz. Se on tarkoitettu *Safety of Life (SoL)* -kriittisten toimintojen, esimerkiksi ilmailun ja pelastuspalvelujen, käyttöön. Tämän lisäksi myös  $L_1$ - ja  $L_2$ -taajuuksiin on lisätty uusia siviili- ja sotilaskodeja.

<sup>9</sup>Muut olemassa olevat modulaatiotyypit ovat *amplitudimodulaatio* — jossa kantoaallon vahvuus eli amplitudi vaihtelee rytmikkäästi siirrettävän signaalin mukaisesti — ja *taajuusmodulaatio* — jossa kantoaallon taajuus vaihtelee. Tavalliset radioasemat käyttävät amplitudimodulaatiota ja ULA-asemat taajuusmodulaatiota.





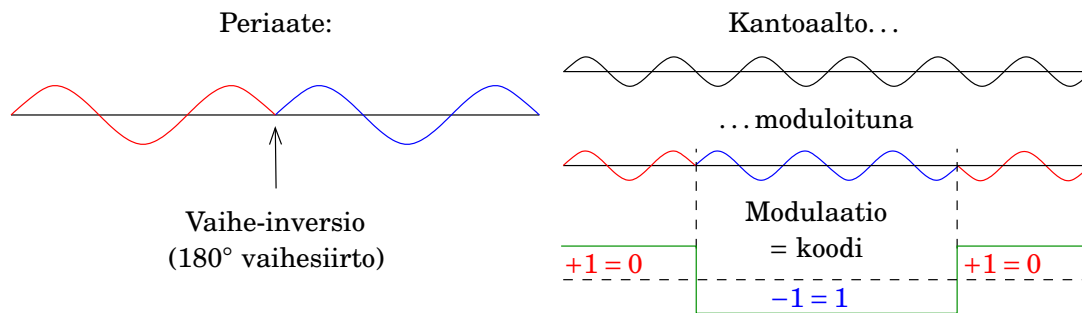
KUVA 12.6. Alkuperäinen GPS-konstellaatio. Radat ja satelliittien paikat ovat realistisia maapallon suhteen.

Modulaation takia GPS-satelliittien lähettämä signaali on kohtalaisen laajakaistainen. Kaistan tehollinen leveys on muutama P-koodin bittitaajuus eli muutama kymmenen MHz.

Kun jo yhden satelliitin lähetyksen vaatima kaistaleveys on niin suuri,

TAULUKKO 12.1. GPS-signaalin sisältämät koodit.

Nimi	Selitys	Modulaatio- taajuus	Toistojakso	Kanto- aalto
C/A- koodi	Coarse / Acquisition, Civilian Access	1,023 Mb/s	1 ms	$L_1$
P-koodi	Precise / Protected	10,23 Mb/s	1 viikko	$L_1, L_2$
P(Y)	P-koodin ja salaisen W-koodin yhdistelmä	Sama		Sama
-	Navigointiviesti	50 bittia/s	12,5 minuuttia	$L_1, L_2$



KUVA 12.7. Vaihemodulaation periaate.

voisi ajatella, että koko konstellation taajuuskaistatarve olisi valtava. Kuitenkaan näin ei ole: *kaikki satelliitit käyttävät samoja kantoaallon taajuuksia*  $L_1$  ja  $L_2$ . Vastaanotin osaa erottaa eri satelliittien signaalit toisistaan niiden erilaisten *pseudosatunnaiskoodien* (C/A-koodi ja P-koodi) avulla. Jokaisella satelliitilla on oma koodi eli ”sormenjälki”, samalla tavalla kuin merinavigoinnissa jokaisella majakalla on oma välähdysskvenssinsä. Teknistä ratkaisua kutsutaan nimellä **CDMA** eli *code division multiple access*, koodijakokanavointi.

*Navigointiviesti* on bittivirta, joka sisältää lähettävän satelliitin tarkkojen ratatietojen lisäksi *kaikkien* satelliittien karkeat ratatiedot eli *almanakan*. Yhden satelliitin signaalin lukitseminen (*lock-on*) riittää kaikkien satelliittien likimääräisten ratatietojen vastaanottamiseen.

Pseudosatunnaiskoodit generoidaan dokumentoidun matemaattisen menetelmän avulla (**Wikipedia**, **Gold code**). Koodit eivät siis ole aidosti satunnaisia: ne voidaan eksaktisti rekonstruoida samaa menetelmää käyttäen. Ne käyttäytyvät kuitenkin tilastollisesti aidosti satunnaisen bittisekvenssin tavoin.

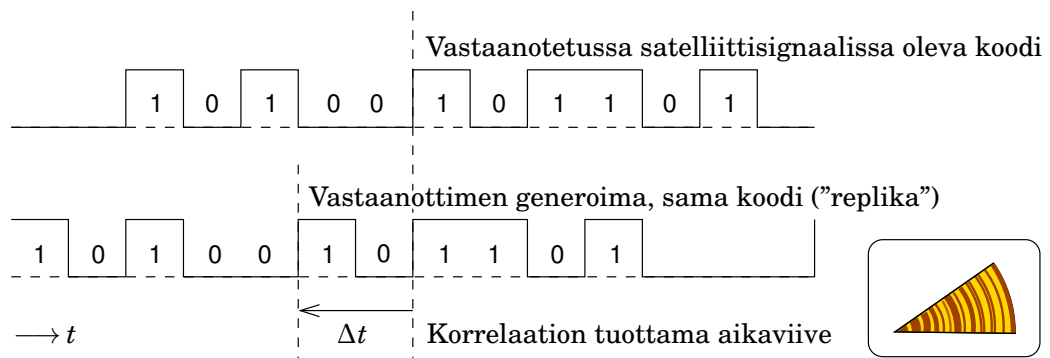


### 12.5.1 GPS:n ”vuosirenkaat”

Maan pinnalla oleva GPS-vastaanottimen antenni vastaanottaa signaaleja *kaikista* havaintohetkellä taivaalla olevista satelliiteista. Koko tämä ”soppa” kulkee kaapelia pitkin vastaanottimen elektroniikkaan<sup>10</sup>. Tässä<sup>10</sup> suoritetaan ensiksi kaksi tehtävää:

- 1) Erotetaan eri satelliittien signaalit toisistaan jokaisen satelliitin yksilöllisen pseudosatunnaiskoodin eli ”sormenjäljen”<sup>11</sup> perusteella.<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Antennin esivahvistimessa analogista signaalia käsitellään siten, että sen kantoaallon taajuutta alennetaan huomattavasti modulaatioihin koskematta. Tämä estää vahvistetun signaalin ylikuulumisen takaisin antenniin ja helpottaa jatkokäsittelyä, kuten signaalin digitointi A-D (analogi-digitaali) -muuntimen avulla.



KUVA 12.8. Korrelaatiomenetelmä GPS-signaalin kulkuajan  $\Delta t$  määrittämiseksi.

2) Määritetään jokaisen satelliitin signaalin *kulku aika* satelliitista vastaanottimelle.

Molemmat tehtävät suorittaa *korrelaatiomenetelmä*, jolla etsitään satelliitista vastaanotetun signaalin ja vastaanottimen generoiman, saman-

TAULU 12.2. Miten dendrokronologia toimii?

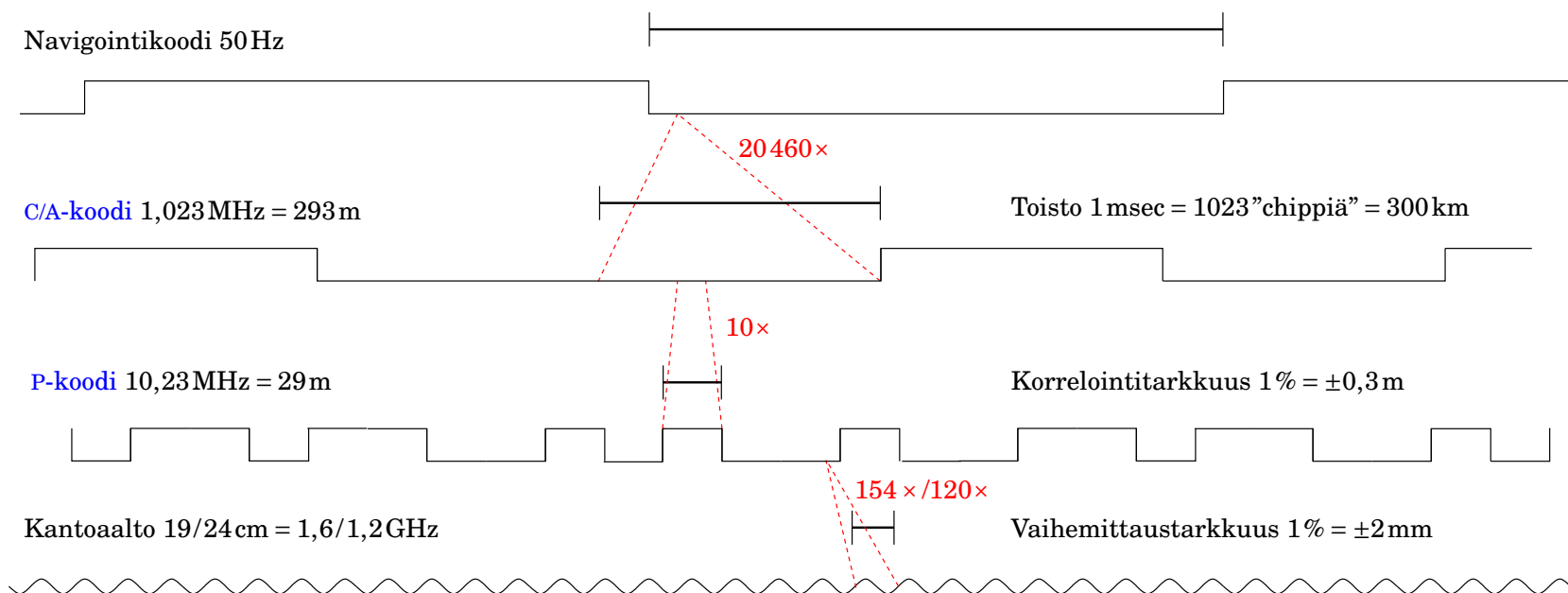
Menetelmä toimii seuraavasti: laboratoriossa on puun vuosilustojen eli vuosirenkaiden *vertaussekvenssi*, joka on rakennettu osittain päällekkäisten puusekvenssien avulla. Sateiset vuodet näkyvät paksuina, kuivat vuodet kapeina renkaina<sup>a</sup>. Vertaussekvenssissä tunnetaan jokaisen renkaan oikea, absoluuttinen vuosiluku.

Vertaussekvenssin rakentaminen on haastava. Sen jälkeen kuitenkin voidaan minkä tahansa puuesineen ikä määrittää vertaamalla sen vuosirenkaita vertaussekvenssiin, kunnes löytyy kohta, jossa ne täsmäyvät (*korreloivat*). Menetelmä toimii, koska kosteiden ja kuivien vuosien vaihtelu on pitkälti satunnainen. Vastaavanlaiset menetelmät ovat käytössä monella tieteenalalla: jääkairausytimien tai geologisten kerrostumien iänmäärittäminen ja korrelointi, merenpohjan magnetisointijuovien korrelointi ja niin edelleen.

<sup>a</sup>Kuitenkin puurajalla vuoristossa tai arktisella alueella renkaiden paksuuden määrittää lähinnä *lämpötila*. Tätä seikkaa on käytetty hyväksi paleolämpötila-aikasarjojen rekonstruoinniseksi. Sanotaan, että vuosirenkaiden paksuus on lämpötilan *proksi*.

<sup>11</sup>Eri satelliittien käyttämät pseudosatunnaiskoodit on suunniteltu huolellisesti keskenään *ortogonaalisiksi*: toisen satelliitin oikea signaali korreloi mahdollisimman heikosti vastaanottimessa generoidun toisen satelliitin replikasignaalin kanssa, vaikka aikasiirtymä olisi oikea.





KUVA 12.9. GPS-signaalin eri taajuudet ja teholliset aallonpituudet.

muotoisen signaalin (”replikan”) välistä aikasiirtymää  $\Delta t$ , joka tekisi niistä identtiset. Replikasekvenssi siirretään ajassa vastaanotetun sekvenssin suhteen, kunnes syntyy vahva *korrelaatio*, kuvion samanlaisuus eli vastaavuus. Saatu aikaero on olennaisesti GPS:n havaintosuure.

Käytetyn korrelaatiomenetelmän hyvä vertauskuva on vuosilustojen eli -renkaiden käyttö puisten esineiden iänmäärittämisessä, *dendrokronologiassa*, joka jo selostettiin lyhyesti kuvassa 7.7 ja josta lisää tekstitaulussa 12.2.

Tavallaan myös vastaanotetun GPS-koodin vertaaminen vastaanottimen generoimaan replikakoodiin on ”iänmäärittäminen”: määritetään satelliittista Maahan lähteneen signaalin ”ikä”...

Kun korrelaatiolaskenta on antanut kulkuajan  $\Delta t = t_{\text{vast}} - t_{\text{läh}}$ , antaa sen kertominen signaalin kulkunopeudella  $c$  satelliitin *pseudoetäisyyden*, GPS-mittauksen perushavaintosuureen. Sitä kutsutaan *pseudoetäisyydeksi*, koska se sisältää muutakin kuin geometrisen etäisyyden, muun muassa *kellopoikkeamat*. Palaamme tähän hetken kuluttua.



### 12.5.2 C/A-koodi ja P-koodi

Koska yhden millisekunnin pituinen C/A-koodi koostuu vain 1023 bitistä, on tutkittava vain 1023 vaihtoehtoista siirtymäarvoa  $\Delta t$ . Tämä käy hyvin nopeasti. Jokaisella satelliitilla on oma ”henkilökohtainen” C/A-koodinsa, siksi on aluksi tehtävä  $N \times 1023$  eri vertailua, jossa  $N$  on satelliittien lukumäärä.

C/A-koodin avulla saadaan pseudoetäisyys määritettyä vain modulo 300 kilometriä, koska koodi toistuu joka millisekunti, aika jossa signaali kulkee 300 kilometriä. Katso kuva 12.9. Tämä riittää, jos vastaanottimen alustava paikka on jo sillä tarkkuudella tiedossa. C/A-koodin modulaatiotila vaihtuu, jos vaihtuu, yhden mikrosekunnin välein (”chip rate”), aika jossa radiosignaali kulkee 293 metriä. C/A-koodin antama *mittaus-tarkkuus* on tätä parempi: jos vastaanottimen elektroniikka osaa mitata modulaation vaihetta tarkkuudella 1% kokonaisesta syklistä, on mittauksen tarkkuus  $\pm 3$  m.

Paremmen tarkkuuden antaa P-koodi. Sekin on pseudosatunnaiskoodi, mutta sen pituus on peräti 267 päivää. Jokainen satelliitti käyttää tästä pitkästä jaksosta omaa, satelliittikohtaista, viikon mittaista osajaksosaa. Vastaanottimen on tässäkin tapauksessa osattava generoida koodin ”replika”. Koska C/A-koodin avulla suure  $\Delta t$  on jo saatu mikrosekunnin tarkkuudella, on tutkittava vain tätä tarkemmat desimaalit.



**P-koodin** ”*chip rate*” eli bittitaajuus on kymmenen kertaa nopeampi kuin **C/A-koodin**,  $10,23 \text{ Mb/s}$ , jolloin vastaava kulkumatka on  $29 \text{ m}$ <sup>12</sup>. Olettaen taas modulaation vaihemittauksen tarkkuudeksi 1 %, on pseudotäisyyshavainnon vastaava tarkkuus  $\pm 30 \text{ cm}$ . 12

**P-koodi** on salattu siviilikäyttäjiltä. Salaus on toteutettu moduloimalla **P-koodin** päälle **W-koodi**, jota generoivaa algoritmia ei ole julkaistu.

Kantaaaltotaajuuteen  $L_1$  on siis moduloituna sekä **P-koodi** että **C/A-koodi**. Koodien erottaminen toisistaan on tehty mahdolliseksi käyttämällä *vaihekvadratuuria*: kun **P-koodin** bitit moduloidaan vaihesiirroilla 0 (bittiarvo 0) ja  $\pi$  (bittiarvo 1), on **C/A-koodi** vastaavasti moduloituna vaihesiirroilla  $+\frac{1}{2}\pi$  ja  $-\frac{1}{2}\pi$ , eli  $+90^\circ$  ja  $-90^\circ$ . Puhutaan ”suora vaihe” (*in-phase*) ja ”kvadratuuri” -modulaatioista.

Navigointiviestin vaihekulmat ovat samoja kuin **C/A-koodin** vastaavat. Tämä ei ole ongelma, koska niiden taajuudet ovat niin erilaiset: yhteen navigointiviestin bittiin, pituus 20 ms, mahtuu kaksikymmentä koko **C/A-koodin** toistoa! Katso kuva 12.9.



## 12.6 GPS-vastaanottimia

Tarkkaan geodeettiseen työhön tarkoitetut vastaanottimet ovat aina *kaksitaajuukskojeita*, jotka osaavat mitata **GPS-signaalin kantoaallon vaihetta**. Toisin kuin huokeilla käsikäyttöisillä laitteilla on antenni yleensä erillinen ja se kytketään koaksiaalikaapelin avulla vastaanottimeen. Satelliittien heikko signaali vahvistetaan jo antennin sisällä *esivahvistimen*<sup>13</sup> avulla. 13

Antenni voidaan kiinnittää standardin mukaiseen pakkokeskistyslaitteeseen geodeettisella jalustalla. Tosi aikaisessa kartoitusmittauksessa käytetään pitkää *mittasauvaa*, jonka päähän antenni ruuvataan kiinni ja johon kiinnitetään **GPS-vastaanotin** (jos erillinen) lisälaitteineen. Antennin alapinnassa on samanlainen standardi  $\frac{5}{8}$  tuuman reikä ruu-

<sup>12</sup>Tämä on **P-koodin** ”tehollinen aallonpituus”. Se lasketaan seuraavasti:

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{c}{f},$$

jossa  $f$  on ”chip rate”, taajuuden kaltainen suure, yksikkönä  $\text{s}^{-1}$  eli Hz, ja  $c$  on valon nopeus. Siis jos  $c = 300\,000\,000 \text{ m/s}$  ja  $f = 10\,230\,000 \text{ s}^{-1}$ , seuraa  $\lambda_{\text{eff}} = 29,3 \text{ m}$ .

<sup>13</sup>Esivahvistimen tarvitsema tasavirran syöttö tulee vastaanottimelta myös koaksiaalikaapelin kautta. Tämä saattaa mutkistaa tai estää erimerkkisten vastaanottimien ja antennien yhteiskäyttöä.





KUVA 12.10. Ashtech Z-12:n ohjauspaneeli.

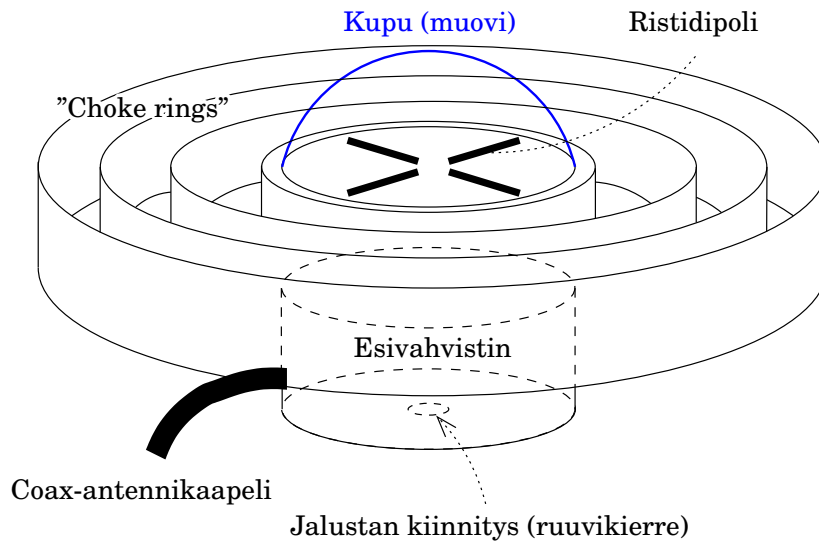
vikierteineen (11 kierettä tuumassa) kuin useimmissa geodeettisissa kojeissa.

Jokaiseen vastaanotintyyppiin kuuluu oma antennityyppi; eri laite-merkkien antennit ja vastaanottimet eivät yleensä ole keskenään sähköisesti yhteensopivia. Tarkkaan geodeettiseen työhön tarkoitettu *choke-ring* -antennimalli (kuva 12.11) on kuitenkin saatavilla monelta eri laitevalmistajalta. Vaimennusrenkaat lieventävät radioaaltojen heijastusongelmaa Maan tai muiden esineiden pinnalta, *monitietä* eli *multipath*.

Antennin *sähköinen keskus*, piste, jossa geometrisessa tulkinnessa radioaallot näennäisesti vastaanotetaan, ei ole sama kuin antennin virallinen vertauspiste (ARP, *antenna reference point*). Se ei ole edes yksiselitteisesti määritelty, vaan riippuu jonkin verran käytetystä havaintojen rajakorkeuskulmasta, katso kuva 12.12. Vertauskuvana kelpaa veden alla olevan kalan näennäinen paikka, joka sekin riippuu katselukulmasta. Puhutaan *antennin vaihekeskipisteen vaihtelusta*, katso Poutanen (2017) osio 7.4 tai Hofmann-Wellenhof ym. (2001) osio 6.5.

Kun suoritetaan mittauksia pienellä alueella käyttäen vain yhtä ja samaa antennityyppiä, häviää vaihekeskipisteen vaihtelun vaikutus lopputuloksesta ja eri pisteiden välissä lasketuista sijaintierovektoreista. Kuitenkin jos sekoitetaan eri antennityypit tai mitataan laajoja verkkoja — satoja tai tuhansia kilometrejä läpimitaltaan — on syytä *kalibroida* antennien vaiheen kulkuviiveen kuviot, jotka ovat sekä korkeuskulman  $\eta$  että atsimuuttisuunnan  $\alpha$  kohtalaisen mutkikkaita funktioita. Kali-



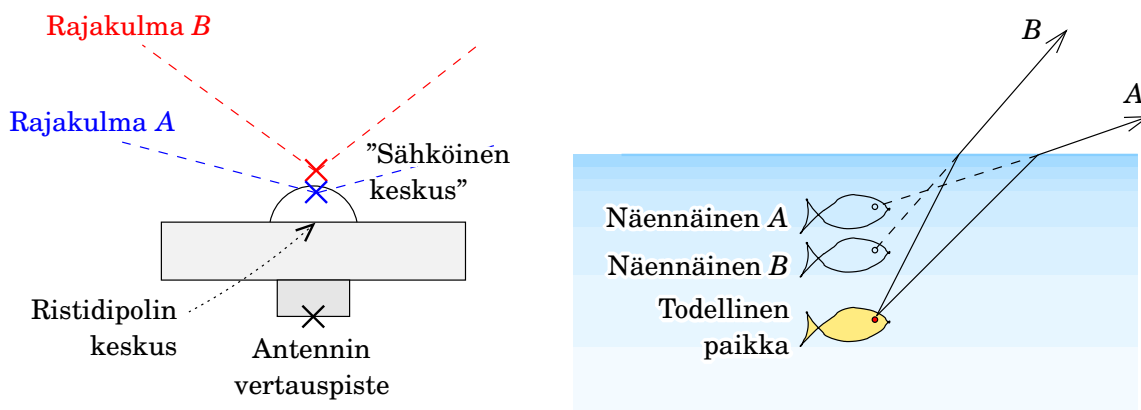


KUVA 12.11. *Choke-ring* -GPS-antenni tarkkaan geodeettiseen työhön. Laittevalmistajien toimittamat antennit ovat tätä yksinkertaisempia ja ennen kaikkea pienempiä ja kevyempiä.

brointi, jossa siis määritetään tämä vaiheensiirtokuvio  $\Delta\phi(\eta, \alpha)$ , voidaan suorittaa joko laboratoriomittauksena keinotekoisien GPS-signaalien avulla tai kenttäkalibrointina, jossa vertaillaan aina kahta erityyppistä antennia. Kenttäkalibrointi on siis aina *relatiivinen*, suhteessa sovittuun vertausantennityyppiin.

Erityisen tarkkoissa geodynaamisissa muodonmuutosmittauksissa on nykyisin tapana kalibroida, ei vain antennityyppejä, vaan yksittäisiä antenniyksilöitä.

GPS-satelliittien lähettämät radioaallot ovat *ympyräpolarisoituja* oikeaan eli kulkusuunnassa myötäpäivään. Heijastuksen jälkeen polari-



KUVA 12.12. Antennin "sähköisen keskuksen" paikka ei ole itsestään selvä asia!



TAULU 12.3. RINEX-tiedoston alku. Laite kerää viisi havaintotyyppiä: kantaallon vaihekulmahavaintoja ja P-koodihavaintoja molemmilla taajuuksilla  $L_1$  ja  $L_2$ , sekä C/A-koodin havaintoja taajuudella  $L_1$ . Havainnot tallennetaan 30 sekunnin välein. Satelliitteja on ensimmäisellä epookilla, 1. tammikuuta 2000 klo 0 : 00 : 00, yksitoista, ja toisellakin epookilla, klo 0 : 00 : 30, yksitoista. Ne ovat kaikki GPS-satelliitteja (G). Havaintoasema on DGAR, Diego Garcia Intian valtamerellä (Vine, 2011). →

saatiosuunta vaihtuu vastakkaiseksi eli vasempaan. Antenni — kuvassa 12.11 esimerkkinä ristidipoli — on rakennettu niin, että se välittää vain oikeaan polarisoitua signaalia eteenpäin vastaanottimelle. Näin heijastusten haitta minimoidaan.

Teknologian kehitys menee suuremman integroinnin suuntaan. Nykyiset geodeettisetkin GPS-paikannuskojeet ovat niin pieniä, että ne integroidaan antennin kanssa. Koska kojeet ovat hyvin autonomisia, niissä ei ole enää edes kunnan näyttöruutua.

Toinen kehityssuunta on ohjelmistopohjaisten vastaanottimien eteenmarssi: nykyiset henkilökohtaiset tietokoneet alkavat olla riittävän tehokkaita suorittamaan digitaalisen käsittelytyön, joka nykyvastaanottimissa tehdään rautatasolla. Silloin tarvitaan yleis-PC:n lisäksi vain ”tyhmä” analoginen radiolaite antenneineen (Lázaro, 2012).



## 12.7 GPS:n havaintosuureita

Geodeettinen GPS-vastaanotin tallentaa tekemänsä havainnot muistiinsa pitkänä, monta lukua sisältävänä taulukkona. Taulukossa olevat luvut edustavat etäisyyksiä vastaanottimen ja havaittujen satelliittien välillä. On helppo ymmärtää, miksi lukujen määrä kasvaa niin suureksi: jos esimerkiksi mittausten välinen aika on 30 sekuntia, havaintopaikan taivaalla näkyy 5 satelliittia ja yksitaajuusvastaanottimella havaitaan sekä C/A-koodi että P-koodi, on jo minuutissa saatujen havaintoarvojen määrä  $(60/30) \cdot 5 \cdot 2 = 20$ . Tunnissa tämä merkitsee 1200 havaintoarvoa. Jos ne tallennetaan muistiin tavallisina kaksoistarkkuuden reaalityyppinä<sup>14</sup> (kahdeksan tavua per luku), tarvitaan tallennustilaa 9,4 kilotavua. Vuorokaudessa tallennustilan tarve on jo 225 kB.

Usein käytetty formaatti kansainvälisessä tieteellisessä GNSS-datan-

<sup>14</sup>Tietokoneen ”reaalityyppi” ovat itse asiassa rationaalilukuja...

```

2.00      OBSERVATION DATA      G (GPS)      RINEX VERSION / TYPE
teqc 19990ct8      gpsops      20000103 21:13:37UTCPGM / RUN BY / DATE
OSF1 V4.0 564|Alpha|cc 4.4.18.4|+=|=|      COMMENT
DGAR      MARKER NAME
30802M001      MARKER NUMBER
GNOG      JPL      OBSERVER / AGENCY
T341U      AOA SNR-8000 ACT      3.3.32.3      REC # / TYPE / VERS
250      AOAD/M_T      ANT # / TYPE
1916269.8405 6029977.3167 -801720.2273      APPROX POSITION XYZ
0.0814      0.0000      0.0000      ANTENNA: DELTA H/E/N
1      1      WAVELENGTH FACT L1/2
5      L1      L2      P1      P2      C1      # / TYPES OF OBSERV
30.0000      INTERVAL
This data is provided as a public service by NASA/JPL.      COMMENT
No warranty is expressed or implied regarding suitability      COMMENT
for use. For further information, contact:      COMMENT
Dave Stowers, NASA/JPL m/s 238-600      COMMENT
4800 Oak Grove Drive, Pasadena CA 91109 USA      COMMENT
2000      1      1      0      0      0.0000000      GPS      TIME OF FIRST OBS
END OF HEADER
00 1 1 0 0 0.0000000 0 11G21G23G17G30G 1G31G29G22G15G25G 3
-6078127.503 4 -4736200.435 4 23397694.178 23397698.378 23397695.030
-2556364.753 4 -1991958.142 4 24025055.814 24025059.840 24025056.373
-8073501.747 5 -6291024.522 5 22565280.025 22565283.337 22565280.587
18247234.140 4 14218628.480 4 24610505.696 24610508.842 24610505.143
-1299479.831 4 -1012581.476 4 24824108.761 24824113.289 24824108.748
-5233446.124 4 -4077998.775 4 24175634.461 24175638.438 24175635.537
16878293.604 4 13151917.927 4 24427189.279 24427193.024 24427188.034
-13489828.171 5 -10511530.918 5 22792735.726 22792739.295 22792736.451
-4494062.929 4 -3501865.147 4 23961699.555 23961704.148 23961699.834
-21099958.763 9 -16441519.960 9 20331187.861 20331190.408 20331187.808
-15215098.740 5 -11855903.290 5 22202394.742 22202398.143 22202394.948
00 1 1 0 0 30.0000000 0 11G21G23G17G30G 1G31G29G22G15G25G 3
-6132427.986 4 -4778512.477 4 23387361.455 23387365.218 23387361.703
-2586441.342 4 -2015394.448 4 24019332.425 24019336.115 24019332.872
-7990741.587 5 -6226536.097 5 22581028.707 22581032.399 22581029.091
18274808.415 4 14240114.880 4 24615752.673 24615756.082 24615752.310
-1317133.094 4 -1026337.267 4 24820749.907 24820754.243 24820749.907
-5259685.471 4 -4098444.960 4 24170641.011 24170645.465 24170641.809
16938081.982 4 13198506.304 4 24438566.644 24438570.267 24438567.293
-13548930.874 5 -10557584.968 5 22781488.710 22781492.153 22781489.545
-4600217.585 4 -3584583.008 4 23941499.061 23941503.148 23941500.039
-21083529.873 9 -16428718.216 9 20334314.137 20334316.731 20334314.115
-15210926.086 5 -11852651.873 5 22203188.835 22203192.175 22203189.231

```

vaihdossa on [RINEX](#), Receiver-Independent EXchange format, [Gurtner ja Estey \(2007\)](#). Tämä on ihmisille lukukelpoinen tekstiformaatti, jolla useimpien geodeettisten vastaanotintyyppien havaintoaineistot voidaan siirtää, lukea ja käsitellä laitevalmistajasta riippumattomalla tavalla. Katso esimerkki taulussa [12.3](#) asemasta Diego Garcia ([Vine, 2011](#)) Intian valtamerellä.



### 12.7.1 Pseudoetäisyydet havaintosuureina

Miksi puhutaan *pseudoetäisyyksistä*? Etuliite ”pseudo” tulee siitä, että havaintosuureen arvoon vaikuttaa, satelliitin ja vastaanottimen välisen geometrisen etäisyyden lisäksi, satelliitin ja vastaanottimen kellovirheet eli *-poikkeamat*  $\Delta t$  ja  $\Delta T$  sekä ionosfäärin ja troposfäärin väliaineiden<sup>15</sup> aiheuttamat kulku- eli propagaatioviiveet. Näin saadaan *pseudoetäisyyden havaintoyhtälöksi*

$$p = \rho + c(\Delta T - \Delta t) + d_{\text{ion}} + d_{\text{trop}}, \quad (12.1)$$

jossa

$p$  pseudoetäisyys (engl. *pseudo-range*)

$\rho$  luonnollinen (geometrinen) etäisyys. Pythagoraan mukaan

$$\rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2},$$

jossa

$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$  satelliitin paikka avaruudessa

$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$  vastaanottimen paikka avaruudessa

$c$  valon nopeus tyhjiössä

$\Delta T$  vastaanottimen kellon poikkeama GPS-ajasta (kellokorjaus =  $-\Delta T$ )

$\Delta t$  satelliitin kellon poikkeama GPS-ajasta

$d_{\text{ion}}$  ”ionosfäärin”, siis ionisoidun ilmakehän, aiheuttama kulku- eli propagaatioviive

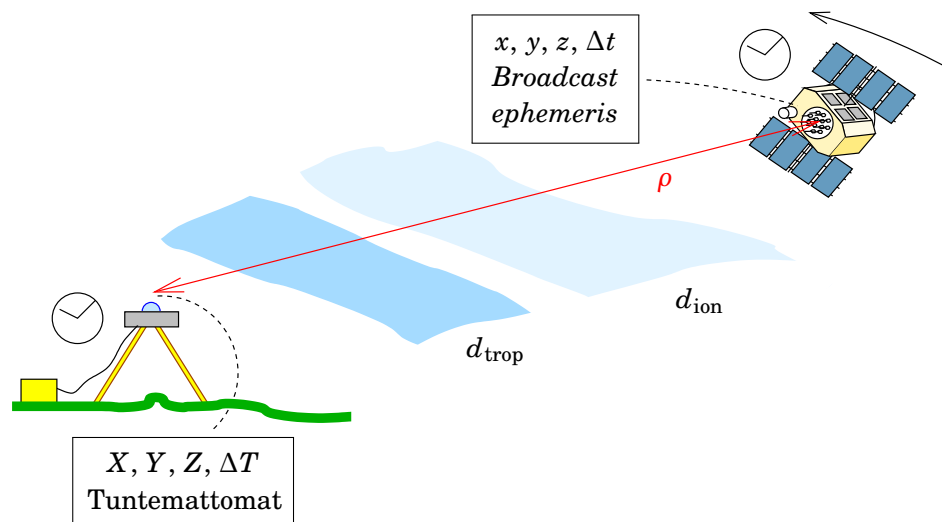
$d_{\text{trop}}$  ”troposfäärin”, siis neutraalin ilmakehän, aiheuttama viive.

Satelliitin kellon poikkeama  $\Delta t$  sisältyy satelliittien lähettämään *broadcast ephemeris* -tietoon. Vastaanottimen kellon poikkeama  $\Delta T$

<sup>15</sup>Tarkemmin: toisaalta vapaiden elektronien ja toisaalta neutraalien molekyylien vaikutukset radioaaltojen kulkuun. Näin ollen myös stratosfääri aiheuttaa ”troposfääriä”.  
vettä”.







KUVA 12.13. Pseudoetäisyyshavainto.

sen sijaan jää tuntemattomaksi, ja se joudutaan estimoimaan yhtenä tuntemattomana yhdessä vastaanottimen koordinaattien kanssa. Näin ollen jokaista GPS-vastaanotinta kohtaan on *neljä* tuntematonta: kolme koordinaattia  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ja kellopoikkeama  $\Delta T$  — jos unohdetaan hetkeksi ilmakehän tuntemattomat  $d_{\text{ion}}$  ja  $d_{\text{trop}}$ . Neljän tuntemattoman määrittämiseen riittää neljä pseudoetäisyshavaintoa, *neljään eri satelliittiin*. Katso kuva 12.13.



### 12.7.2 Kantoaallon vaihekulma havaintosuureena

**C/A-koodin** ”chip rate”, lähetettyjen bittien lukumäärä sekunnissa eli koodin ”taajuus”, on 1,023 MHz, mikä vastaa ”aallonpituuteen” 293 m, kun **P-koodin** vastaava luku, 10,23 MHz, vastaa aallonpituuteen 29,3 m. Jos käytetään modulaation sijasta itse *kantoaaltoa*, on relevantti aallonpituus 19 cm ( $L_1$ ) tai 24,4 cm ( $L_2$ ), pari suuruusluokkaa lyhyempi matka. Tähän perustuu *geodeettinen GPS-paikanmääritys*, jossa kaksitaajuus-vastaanottimet havaitsevat GPS-satelliittien lähettämien kantoaaltojen vaiheet. Elektroninen vaihemittaus on suhteellisen helppoa ja tarkkaa, mutta kun markkinat ovat pieniä ja erikoistuneita, ovat laitteiden hinnat täysin muiden geodeettisten mittauskojeiden hintojen tasolla, vähintään tuhansia euroja.

Kuten myös elektronisten etäisyysmittareiden tapauksessa, liittyy vaihemittaukseen aina *ambiguiteettiongelma*. Vaiheen *mittausarvot*  $\phi$  voidaan ilmaista arvoina yhden syklin sisällä  $[0, 2\pi)$ , ja vastaava pseudo-etäisyys satelliitin ja vastaanottimen välillä saadaan määritetyksi vain





TAULUKKO 12.4. GPS-kantaaaltojen ominaisuudet. ”Kerroin” tarkoittaa perustaajuuden (10,23 MHz:n) monikko.

Kantaaalto	Taajuus (MHz)	Aallonpituus (cm)	Kerroin
$L_1$	1575,42	19,0	$154\times$
$L_2$	1227,60	24,4	$120\times$

”kokonaislukumäärä aallonpituuksia vailla”. Jos tietty pseudoetäisyysarvo  $P$  on yhteensopiva aallonpituudella  $\lambda$  tehdyn mittauksen kanssa, niin ovat myös pseudoetäisyyden arvot  $P + \lambda$ ,  $P - \lambda$ ,  $P + 2\lambda$ ,  $P - 2\lambda$ , ...

<sup>16</sup> *Kantaaallon vaiheen havaintoyhtälö* on, vaihe-erokulmana<sup>16</sup>, yksikkö radiaani

$$\bar{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \phi + 2\pi N = 2\pi \frac{\rho + c(\Delta T - \Delta t) + D_{\text{ion}} + D_{\text{trop}}}{\lambda}$$

tai matkana, yksikkö metri

$$\bar{P} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \frac{\bar{\phi}}{2\pi} = \lambda \left( \frac{\phi}{2\pi} + N \right) = \rho + c(\Delta T - \Delta t) + D_{\text{ion}} + D_{\text{trop}}. \quad (12.2)$$

Havaintoyhtälön vasen puoli on joko vaihekulma  $\bar{\phi} = \phi + 2\pi N$  tai vastaa pseudoetäisyys  $\bar{P} \stackrel{\text{def}}{=} P + \lambda N$ , katso kuva 12.14. Molemmat sisältävät oikean lukumäärän  $N$  kokonaisa aallonpituuksia satelliitin ja vastaanottimen välisellä matkalla. Toisaalta symboli  $\phi$  ilman yläviivaa merkitsee ”raakaa” vaihe-eromittausta. Usein oletetaan  $\phi \in [0, 2\pi)$ , ainakin hetkellä, jolloin vastaanotin alkaa seurata signaalia.

Muut yhtälössä esiintyvät symbolit:

$D_{\text{ion}}$  ionosfäärin aiheuttama kantaaallon kulku- eli propagaatioviive (joka on itse asiassa negatiivinen,  $D_{\text{ion}} = -d_{\text{ion}}$ )

$D_{\text{trop}}$  troposfäärin aiheuttama viive,  $D_{\text{trop}} = d_{\text{trop}}$

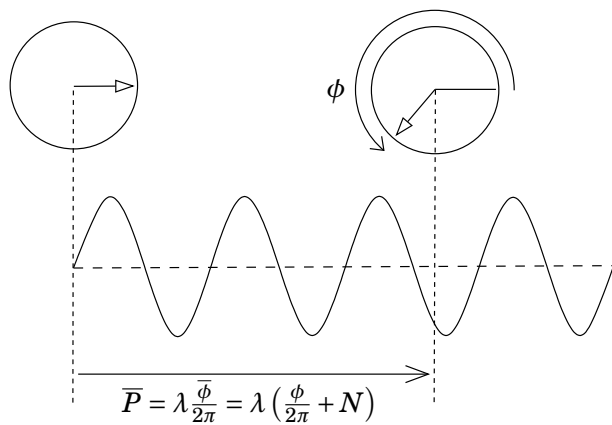
$\lambda$  vastaanotetun kantaaallon aallonpituus taulukon 12.4 mukaan, mukaanlukien dopplersiirtymä

$N$  kokonaislukutuntematon eli *ambiguiteetti*.

Muuttujat  $\rho \left( = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} \right)$ ,  $\Delta t$  ja  $\Delta T$  ovat samoja kuin koodipseudoetäisyyksien tapauksessa, katso yhtälö 12.1. Taas on neljä reaaliarvoista geodeettista tuntematonta:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ja  $\Delta T$ . Mutta

<sup>16</sup> Mittasuure on itse asiassa vastaanotetun radioaallon vaihe vähennettynä vastaanottimen oman vertausoskillaattorin vaiheesta, edustaen *viivettä* matkalla satelliitista vastaanottoimeen. Erotuksessa vastaanotetun aallon vaihekulma on mukana negatiivisella etumerkillä.

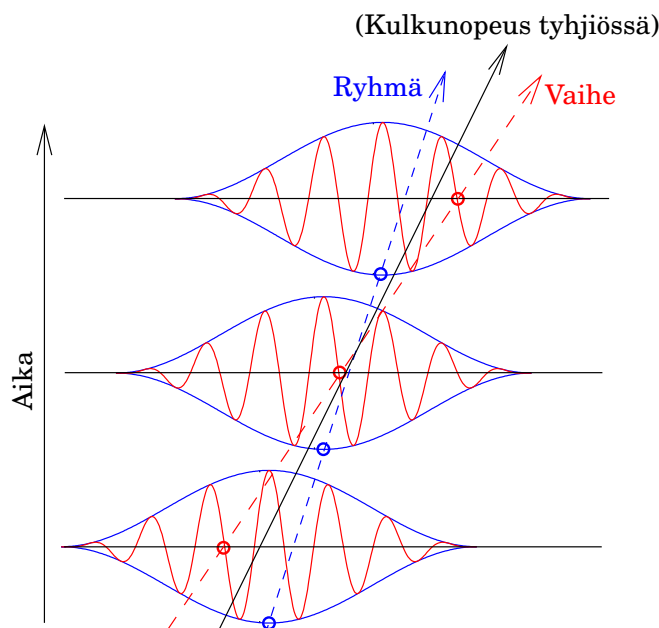




KUVA 12.14. GPS-signaalin kantoaallon vaiheen mittausta. Mitattu vaiheerokulma on  $\phi$ , aluksi  $\phi \in [0, 2\pi)$ , metrinen pseudoetäisyys, mukaan lukien kokonaiset aallonpituudet, on  $\bar{P}$ , ja kokonaislukutuntematon on  $N$ , tässä esimerkissä  $N = 2$ .

nyt on määritettävänä myös kokonaislukuarvo  $N$ , yksi jokaiselle havainnolle, geodeettisten tuntemattomien lisäksi. Tämä saattaa tuntua mahdottomalta, mutta tähän löytyy keinoja, katso osio 13.3.

Yhtälöissä 12.1 ja 12.2 olemme käyttäneet eri symboleja kantoaallon vaiheen ionosfääri- ja troposfääri viiveille kuin vastaaville koodimittauk-



KUVA 12.15. Aaltopakettien kulku dispersiivisessä väliaineessa, vaihe- ja ryhmänopeus. Kanta-aalto kulkee vaihenopeudella, modulaatiot — myös GPS-signaalin pseudosatunnaiskoodit — kulkevat ryhmänopeudella.

sen viiveille, *koska ne ovat erilaisia*. Sanotaan, että ionosfääri on radioaaltoille *dispersiivinen*: kulkunopeus riippuu taajuudesta eli vastaavasti aallonpituudesta.

Koodimodulaatioiden kulkunopeus on *ryhmänopeus*, joka on aina pienempi kuin valon nopeus tyhjiössä. Kantoaaltovaiheen kulkunopeus on *vaihenopeus*. Dispersiivisessä väliaineessa nämä nopeudet eroavat toisistaan.



### 12.7.3 Ionosfäärin ja troposfäärin vaikutukset

Ionosfääri on *dispersiivinen* väliaine radioaaltoille: eri taajuudet kulkevat eri nopeuksilla. Dispersion takia radiaaltojen kulun vaihe- ja ryhmänopeudet ovat erilaisia. Vaihenopeudelle taitekerroin on

$$n_p = \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \approx 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_4}{f^4} + \frac{c_6}{f^6} + \dots \quad (12.3)$$

Tässä yhtälössä vakiot  $c_i$ , kuten myös plasmataajuus  $f_p$ , riippuvat ionosfäärissä olevien elektronien tiheydestä,  $n_e$ . Hyvä likimääräinen kaava, joka selittää 99,9%:sesti koko ionosfäärin kulkuvaikutus, on (Seeber, 1989):

$$n_p = 1 - \frac{C}{f^2}, \quad C = 40,3 n_e \text{ m}^3/\text{s}^2,$$

jossa elektronitiheys  $n_e$  ilmaistaan elektroneina per  $\text{m}^3$ . Tyypilliset luvut ovat  $10^8 - 10^{12} \text{ m}^{-3}$ . Elektronitiheys vaihtelee päivän ja yön, vuodenajan ja Auringon aktiivisuuden sekä tietysti paikan leveysasteen ja korkeuden mukaan. Elektronitiheys on suurempi päivällä ja kesällä kuin yöllä ja talvella.

Ryhmäkulkunopeus, tarkemmin ryhmätaitekerroin, saadaan  $n_p f$ :n taajuusderivaattana<sup>17</sup>

$$n_g = \frac{d(n_p f)}{df} = 1 + \frac{C}{f^2}, \quad C \text{ kuten yllä.}$$

Koska ionosfäärin taitekerroin riippuu signaalin taajuudesta  $f$ , on mahdollista *eliminoida* ionosfäärin vaikutus yhdistämällä kahdella eri taajuudella tehdyt mittaukset. Tässä perimmäinen syy, miksi GPS-järjestelmä käyttää kahta eri taajuutta  $L_1$  ja  $L_2$ .

<sup>17</sup>Kun kulku- eli propagaationopeus on  $c' = c/n$ , jossa  $c$  on valon nopeus tyhjiössä, seuraa että vaihekulkunopeus on valon nopeutta suurempi. Kantoaallon vaihe ei kuitenkaan voi kuljettaa informaatiota, joten termodynamiikan mukainen ajan yksisuuntaisuus säilyy... jos olisi mahdollista kuljettaa informaatiota valoa nopeammin, olisi erityisen suhteellisuusteorian mukaan mahdollista kuljettaa sitä takaisin ajassa!



Jos muodostetaan koodihavaintojen lineaariyhdistelmä

$$p_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_1^2 p_1 - f_2^2 p_2}{f_1^2 - f_2^2}$$

ja vastaavasti

$$n_{g,3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_1^2 n_{g,1} - f_2^2 n_{g,2}}{f_1^2 - f_2^2},$$

saadaan

$$n_{g,3} = \frac{f_1^2 (1 + C/f_1^2) - f_2^2 (1 + C/f_2^2)}{f_1^2 - f_2^2} = \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} = 1,$$

josta nähdään, että ionosfäärin vaikutus on hävinnyt<sup>18</sup>.

18

Sen sijaan *troposfääri* — tarkemmin neutraali ilmakehä, mukaan lukien myös stratosfäärin ja korkeampien kerrosten neutraaliosuudet — ei ole radioaalloille dispersiivinen. Kuitenkin sen erikoisuutena on taitekertoimen vahva riippuvuus *vesihöyrysisällöstä*. Sama yhtälö 7.6, joka pätee myös elektronisten etäisyysmittausten yhteydessä, on (Rüeger, 1996, 2002):

$$N_M = 10^6 \cdot (n_M - 1) = \frac{77,624 \text{ K/hPa}}{T} (p - e) + \frac{64,70 \text{ K/hPa}}{T} \left( 1 + \frac{5748 \text{ K}}{T} \right) e,$$

jossa  $n_M$  on mikroaaltojen taitekerroin. Tässä suureiden  $p$  ja  $e$  yksikkö on hPa (hehtopascal) eli millibaari.  $T$  on absoluuttinen lämpötila kelvineinä.

Vesihöyryn osapaineen  $e$  kerroin tässä yhtälössä on huoneenlämmössä jopa 17 kertaa kuivan ilman osapaineen  $p - e$  kerroin!

Koska sekä ionosfääri että troposfääri vaikuttavat GPS-radioaaltojen kulkuun, voidaan GPS-mittauksia käyttää ionosfäärin ja troposfäärin tutkimiseen. Sää- ja ilmastotutkijat ovat tästä erittäin kiinnostuneita, katso osio 18.7.



## 12.8 GPS:n mittausgeometria

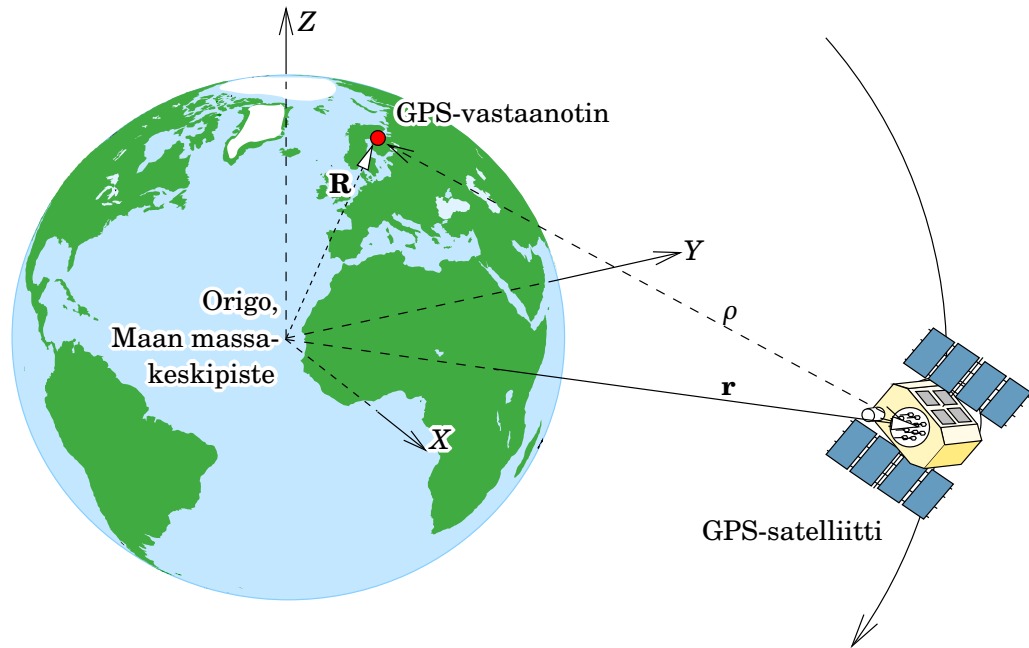
Katso kuva 12.16. Olkoon satelliitin  $S$  paikkavektori geosentrisessä koordinaatistossa  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^S$  ja havaintoaseman  $A$  paikkavektori samassa koordinaatistossa  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_A$  sekä niiden välinen etäisyys  $\rho = \rho_A^S$ .

Tällöin pätee seuraava vektoryhtälö:

$$\mathbf{r}^S = \mathbf{R}_A + \mathbf{e}_A^S \rho_A^S,$$

<sup>18</sup>Tulos ja sen todistus ovat samat, jos otetaan ryhmätaitekertoimen sijasta vaihetaitekerroin  $n_p$ .





KUVA 12.16. GPS-paikannuksen geometria.

jossa  $\mathbf{e}_A^S$  on satelliitin  $S$  suunta (yksikkövektori) havaintoasemasta  $A$ . GPS-paikannuksen tehtävänä on laskea  $\mathbf{R}_A$ , kun  $\rho_A^S$  on annettuna riittävän monelle satelliitille  $S$ .

Pythagoraan lause antaa

$$\rho_A^S = \|\mathbf{r}^S - \mathbf{R}_A\| = \sqrt{(x^S - X_A)^2 + (y^S - Y_A)^2 + (z^S - Z_A)^2}, \quad (12.4)$$

jossa

$$\mathbf{r}^S = x^S \mathbf{i} + y^S \mathbf{j} + z^S \mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_A = X_A \mathbf{i} + Y_A \mathbf{j} + Z_A \mathbf{k}$$

ovat satelliitin  $S$  ja havaintoaseman  $A$  geosentriset paikkavektorit. Yksikkövektorit  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  ovat geosentristen koordinaattiakselien suuntaisia:  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  on *ortonormaali kanta* euklidisessa avaruudessa.

Usein kirjoitetaan vektorit niiden *komponenttien* eli paikkakoordinaattien sarakevektoreina:

$$\bar{\mathbf{r}}^S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x^S \\ y^S \\ z^S \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}}_A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}.$$

Havainnoista ei kuitenkaan saada todellisia etäisyyksiä  $\rho$  vaan *pseudo-etäisyyksiä*  $p$ , yhtälö 12.1, tai  $\bar{P}$ , yhtälö 12.2.

Myös ilmakehän kulkuviiveet  $d_{\text{ion}}$ ,  $d_{\text{trop}}$ ,  $D_{\text{ion}}$  ja  $D_{\text{trop}}$  on jollain tavalla otettava huomioon. Vaihtoehdot ovat



- Eliminointi havaintoyhtälöistä — kuten alaosiassa 12.7.3 esitettiin ionosfääri-efekteille  $d_{\text{ion}}$  ja  $D_{\text{ion}}$ .
- Laskenta hyvän, ulkopuolelta saadun ilmakehämallin avulla.
- Ilmakehän vaikutuksen mallinnus tuntemattomien parametrien avulla, estimoitaviksi samoista havaintoyhtälöistä — kuten tulemme esittämään troposfäärin vaikutuksille  $d_{\text{trop}}$  ja  $D_{\text{trop}}$  alaosiassa 18.7.1.



## 12.9 Mittausgeometria ja havaintojen herkkyys

Yllä nähtiin, että GPS:n havaintosuureet ovat *pseudoetäisyyksiä*, joiden havaintoyhtälö on tämän muotoinen:

$$p = \rho + c(\Delta T - \Delta t) + d_{\text{ion}} + d_{\text{trop}}.$$

Jätetään ilmakehän vaikutus pois ja oletetaan, että satelliittirata — ja näin ollen radasta ja kellonajasta laskettu satelliitin hetkellinen paikkavektori avaruudessa — ja satelliitin kellopoikkeama  $\Delta t$  ovat *tunnettuja* eli jo otettu huomioon:

$$p = \rho + c \Delta T,$$

jossa  $\rho$  on geometrinen etäisyys satelliitin ja vastaanottimen välillä ja  $\Delta T$  on vastaanottimen kellopoikkeama.

Kirjoitetaan yhtälö 12.4 yksinkertaisemmin:

$$\rho_A^S = \rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2},$$

jossa  $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$  on tunnettu satelliitin paikkavektori avaruudessa, laskettuna ratatiedoista eli efemerideistä.  $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$  on vastaanottimen paikkavektori. Nyt

$$p = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} + c \Delta T,$$

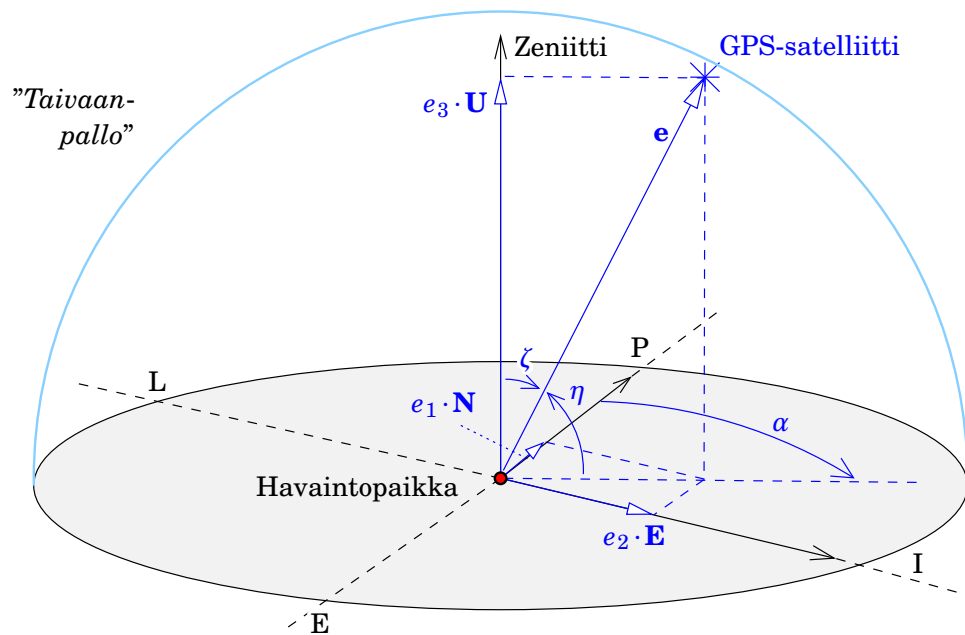
jossa on *neljä tuntematonta*,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ja  $\Delta T$ .

Jatkossa käytämme tuntemattomana lauseketta  $c \Delta T$ , koska sillä on sama dimensio kuin koordinaattituntemattomilla.

Neljän tuntemattoman ratkaisemiseksi riittävät havainnot neljälle satelliitille. Jos käytettävien satelliittien määrä on suurempi, syntyy redundanssi ja *tasoitustehtävä*.

**Kysymys** Millä tavalla pienet ”häiriöt” vastaanottimen paikassa vaikuttavat erääseen mittaukseen  $p$ ?





KUVA 12.17. GPS-satelliitin ja havaintopaikan välinen geometria.  $\{\mathbf{N}, \mathbf{E}, \mathbf{U}\}$  on paikallisen horisontin ortonormaali kanta ("north, east, up").

**Vastaus** Tutki satelliitin *paikkaa taivaalla*. Katso kuva 12.17. Olkoon satelliitin suuntavektori havaintopaikasta katsottuna  $\mathbf{e}$ . Tämä on yksikkövektori: sen pituus on

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} = 1.$$

Jos satelliitin paikka taivaalla on atsimuutti  $\alpha$ , korkeuskulma  $\eta$ , on

$$\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} e_1 \cdot \mathbf{N} + e_2 \cdot \mathbf{E} + e_3 \cdot \mathbf{U}$$

ja komponenttien sarakevektori on

$$\bar{\mathbf{e}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \zeta \\ \sin \alpha \sin \zeta \\ \cos \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \eta \\ \sin \alpha \cos \eta \\ \sin \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} x - X \\ y - Y \\ z - Z \end{bmatrix}.$$

Tässä  $\{\mathbf{N}, \mathbf{E}, \mathbf{U}\}$  on ortonormaali yksikkövektorien kanta paikallisen horisontin järjestelmässä ("north, east, up").  $\eta = 90^\circ - \zeta$  on satelliitin korkeuskulma horisontin yläpuolella.

Suoritetaan *herkkyysanalyysi*. Millä tavalla havaintopaikan pienet koordinaattisiirrot  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  tai  $\Delta Z$  vaikuttavat havaintosuureeseen  $p$ ?

- Jos koordinaattisiirto vaikuttaa paljon, havainto  $p$  auttaa määrittämään kyseisen tuntemattoman eli koordinaatin.







TAULU 12.5. Vaikutuskaavan 12.5 tarkempi johtaminen linearisoinnin avulla.

Valitaan havaintoasemalle, koordinaatit  $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ , likimääräinen paikka  $\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{bmatrix}^T$  ja likimääräinen kellopoikkeama  $\Delta T = 0$ . Silloin voidaan konstruoida likimääräinen pseudoetäisyshavainto

$$p_0 = \sqrt{(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 + (z - Z_0)^2}.$$

Suoritetaan Taylorin sarjakehitelmä likimääräisen paikan ympäristössä, arvon  $p_0$  ympäri. Ensimmäiset, lineaariset termit antavat

$$\begin{aligned} p &\approx p_0 + \frac{\partial p}{\partial X}(X - X_0) + \frac{\partial p}{\partial Y}(Y - Y_0) + \frac{\partial p}{\partial Z}(Z - Z_0) + c\Delta T \\ \implies \Delta p = p - p_0 &\approx \frac{\partial p}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial p}{\partial Y}\Delta Y + \frac{\partial p}{\partial Z}\Delta Z + c\Delta T. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Tässä kertoimet, *osittaisderivaatat*, saadaan seuraavasti:

$$\frac{\partial p}{\partial X} = -\frac{x - X}{\rho}, \quad \frac{\partial p}{\partial Y} = -\frac{y - Y}{\rho}, \quad \frac{\partial p}{\partial Z} = -\frac{z - Z}{\rho}. \quad (12.7)$$

Kertointen arvot lasketaan likimääräisellä paikalla  $\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{bmatrix}^T$  todellisen, mutta tuntemattoman paikan sijasta. Tämä riittää, koska yhtälössä 12.6 arvot  $(\Delta p, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$  ovat *pieniä erotussuureita* todellisten arvojen  $(p, X, Y, Z)$  ja likiarvojen  $(p_0, X_0, Y_0, Z_0)$  välillä.

Osittaisderivaatat 12.7 ovat *suuntakosinit*, etumerkkiä vaille satelliitin suunta havaintoasemasta nähtynä, projisoituna koordinaattiakseleihin  $X, Y$  ja  $Z$ .

- Jos koordinaattisiirto ei vaikuta yhtään, kyseessä olevaa tuntematonta ei saada määritetyksi havainnon  $p$  avulla.
- Mitä suurempi havaintojen *herkkyys*, sitä parempi on tuntemattomien ratkaisun tarkkuus.

**Intuiitiivisesti** havaintoon  $p$  vaikuttaa eniten, suhteessa yksi yhteen, havaintopaikan siirtymä satelliitin suuntavektorin  $\mathbf{e}$  suunnassa. Havaintopaikan siirtymät, jotka ovat kohtisuorassa suuntavektoria kohtaan, eivät vaikuta lainkaan.

Yhtälönä:

$$\text{”Vaikutus”} = -\langle \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{e} \rangle = -(\Delta X e_1 + \Delta Y e_2 + \Delta Z e_3). \quad (12.5)$$

Tämä intuitiivinen tulos voidaan johtaa myös muodollisemmin *linearisoinnin* avulla. Katso taulu 12.5 ja osio 14.6.





### 12.9.1 DOP-suureet ja havaintoyhtälöt

Paikallisella taivaalla olevien GPS-satelliittien mittausgeometrian laadun mitta on DOP, *dilution of precision*, ”tarkkuuden laimennus”. Yllä tehdyn geometrisen herkkyyksianalyysin avulla voimme laskea DOPin eri variantteja. Suurempi DOP-luku merkitsee *huonompaa* mittausgeometri-aa!

DOP luonnehtii satelliittigeometrian laatua: kuinka paljon huonommin tai paremmin koordinaatit saadaan ratkaistua ”standardilaatuisesta” havaintoaineistosta, johtuen ainoastaan taivaalla tarjolla olevien satelliittien huonommasta tai paremmasta geometriasta. Tämä on arvokas tieto mittauksen suunnitteluvaiheessa.

Eräs nyrkkisääntö on, että mittausgeometria on hyväksyttävä, mikäli GDOP < 7...10, riippuen käyttötarkoituksesta.

Jos havaintopaikan koordinaattien ”vaihtelua” kuvataan (pienellä) erotussuureella  $\Delta \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \Delta X & \Delta Y & \Delta Z \end{bmatrix}^T$  ja vastaanottimen kellon ”vaihtelua” (myös pienellä) erotussuureella  $c\Delta T$ , voidaan havaintosuureen  $p^{(i)}$  riippuvuutta näistä yhteensä neljästä tuntemattomasta ilmaista näin:

$$\begin{aligned} \Delta p^{(i)} &= \begin{bmatrix} e_1^{(i)} & e_2^{(i)} & e_3^{(i)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta X \\ -\Delta Y \\ -\Delta Z \\ c\Delta T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha^i \cos \eta^i & \sin \alpha^i \cos \eta^i & \sin \eta^i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta X \\ -\Delta Y \\ -\Delta Z \\ c\Delta T \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa  $\alpha^i$  ja  $\eta^i$  ovat satelliitin  $i$  atsimuutti ja korkeuskulma paikallisella taivaalla. Tätä kirjoitustapaa kutsutaan *linearisoinniksi*.

Tämä yhtälö voidaan tulkita *havaintoyhtälöksi*. Jos havaintoyhtälö kirjoitetaan symbolisesti, kuten geodesiassa on tapana, muotoon<sup>19</sup>

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{\mathbf{x}}, \quad (12.8)$$

tuntemattomien vektorin  $\hat{\mathbf{x}}$  alkioit eli tuntemattomien estimaattorit ovat  $-\Delta \hat{X}$ ,  $-\Delta \hat{Y}$ ,  $-\Delta \hat{Z}$  ja  $c\Delta \hat{T}$ , havaintojen vektori  $\underline{\ell}$  koostuu arvoista  $\Delta p^{(i)}$  ja

<sup>19</sup>Jäännösvirheet eli residuaalit  $\underline{v}$  tarvitaan mittausepävarmuutta sisältävien havaintojen  $\underline{\ell}$  yhteensovittamiseksi, kun havaintoja on enemmän kuin tuntemattomia. Katso osio 14.4.





TAULUKKO 12.6. DOP-suureen eri variantit.

Lyhenne	Nimi	Kuvattu suure
GDOP	Geometric DOP	Paikka ja aika
PDOP	Position DOP	Paikka
HDOP	Horizontal DOP	Vaakasijainti
VDOP	Vertical DOP	Korkeus
TDOP	Time DOP	Aika

rakennematriisi (engl. *design matrix*) on

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha^1 \cos \eta^1 & \sin \alpha^1 \cos \eta^1 & \sin \eta^1 & 1 \\ \cos \alpha^2 \cos \eta^2 & \sin \alpha^2 \cos \eta^2 & \sin \eta^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \alpha^i \cos \eta^i & \sin \alpha^i \cos \eta^i & \sin \eta^i & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \alpha^n \cos \eta^n & \sin \alpha^n \cos \eta^n & \sin \eta^n & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.9)$$

Tämä on itse asiassa alkuperäisen havaintoyhtälön 12.1 linearisoitu versio.

Tämä rakennematriisi sisältää *kaiken, mitä tiedämme* GPS-mittausgeometriasta<sup>20</sup>. Tästä voidaan laskea kaikki DOP-suureet käyttämättä yhtään todellista havaintoa — riittää, että satelliittien paikat taivaalla voidaan laskea. Matriisin koko on  $n \times 4$ :  $n$  riviä ja neljä saraketta. Suure  $n$  on käytettävissä olevien satelliittien lukumäärä.

Tilanne on sama kuin terrestrisen geodeettisen verkon rekognosoinnin tapauksessa: verkon laatua voidaan jo arvioida pisteiden sijainnin ja suunniteltujen mittauksen geometrian avulla, ennen kuin yhtään mittaus on vielä tehty. Tämä on verraton suunnitteluväline.

Havaintoyhtälöistä ja pienimmän neliösumman tasoituksesta kerromme lisää osiossa 14.4. Tässä emme yritäkään laskea pienimmän neliösumman ratkaisua, vaan tutkimme ainoastaan laskettavien tuntemattomien  $-\Delta X$ ,  $-\Delta Y$ ,  $-\Delta Z$  ja  $c \Delta T$  tarkkuutta!

Oletetaan tätä laskua varten, että *kaikki havainnot ovat yhtä tarkkoja* — niiden tarkkuuden oletetaan olevan 1 — ja että *ne eivät ole tilastollisesti riippuvaisia toisistaan*. Silloin seuraavassa kuvattu yksinkertainen laskentatapa pätee. Se antaa kuvan GPS:n mittausgeometrian roolista mittauksien lopullisessa tarkkuudessa. Muut tekijät, kuten itse

<sup>20</sup>Kuten sisältää myös *sky plot*, esimerkiksi Borre (2009).

vastaanottimen ja antennin tekninen suorituskyky, mittauksen kesto ja ilmakehä, voidaan tarkastella erikseen.



### 12.9.2 Virhe-ellipsoidit mittaustarkkuuden esitystapana

Rakennematriisista  $A$  voidaan konstruoida *normaalimatriisi* eli *tuntemattomien painomatriisi* seuraavalla tavalla:

$$N = P_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} A^T A. \quad (12.10)$$

Ilmaistuna satelliittien paikkoihin taivaalla, siis atsimuutit  $\alpha^i$  ja korkeuskulmat  $\eta^i$ , tulos on yhtälön 12.11 mukaan. Summaus  $\sum$  on tehtävä kaikkien satelliittien atsimuuttien ja korkeuskulmien ylitse,  $\alpha^i, \eta^i, i = 1, \dots, n$ .

$$P_{xx} = \begin{bmatrix} \sum \cos^2 \alpha \cos^2 \eta & \sum \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \eta & \sum \cos \alpha \sin \eta \cos \eta & \sum \cos \alpha \cos \eta \\ \sum \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \eta & \sum \sin^2 \alpha \cos^2 \eta & \sum \sin \alpha \sin \eta \cos \eta & \sum \sin \alpha \cos \eta \\ \sum \cos \alpha \sin \eta \cos \eta & \sum \sin \alpha \sin \eta \cos \eta & \sum \sin^2 \eta & \sum \sin \eta \\ \sum \cos \alpha \cos \eta & \sum \sin \alpha \cos \eta & \sum \sin \eta & n \end{bmatrix}. \quad (12.11)$$

Tämän painomatriisin  $P_{xx}$  käänteismatriisi  $Q_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} P_{xx}^{-1}$  on *painokerroinmatriisi*:

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} & q_{xt} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} & q_{yt} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} & q_{zt} \\ q_{tx} & q_{ty} & q_{tz} & q_{tt} \end{bmatrix}.$$

Tämä matriisi, kuten painomatriisi  $P_{xx}$  tai rakennematriisi  $A$ , kuvaa edelleen ainoastaan *mittauspaikan ja satelliittien välistä mittausgeometriaa* eikä mitään muuta.

Nyt tuntemattomien vektorin eli *ratkaisun*,

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\Delta \hat{X} & -\Delta \hat{Y} & -\Delta \hat{Z} & c \Delta \hat{T} \end{bmatrix}^T,$$

*varianssimatriisi* on

$$\Sigma_{xx} = \sigma^2 Q_{xx} = \sigma^2 \left[ \begin{array}{ccc|c} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} & q_{xt} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} & q_{yt} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} & q_{zt} \\ \hline q_{tx} & q_{ty} & q_{tz} & q_{tt} \end{array} \right].$$

Vakiota  $\sigma^2$  kutsutaan (*a priori*) *painoyksikön varianssiksi*. Sen neliöjuuri, *painoyksikön keskivirhe*  $\sigma$ , on yhden havaintosuureen, siis yhden havaitun pseudoetäisyyden, vakioksi oletettu keskivirhe.



Koordinaattiratkaisun varianssimatriisi on tuntemattomien varianssimatriisin  $3 \times 3$  alkion kokoinen alamatriisi  $\Sigma_{\mathbf{rr}}$ :

$$\Sigma_{\mathbf{rr}} = \sigma^2 \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{bmatrix}. \quad (12.12)$$

DOP-suureet lasketaan suoraan painokerroinmatriisista  $Q_{xx}$ :

$$\text{PDOP} = \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}}, \quad \text{HDOP} = \sqrt{q_{xx} + q_{yy}}, \quad \text{VDOP} = \sqrt{q_{zz}}.$$

Suureissa TDOP ja GDOP aika  $t$  on mukana. Muista kuitenkin, että estimoitava tuntematon on  $c \widehat{\Delta T}$  eikä  $\widehat{\Delta T}$  ja  $q_{tt}$  vastaa tähän suureeseen:

$$\text{TDOP} = \sqrt{q_{tt}}, \quad \text{GDOP} = \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz} + q_{tt}} = \sqrt{\text{PDOP}^2 + \text{TDOP}^2}.$$

Koordinaattikeskivirheet saadaan varianssimatriisiin 12.12 lävistäjäalkioiden neliöjuureina:

$$\sigma_X = \sigma \sqrt{q_{xx}}, \quad \sigma_Y = \sigma \sqrt{q_{yy}}, \quad \sigma_Z = \sigma \sqrt{q_{zz}}.$$

Myös

$$\sigma_{c\Delta T} = \sigma \sqrt{q_{tt}}.$$

Tuttu *pistekeskivirhe* tasossa liittyy nyt suoraan HDOP-suureeseen:

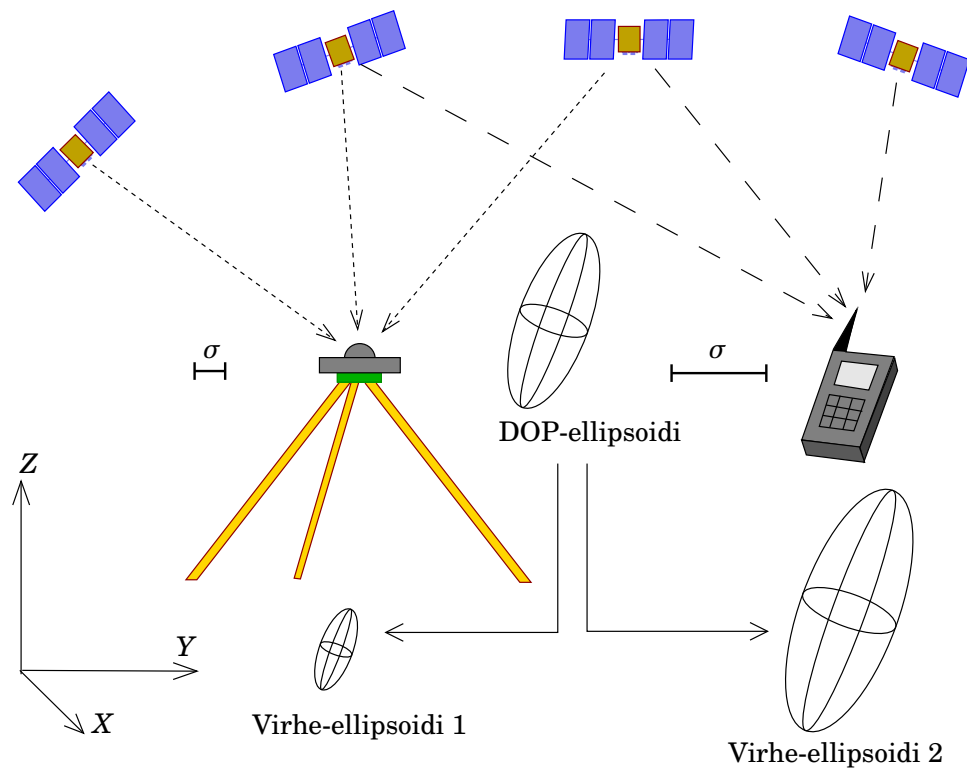
$$\underbrace{\sigma_P}_{\text{tarkkuus}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \underbrace{\sigma}_{\text{laiteteknologia ym.}} \cdot \underbrace{\text{HDOP}}_{\text{geometria}}.$$

Koordinaattien varianssimatriisi voidaan esittää graafisesti kolmiulotteisena *virhe-ellipsoidina*. Virhe-ellipsoidi mittauspisteen ympärillä kuvaa sijainnin epävarmuutta yllä olevien määritelmien perusteella. Vastaava DOP-ellipsoidi saadaan jättämällä vakio  $\sigma^2$  pois: se on samanmuotoinen kuin virhe-ellipsoidi, mutta sillä ei ole metristä kokoa, koska matriisin  $Q_{xx}$  alkio, kuten myös rakennematriisin  $A$  alkio, ovat dimensiottomia.

Yleisessä tapauksessa ellipsoidin parametrien laskeminen matriisin alkioista ei ole yksinkertaista. Tarkastellaan yksinkertaisempaa erikoistapausta, jolla on käytännön relevanssi. Jos mittausgeometria on *symmetrisen*, siis satelliitit ja niiden korkeuskulmat ovat tasaisesti jakautuneita atsimuutin mukaan horisontin ympärillä, seuraa, että DOP-ellipsoidi on orientoitunut koordinaattiakselien mukaan:  $q_{xy} = q_{yx} = q_{yz} = 0$  (ja  $q_{xx} = q_{yy}$ !), ja matriisi on

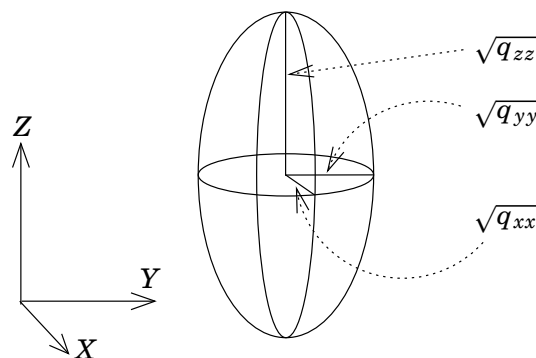
$$\Sigma_{\mathbf{rr}} = \sigma^2 \begin{bmatrix} q_{xx} & & \\ & q_{yy} & \\ & & q_{zz} \end{bmatrix}.$$





KUVA 12.18. DOP-ellipsoidin ja virhe-ellipsoidin välinen yhteys ja painoyksikön keskivirhe  $\sigma$ . DOP-ellipsoidi kuvaa vain geometrian vaikutusta, kun virhe-ellipsoidi riippuu myös mittauksen tarkkuudesta, siis laitetypistä.

Tässä erikoistapauksessa DOP-ellipsoidin akselit osoittavat paikallisia koordinaattiakseleita pitkin, ja pisin akseli osoittaa pystysuuntaan. Käytännön mittaustilanteissa koordinaattien varianssimatriisi on usein lähellä tätä. Virhe-ellipsoidin pisin akseli on melkein aina lähellä pys-



KUVA 12.19. GPS-paikanmäärityksen DOP-ellipsoidi, jos sen pääakselit ovat koordinaattiakselien suuntaisia.

tysuuntaa, mikä kuvaa, että korkeus on heikommin määritetty kuin vaakasijainti<sup>21</sup>. Tässä tapauksessa ovat koordinaattien keskivirheet 21

$$\sigma_X = \sigma_Y = \sigma \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \text{HDOP}, \quad \sigma_Z = \sigma \cdot \text{VDOP},$$

yllä olevien määritelmien perusteella. DOP-ellipsoidin akselien puolikkaiden pituudet ovat  $\sqrt{q_{xx}}$ ,  $\sqrt{q_{yy}}$  ja  $\sqrt{q_{zz}}$ . Symmetrisessä tapauksessa on siis

$$q_{xx} = q_{yy} = \frac{1}{2} \text{HDOP}^2$$

vaakatasossa, ja aina on

$$q_{zz} = \text{VDOP}^2$$

pystysuunnassa.



### 12.9.3 DOP ja mittauksen suunnittelu

Yleisesti voi sanoa, että *mittausgeometria* on parempi, jos HDOP ja VDOP, ja siis PDOP, ovat pienempiä. Se taas edellyttää, että

- Riittävän monta satelliittia on horisontin yläpuolella ja mittauspaikasta havaittavissa.
- Satelliitit sijaitsevat tasaisesti ympäri taivasta.

Tietysti tämä onnistuu vain, jos mittauspisteestä on riittävän vapaa näkyvyys ylöspäin taivaalle. Käytännössä aina on esteitä, joita tulee kartoittaa *horisonttipiirroksen* muodossa mittauksen suunnittelua varten. Monet suunnitteluohjelmat antavat käyttäjän piirtää horisonttipiirroksen ja ottavat sen huomioon DOPin laskennassa.

Tilanne paranee, jos käytettävät vastaanottimet osaavat hyödyntää sekä GPS- että GLONASS-järjestelmää, jolloin näkyy enemmän satelliitteja ja syntyy helpommin hyvä mittausgeometria.

<sup>21</sup>Syyt tähän ovat:

- Vain horisontin yläpuolella olevat satelliitit osallistuvat korkeuden määrittämiseen, eli on kyse *ekstrapolaatiosta*. Vaakatasossa sekä idässä että lännessä, pohjoisessa ja etelässä olevat satelliitit osallistuvat paikannukseen: *interpolatio*.
- Myös samasta epäsymmetriasta johtuen pystysuuntainen sijaintituntematon  $Z$  ja kellotuntematon  $\Delta T$  ”kilpailevat” samasta informaatiosta, kun ne estimoidaan yhtäaikaa samasta havaintodatasta.
- Myös ilmakehän aiheuttama signaalin kulkuviiveiden epävarmuus vaikuttaa lähinnä pystysuuntaisesti, kun — myös ilmakehän kerrostuneisuuden takia — tilanne vaakatasossa on symmetrisempi.



Tietysti GPS-paikannuksen geometria on vain yksi asia muiden joukossa. Muut mittaustarkkuuteen vaikuttavat tekijät ovat esimerkiksi

- Vastaanottimen ja antennin suorituskyky.
- Paikalliset häiriöt, kuten *monitie* ("multipath") eli maaheijastukset.
- Auringon aktiivisuus, ionosfääriset olosuhteet.
- Mittausmoodi: staattinen vai kinemaattinen, absoluuttinen (esimerkiksi "precise point positioning", PPP) vai relatiivinen.
- Relatiivisessa GPS-mittauksessa mittauspisteiden välinen etäisyys tai etäisyys tukiasemasta. Geodeettiset mittaukset ovat lähes aina relatiivisia ja suoritetaan verkkomittauksina.
- Staattisessa GPS-mittauksessa mittauksen kesto, mitattujen epookkien lukumäärä. Geodeettiset runkomittaukset ovat aina staattisia menetelmän robustiuden takia, vaikka se on aikaa vievä. Vain paikallisissa mittauksissa, kuten kartoitusmittauksissa, käytetään nopeampaa kinemaattista tekniikkaa (RTK, real-time kinematic).



#### 12.9.4 Esimerkki 1: atsimuuttisymmetrinen geometria

Oletetaan, että satelliitit on jaettu tasaisesti ympäri taivasta atsimuuttiarvojen  $\alpha$  mukaan, jokaiselle korkeuskulmalle  $\eta$ . Silloin yllä olevassa painomatriisissa 12.11:

- Lähes kaikki ei-päälävistäjän arvot häviävät, koska niissä on joko  $\sin \alpha$  tai  $\cos \alpha$ , tai jopa  $\sin \alpha \cos \alpha$ . Ainoastaan  $\sum \sin \eta$  ei häviä.
- 

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha^i \cos^2 \eta^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i, \quad \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha^i \cos^2 \eta^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i.$$

Siksi paino- eli normaalimatriisista  $P_{xx} = A^T A$  tulee melkein diagonaalinen matriisi, joka olisi suhteellisen helppo kääntää — vaikkamme edes yritä sitä:

$$P_{xx} = A^T A =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n \sin^2 \eta^i & \sum_{i=1}^n \sin \eta^i \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n \sin \eta^i & n \end{bmatrix}.$$





Muunnetaan nyt havaintoyhtälö 12.8 ja rakennematriisi 12.9 seuraavalla tavalla:

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A \Lambda \Lambda^{-1} \hat{\mathbf{x}} = \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}},$$

jossa

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\Delta \hat{X} \\ -\Delta \hat{Y} \\ -\Delta \hat{Z} \\ c \Delta \hat{T} \end{bmatrix} = \Lambda^{-1} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\Delta \hat{X} \\ -\Delta \hat{Y} \\ -\Delta \hat{Z} \\ \left(\frac{1}{n} \sum \sin \eta\right) (-\Delta \hat{Z}) + c \Delta \hat{T} \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

ja

$$\tilde{A} = A \Lambda = \begin{bmatrix} \cos \alpha^1 \cos \eta^1 & \sin \alpha^1 \cos \eta^1 & \sin \eta^1 - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & 1 \\ \cos \alpha^2 \cos \eta^2 & \sin \alpha^2 \cos \eta^2 & \sin \eta^2 - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \alpha^i \cos \eta^i & \sin \alpha^i \cos \eta^i & \sin \eta^i - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \alpha^n \cos \eta^n & \sin \alpha^n \cos \eta^n & \sin \eta^n - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & 1 \end{bmatrix},$$

koska<sup>22</sup>

22

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{n} \sum \sin \eta & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{n} \sum \sin \eta & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt saadaan siisti lävistämatriisi:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{xx} &= \tilde{A}^T \tilde{A} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n \left( \sin \eta^i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \eta^j \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan  $\tilde{P}_{xx}$ :n virhe- eli kuvaajaellipsoidin yhtälö:

$$\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{P}_{xx} \tilde{\mathbf{x}} = 1,$$

<sup>22</sup>Tarkista, että  $\Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda = I$  !

jossa  $\tilde{x}$  kuten yhtälössä 12.13. Tulos on

$$\begin{aligned} p_{11} \Delta \hat{X}^2 + p_{22} \Delta \hat{Y}^2 + \tilde{p}_{33} \Delta \hat{Z}^2 + p_{44} \Delta \tilde{T}^2 &= \\ &= \frac{\Delta \hat{X}^2}{q_{xx}} + \frac{\Delta \hat{Y}^2}{q_{yy}} + \frac{\Delta \hat{Z}^2}{\tilde{q}_{zz}} + \frac{\Delta \tilde{T}^2}{\tilde{q}_{tt}} = 1, \end{aligned}$$

josta näkyy heti määritelmän mukaiset, tuntemattomien varianssimatriisin

$$Q_{xx} = P_{xx}^{-1} = (A^T A)^{-1}$$

alkiot:

$$q_{xx} = q_{yy} = \frac{2}{\sum_i \cos^2 \eta^i},$$

josta

$$\text{HDOP} = \sqrt{q_{xx} + q_{yy}} = \frac{2}{\sqrt{\sum_i \cos^2 \eta^i}}.$$

<sup>23</sup> Samalla tavalla, hieman uudelleen järjestämisen jälkeen<sup>23</sup>,

$$\tilde{q}_{zz} = \frac{1}{\tilde{p}_{33}} = \frac{1}{\sum_i \left( \sin \eta^i - \frac{1}{n} \sum_j \sin \eta^j \right)^2} = \frac{n}{n \sum_i \sin^2 \eta^i - \left( \sum_i \sin \eta^i \right)^2},$$

<sup>24</sup> ja VDOP on sen neliöjuuri<sup>24</sup>.



### 12.9.5 Esimerkki 2: singulaarinen tapaus

Tarkastellaan taas rakennematriisia  $A$ , lauseke 12.9, ja kirjoitetaan se muotoon

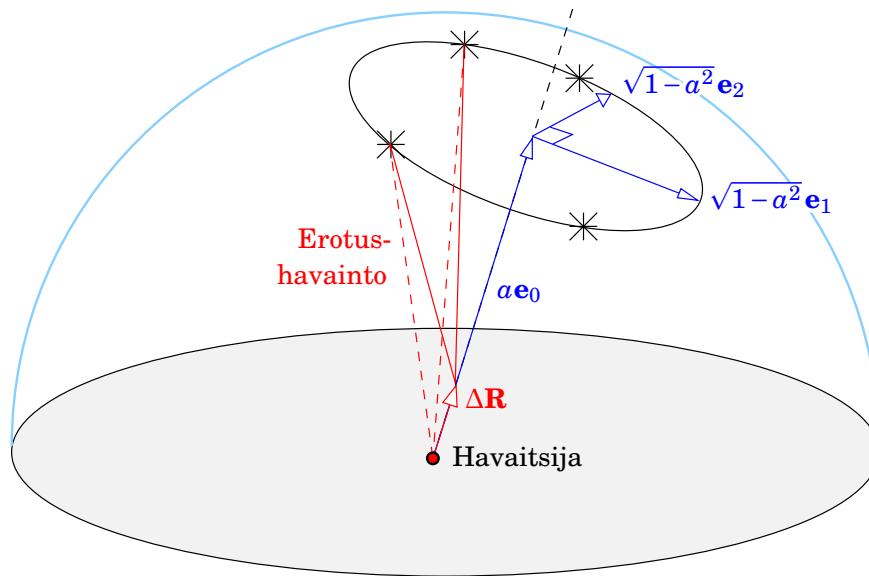
$$A = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & e_3^{(1)} & 1 \\ e_1^{(2)} & e_2^{(2)} & e_3^{(2)} & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ e_1^{(n)} & e_2^{(n)} & e_3^{(n)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{e}}^{(1)})^T & 1 \\ (\bar{\mathbf{e}}^{(2)})^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ (\bar{\mathbf{e}}^{(n)})^T & 1 \end{bmatrix},$$

<sup>23</sup>Koska

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \sin \eta^i - \frac{1}{n} \sum_j \sin \eta^j \right)^2 &= \\ &= \sum_i \sin^2 \eta^i - \sum_i \frac{2}{n} \sin \eta^i \overbrace{\left( \sum_j \sin \eta^j \right)}^{\text{vakio}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \overbrace{\left( \sum_j \sin \eta^j \right)^2}^{\text{vakio}} = \\ &= \sum_i \sin^2 \eta^i - \frac{2}{n} \left( \sum_i \sin \eta^i \right) \left( \sum_i \sin \eta^i \right) + \frac{1}{n} \left( \sum_i \sin \eta^i \right)^2 = \\ &= \sum_i \sin^2 \eta^i - \frac{1}{n} \left( \sum_i \sin \eta^i \right)^2. \end{aligned}$$

<sup>24</sup>Jos  $\eta$  on vakio — siis kaikki  $\eta^i, i = 1, \dots, n$  ovat samoja — nimittäjä häviää! Korkeuden määrittäminen GPS:llä edellyttää, että taivaalla on satelliitteja eri korkeuskulmilla.





KUVA 12.20. Ympyräsingulaarisuus eli ”vaarallinen ympyrä” GPS:lle.

olettaen, että on  $n$  satelliittia. Jos satelliitit ovat kaikki samalla ympyrällä, on satelliittiin  $i$  osoittava yksikkösuuntavektori

$$\mathbf{e}^{(i)} = e_1^{(i)} \mathbf{i} + e_2^{(i)} \mathbf{j} + e_3^{(i)} \mathbf{k} = a\mathbf{e}_0 + b^{(i)} \mathbf{e}_1 + c^{(i)} \mathbf{e}_2$$

jossa arvot  $b^{(i)}$  ja  $c^{(i)}$  täyttävät ehdon  $(b^{(i)})^2 + (c^{(i)})^2 = 1 - a^2$ , kaikille satelliiteille  $i = 1, \dots, n$ . Tässä  $a\mathbf{e}_0$  on vektori havaitsijasta ympyrän keskipisteeseen. Näin ollen on vain kolme riippumatonta vektoria  $\mathbf{e}^{(i)}$ , kun tarvitaan neljä.

Katso kuva 12.20. Tilanne on myös geometrisesti selvä: jos havaintopaikka siirretään vektorin  $\mathbf{e}_0$  suuntaa pitkin, mikään pseudoetäisyyksien erotus kahden satelliitin välillä ei muutu. Tässä onkin kyse siitä, että vastaanottimen kellotuntematonta  $\Delta T$  ja havaintopaikan sijainnin  $\mathbf{e}_0$ -suuntaista komponenttia (eli *projektiota*  $\mathbf{e}_0$ -suuntaan) ei saa erotettua toisistaan tässä geometriassa.

Tämä on ympyräsingulaarisuus eli ”vaarallinen ympyrä” GPS-paikannuksen tapauksessa, vertaa osio 6.2. GPS-paikannus on itse asiassa kolmiulotteinen taaksepäin leikkaus!

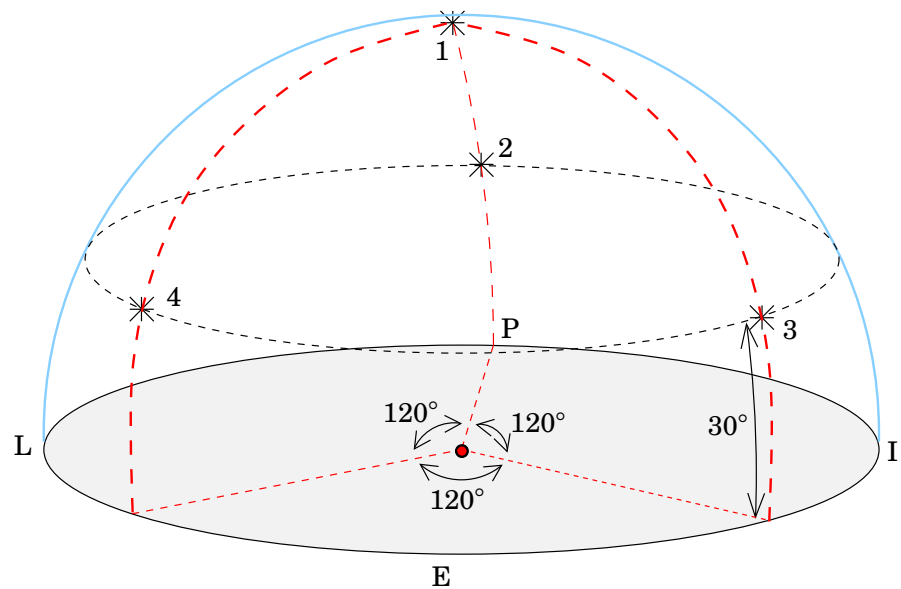


### 12.9.6 DOP-suureiden laskuesimerkki

Katso kuva 12.21.

Olkoon yksi satelliitti zeniitissä ( $\eta = 90^\circ$ ) ja kolme satelliittia korkeuskulmalla  $\eta = 30^\circ$  atsimuuteilla  $\alpha = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ . Lasketaan ensin





KUVA 12.21. DOP-suureiden laskennan esimerkki.

rakennematriisi  $A$  yhtälön 12.9 mukaan. Annettuna on

$$\alpha_1 = 0^\circ, \quad \eta_1 = 90^\circ,$$

$$\alpha_2 = 0^\circ, \quad \eta_2 = 30^\circ,$$

$$\alpha_3 = 120^\circ, \quad \eta_3 = 30^\circ,$$

$$\alpha_4 = -120^\circ, \quad \eta_4 = 30^\circ.$$

Numeroarvoja saadaan muistamalla, että

$$\sin(90^\circ) = 1,$$

$$\cos(90^\circ) = 0,$$

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\sin(120^\circ) = -\sin(-120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos(120^\circ) = \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}.$$

Tulos on

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} & \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi lasketaan tuntemattomien painomatriisi eli normaalimatriisi, yhtälö 12.10:

$$P_{xx} = A^T A = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}.$$



Tämän matriisin kääntäminen antaisi  $Q_{xx}$ , tuntemattomien painokerroinmatriisi. Tässä käänämme matriisin *vain osittain*:

$$Q_{xx} = P_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{xx} & & & \\ & q_{yy} & & \\ & & q_{zz} & q_{zt} \\ & & q_{tz} & q_{tt} \end{bmatrix}. \quad (12.14)$$

Tästä luemme suoraan, että koordinaattien  $X$  ja  $Y$  painokertoimet ovat

$$q_{xx} = q_{yy} = \frac{8}{9} = 0,888\dots,$$

ja siis

$$\text{HDOP} = \sqrt{q_{xx} + q_{yy}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1,333\dots$$

Yhtälöstä 12.14 näkyy, että  $\hat{Z}$ -koordinaatti ja kellotuntematon  $c\hat{\Delta T}$  ovat ”sotkeutuneet” toisiinsa ( $q_{zt} \neq 0$ ) ja niiden painokertoimien laskenta jätetään sikseen<sup>25</sup>.

25



## 12.10 GPS-satelliittien radat

GPS-satelliitin rata Maan gravitaatiokentässä on likimain Keplerin lakien mukainen ellipsi. Käytännössä se on lähes ympyrä, jonka säde<sup>26</sup> 26 on 26560 km, ja kiertoaika eli periodi  $11^h58^m$ . Ratatasojen kaltevuus päiväntasaajaan nähden eli *inklinaatio* on  $i = 55^\circ$ , mikä merkitsee, että Suomen leveysasteella GPS-satelliitit eivät koskaan kulje zeniitin läpi.

<sup>25</sup>Itse asiassa käännettävänä oleva osamatriisi on

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

ja siis

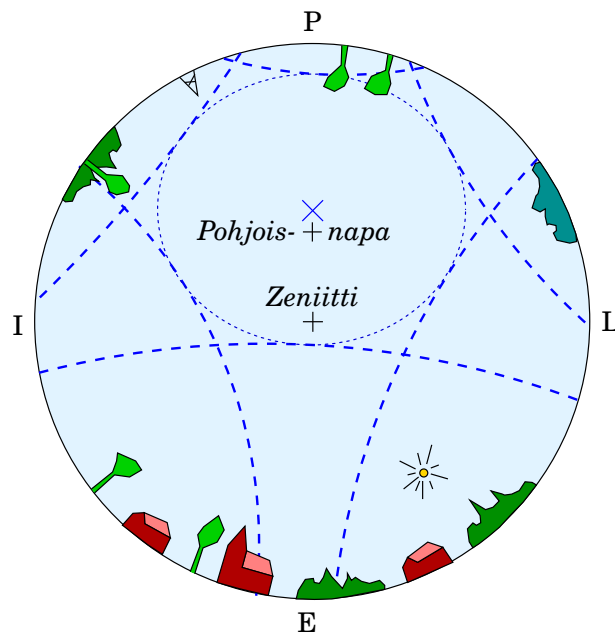
$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & & & \\ & \frac{8}{9} & & \\ & & \frac{16}{3} & -2 \\ & & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tämä on nyt tuntemattomien vektorin  $[-\hat{X} \quad -\hat{Y} \quad -\hat{Z} \quad c\hat{\Delta T}]^T$  painokerroinmatriisi (ja painoyksikön varianssia vaille vektorin varianssimatriisi).

Tässä tuloksessa näkyy myös, miten  $\hat{Z}$  ja  $\hat{\Delta T}$  ”kilpailevat” samasta informaatiosta:  $\text{VDOP} = \sqrt{q_{zz}} = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2,309$ , kun olisi ilman kellotuntematonta  $\text{VDOP} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,155$ .

<sup>26</sup>Siis: etäisyys Maan pinnalta on noin  $26560 \text{ km} - 6378 \text{ km} = 20182 \text{ km}$ , jossa maapallon säteenä on käytetty 6378 km.





KUVA 12.22. GPS-satelliittien kuusi ratatasoa Helsingin taivaalla. Zeniitin sisältävän ovaalin sisälle ei koskaan pääse GPS-satelliitteja, vaikka niitä näkyy pohjoisellakin taivaalla, tosin hyvin matalalla.



Suuren korkeutensa ansiosta satelliitit näkyvät myös ”pohjoisnavan yli” pohjoisella taivaanpuoliskolla, vaikkakin hyvin matalalla (kuva 12.22).

Satelliittiradan kuvaamiseksi tarvitaan *kuusi rata-alkiota*. Rata-alkioiksi voitaisiin valita esimerkiksi sijainnin kolme koordinaattia

$$\mathbf{r}(t_0) = x(t_0) \cdot \mathbf{i} + y(t_0) \cdot \mathbf{j} + z(t_0) \cdot \mathbf{k}$$

ja kolme nopeuskomponenttia

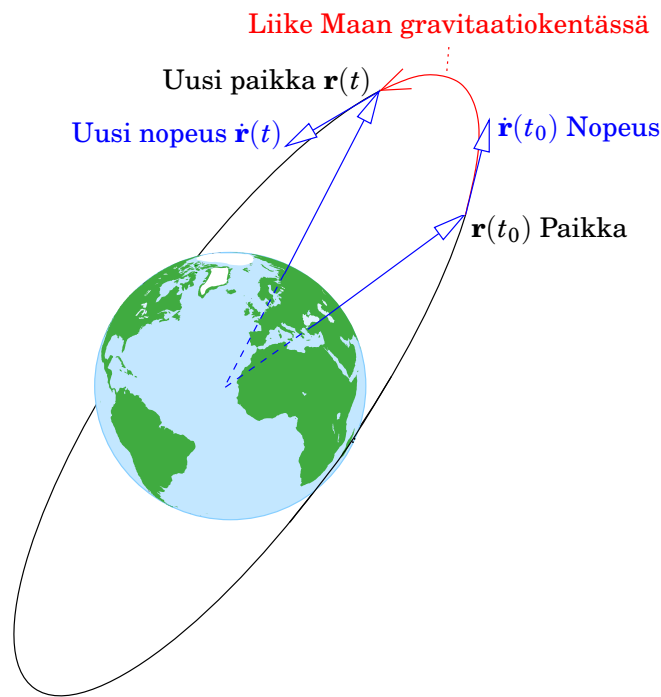
$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{x}(t_0) \cdot \mathbf{i} + \dot{y}(t_0) \cdot \mathbf{j} + \dot{z}(t_0) \cdot \mathbf{k}$$


tietyllä hetkellä  $t_0$ , käyttäen Newtonin pistenotaatiota aikaderivaatalle<sup>27</sup>. Vektorit  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  muodostavat ortonormaalien kannan. Yhtälöistä voi laskea paikan ja nopeuden,

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t) \cdot \mathbf{i} + \dot{y}(t) \cdot \mathbf{j} + \dot{z}(t) \cdot \mathbf{k},$$

jollekin myöhemmälle hetkelle  $t$ , vain laskemalla pieni askel kerrallaan eteenpäin ajassa korjaamalla sekä nopeuden gravitaatioyhtälön avulla että paikan nopeuden avulla, kuva 12.23. Maan vetovoimakenttähän tunnetaan yhtälön muodossa: vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys voidaan laskea, kun tunnetaan satelliitin paikka avaruudessa.

<sup>27</sup>Tämä pistekirjoitustapa aikaderivaatalle eli *fluxion* on Newtonin vuonna 1665 keksimä.



 KUVA 12.23. Satelliitin rataliike kuvattuna paikka- ja nopeusvektorin avulla.

Satelliittiradan geometria kuvataan tavallisesti *kuuden Keplerin rata-alkion*<sup>28</sup> avulla,  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $e$  ja  $v$ , katso kuva 17.14. Lisää yksityiskohtia antaa Poutanen (2017) osio 5.1, Hofmann-Wellenhof ym. (2001) alaosio 4.2.1 ja osio 17.7. Keplerin rata-alkioiden ja yllä kuvatun paikka- ja nopeusvektoriesitystavan välillä on suora (vaikkakin monimutkainen) yksi-yhteen vastavuus:

$$\text{Kepler: } \{\Omega, i, \omega, a, e, v\} \longleftrightarrow \{\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\}.$$

Tämä merkitsee, että annetuista Keplerin alkioista voidaan laskea satelliitin paikka ja nopeus avaruudessa. Kaikki GPS-laskentaohjelmistot osaavat tehdä tämän.

### 12.10.1 Satelliittien lähettämä navigointiviesti

Kuten jo huomautettiin, lähettävät kaikki GPS-satelliitit navigointiviestin (*navigation message*) radiosignaalin kanta-aaltoon moduloituna. Navigointiviestin modulaatiotaajuus on 50 Hz, siis jokainen sekunti sisältää 50 bittiä. Koko navigointiviesti koostuu 25 ”paketista” (*frames*), joista jokainen sisältää 1500 bittiä ja jokaisen lähettäminen kestää 30

<sup>28</sup>Siis jokaisella satelliitilla on kuusi Keplerin rata-alkiota, jotka kuvaavat sen satelliitin radan muotoa, kokoa ja asentoa sekä satelliitin paikkaa radallaan avaruudessa.

sekuntia. Näin ollen kokonaispituus on 37500 bittiä ja lähetyksen kesto 12,5 minuuttia.

Kun GPS-vastaanotin kytketään ensimmäistä kertaa päälle, alkaa satelliittien etsiminen. Heti kun ensimmäinen satelliitti on ”saatu kiinni” (*lock-on*), alkaa navigointiviestin lukeminen. *Lock-on* voi hyvinkin kestää useita minuutteja, etenkin jos vastaanottimelle syötetty likimääräinen paikka on pahasti pielessä tai laite on kuljetettu mantereelta toiselle. Sen jälkeen muiden satelliittien löytäminen käy yleensä nopeasti.

Valvontalohko lataa navigointiviestin satelliitteihin säännöllisin välein. Sen jälkeen tiedot ovat GPS-satelliittien signaalin osana kaikkien GPS-järjestelmän käyttäjien käytettävissä. Navigointiviesti koostuu kolmesta osasta.

- Ajanpitoon liittyvät tiedot, kuten satelliittien kellokorjaukset, satelliittien ”terveystiedot”, satelliitin lähettämien paikannussignaalin ja ratatietojen laatu sekä navigointiviestin tuoreus.
- Satelliitin radioteitse levittämät ratatiedot (*broadcast ephemeris*). Ne ovat Yhdysvaltojen sotilasviranomaisten laskemia ja perustuvat globaalin seuranta-asemien verkon jatkuvasti tuottamaan havaintoaineistoon. Valvontalohko lataa havainnoista lasketut kaikkien satelliittien rata-alkiot satelliitteihin, normaalisti kerran vuorokaudessa. Satelliittien muistista ne lähetetään radiosignaaliin moduloituina bittivirtana kaikkien käyttäjien käyttöön.

29 Rata-alkiot ovat Keplerin alkioit täydennettyinä kertoimilla, joilla lasketaan Maan litistyneisyyden aiheuttamia sekä sekulaarisia (lineaarisesti ajassa kasvavia, keskiliikkeeseen, ratatason kaltevuuteen<sup>29</sup> ja nousevan solmun rektaskensioon) että lyhytperiodisia (puolet satelliitin rataperiodista) radan kaltevuuteen, säteeseen ja kulmaan nousevan solmun ja satelliitin välillä (*”argument of latitude”*) kohdistuvia häiriöitä. Kyseessä on yhdeksän kerrointa, joita ei GPS-satelliittien tapauksessa voida jättää huomiotta. Käytetyn teorian juuret juontavat Yoshihide Kozai’n klassiseen artikkeliin (Kozai, 1959).

*Broadcast ephemeristä* käytetään navigointisovelluksissa ja tosiaikaisessa paikannuksessa. Ratatietoja on kätevää käyttää myös GPS-maanmittauksessa ja relatiivisessa paikannuksessa suhteellisen pienillä alueilla.

---

<sup>29</sup>Ei oikeasti sekulaarinen vaan pitkäperiodinen.



Efemerideistä lasketaan jokaisen satelliitin havaintohetken paikka avaruudessa, jotta niitä voitaisiin käyttää ”majakoina” Maan pällisen havaintoaseman paikan estimoimiseksi. Efemerideistä lasketaan myös satelliitin nopeus<sup>30</sup>. Käytetyistä laskentamenetelmistä selostetaan lisää kirjan Poutanen (2017) luvussa 5 ja kirjan Hofmann-Wellenhof ym. (2001) luvussa 4.

- o Kaikkien satelliittien *almanakka*<sup>31</sup>. Almanakan tarkoitus on antaa kaikista satelliiteista likimääräiset ratatiedot, jotka riittävät mittauskampanjoiden suunnitteluun ja auttavat vastaanotinta löytämään satelliitteja. Almanakan voimassaoloaika on monta viikkoa. Almanakka sisältää myös karkean globaalin ionosfäärimallin.



### 12.10.2 Tarkat ratatiedot

*Precise ephemeris* eli tarkat ratatiedot käyttäjä saa jonkin ajan mittauksen jälkeen suoraan Internetistä. Ratatietoja laskee ja jakelee palvelu nimeltä International GNSS Service (IGS), katso osio 12.11. Datan jakelulle käytetään standardiformaattia nimeltä SP3 (”Standard Product 3”), joka on alunperin Yhdysvaltojen National Geodetic Survey’n suunnittelema. Katso taulu 12.7.

SP3-ratatiedosto sisältää ratatiedot kolmiulotteisina paikka- ja nopeusvektoreina,

$$\begin{bmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \\ z(t_i) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{x}(t_i) \\ \dot{y}(t_i) \\ \dot{z}(t_i) \end{bmatrix},$$

epookeille  $t_i$ . Nopeusvektori on valinnainen. Tiedot on taulukoitu 15 minuutin aikavälein:  $t_{i+1} - t_i = 15^m$ . Näistä interpoloidaan satelliitin paikka  $\mathbf{r}(t)$  ja nopeus  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  mittaushetkellä  $t$  Lagrangen<sup>32</sup> interpoloinnin avulla. Näiden tietojen lisäksi ratatiedoista löytyy satelliitin kellon käyttäytymistä kuvaavat ja ratatietojen tarkkuuteen liittyvät tiedot ynnä muuta.

<sup>30</sup>Satelliitin nopeutta tähän ei välttämättä tarvittaisi, mutta se tarvitaan signaalin taajuuden *dopplersiirtymän* laskentaan. Vastaanottimen on tunnettava jokaisen satelliitin dopplersiirtymä satelliitin signaalin kiinni saamiseksi ja pitämiseksi.

<sup>31</sup>*Almanakka* ei ilmeisesti ole arabialaisperäinen sana, vaikka on sen näköinen.

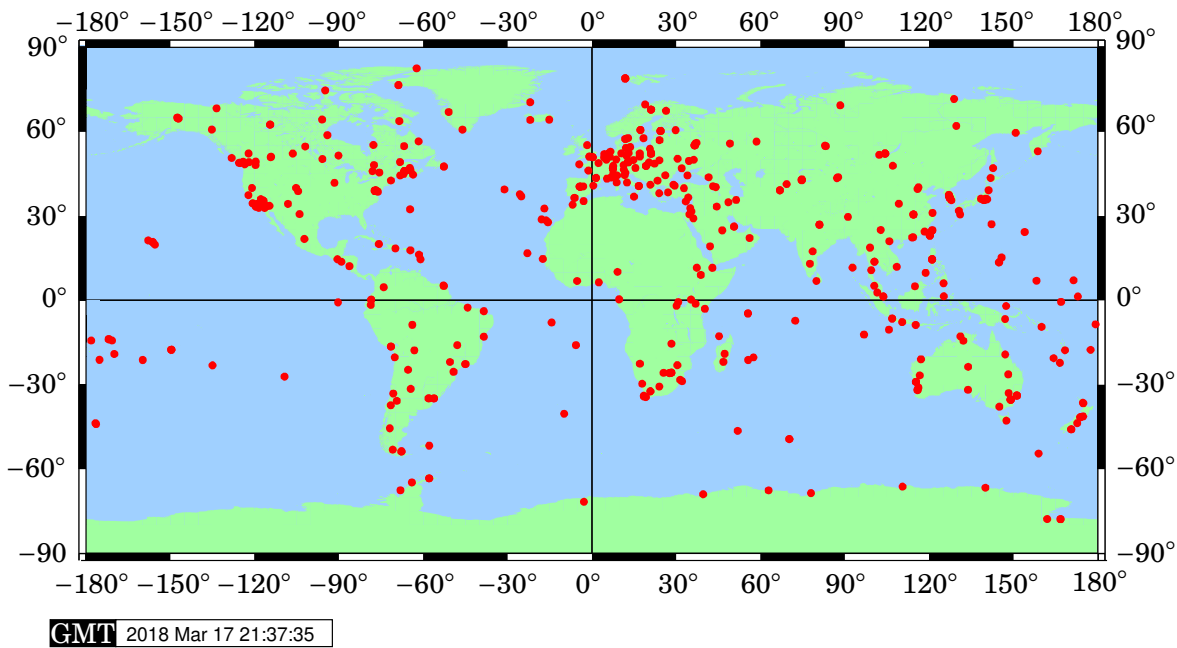
<sup>32</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) oli ranskalainen matemaatikko, tähtitieteilijä, klassisen mekaniikan kehittäjä ja yksi Eiffel-tornin 72 nimestä, *Eiffel Tower, 72 names*.



TAULU 12.7. *Precise ephemeris* alkuperäisessä SP3-formaatissa. **Satelliit-**  
**tien numerot**, **paikkavektorit**, **nopeusvektorit**, **kellokorjaus** ja **kellon käynti**,  
**päivämäärä**, **aika** (ja niin edelleen). Esimerkkitiedoston alku © US National  
Geodetic Survey.

```
#aV1994 12 17 0 0 0.00000000 96 d ITR92 FIT NGS
## 779 518400.00000000 900.00000000 49703 0.00000000000000
+ 25 1 2 4 5 6 7 9 12 14 15 16 17 18 19 20 21 22
+ 23 24 25 26 27 28 29 31 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 7 6 5 5 5 5 5 5 5 6 5 5 5 5 6 5 5
++ 5 5 6 5 5 5 5 5 5 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%C CC CC CCC CCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC
%C CC CC CCC CCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC CCCC
%f 0.00000000 0.0000000000 0.000000000000 0.0000000000000000
%f 0.00000000 0.0000000000 0.000000000000 0.0000000000000000
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
/* CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
/* CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
/* CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
/* CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
* 1994 12 17 0 0 0.00000000
P 1 16258.524750 -3529.015750 -20611.427050 -62.540600
V 1 -6560.373522 25605.954994 -9460.427179 -0.024236
P 2 -21998.652100 -8922.093550 -12229.824050 -131.326200
V 2 -9852.750736 -12435.176313 25738.634180 -0.029422
P 4 -26019.547600 4809.810900 -2508.578200 3.544600
V 4 2559.038002 -3340.527442 -31621.490838 0.016744
*
*
*
P 29 -1638.431050 -24391.479200 10455.312650 3.690300
V 29 5754.005457 -12065.761570 -27707.056273 0.003537
P 31 6265.255800 -25687.986950 -753.359000 70.830800
V 31 3053.344058 -63.091750 31910.454757 0.033749
* 1994 12 17 0 15 0.00000000
P 1 15716.820135 -1169.850490 -21281.578766 -62.542746
V 1 -5439.955846 26738.341429 -5409.793390 -0.023226
P 2 -22813.261065 -9927.616864 -9816.490189 -131.328686
V 2 -8178.974330 -9924.329320 27813.754308 -0.025238
*
*
```





KUVA 12.24. IGS:n seuranta-asemat, tilanne 2018 (aineisto © IGS).

Formaatin nykyversio on [SP3-c](#), joka mahdollistaa myös [GLONASS](#)-satelliittien ratatietojen jakelun. Se on tekstiformaatti ja ihmisille lukukelpoinen.

Tunnetuin lähde on ollut International [GNSS](#) Service jo vuodesta 1992. Palvelun tuottamat tarkat radat julkaistaan Internetissä pari viikkoa havaintojen teon jälkeen.

Tarkkojen ratatietojen lisäksi tuotetaan myös ”*rapid orbits*” -ratkaisuja, jotka ovat lähes yhtä tarkkoja kuin *precise ephemeris*, mutta jotka tuotetaan nopeammin.

Uusimmat ”*ultra-rapid*” -ratkaisut ovat satelliittien rataennusteita vuorokauden verran eteenpäin, jolloin niitä voidaan käyttää tosiaikaisiin sovelluksiin.

Tarkat ratatiedot, toisin kuin *broadcast ephemeris*, jaellaan Internetin välityksellä eikä siis [GPS](#)-satelliittien kautta. Ratatietoja tuottavat tahot ovat riippumattomia Yhdysvaltojen puolustusviranomaisista.

Toisin kuin *broadcast ephemeris*, on *precise ephemeris* hyvin lähellä satelliittien todellisia ratoja. *Broadcast ephemeris* sisältää ennusteita, jotka ovat vähemmän tarkkoja.



## 12.11 International GNSS Service IGS

**IAG** (International Association of Geodesy) perusti International **GNSS** Servicen (**IGS**) vuonna 1990 ja siitä tuli **IAG**:n virallinen palvelu vuonna 1994. Palvelun päätavoitteena on tuottaa tarkkoja ratatietoja, efemeridejä, *geodynamiikan*, kuten kiinteän Maan liikkeiden, tutkimuksen tueksi. Kuitenkin sen tuotteita käytetään paljon laajemmin monella geofysiikan alalla.

**IGS**:n toimintaa johtaa Central Bureau, toimipaikkana **JPL** (Jet Propulsion Laboratory) Yhdysvalloissa. Vuonna 2015 **IGS** käytti maailmanlaajuisesti noin 500 **GNSS**-aseman havaintoja ratatietojensa laskemiseksi. Luku on kasvanut vain hitaasti viime vuosien aikana.

Varsinaisen laskennan suorittaa seitsemän eri laskentakeskusta, ja ratatiedot ovat käytettävissä pari viikkoa mittausajankohdan jälkeen. Laskettuihin tietoihin kuuluu myös satelliittien kellokorjausparametrit. Erikseen julkaistaan Maan asentoparametrit (**EOP**, *Earth orientation parameters*) napaliike ja vuorokauden pituuden (**LoD**) vaihtelut. Katso **IGS Central Bureau**.



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Selosta, miten hyperbolinen, **Deccan** kaltainen paikannusjärjestelmä toimii.
- 2) Miksi **GPS** lähettää kahdella eri kanta-aallon taajuudella?
- 3) Miten maapallon ilmakehän tihein osa, troposfääri, vaikuttaa **GPS**:n radioaaltojen kulkuun? Miksi säätieteilijät ovat kiinnostuneita siitä?
- 4) Miten on mahdollista, että kaikki **GPS**-satelliitit lähettävät samoilla taajuuksilla? Miten vastaanotin erottaa eri satelliittien signaalit toisistaan?
- 5) Selosta, miten **GPS**:n kanta-aallolle moduloidut pseudosatunnaiskoodit mahdollistavat pseudoetäisyyksien mittaamisen. Mikä on korreloinnin rooli?
- 6) Mikä on monitie ja mitä keinoja on olemassa sen vaikutuksen minimoimiseksi?
- 7) Selosta käsite **DOP**, *dilution of precision*.
- 8) Miksi geodeetit ovat kiinnostuneita mittaamaan **GPS**-signaalin kan-





TAULU 12.8. DOP-laskentaskripti.

```
% Dilution of precision (DOP):
% Osa 1. Aja ohjelma. Mitä virheilmoitus kertoo sinulle?
% Mitä voit sanoa VDOP:n arvosta?
% Satelliittien paikat, atsimuutti A ja korkeuskulma h taivaalla (alla).
% Osa 2. Muuta ensimmäisen satelliitin korkeuskulma 30 -> 60 asteeksi.
% Aja uudelleen. Kirjoita muistiin HDOP:n ja VDOP:n arvot.
% Miksi ajo nyt onnistuu?
A1 = 0; h1 = 30;
A2 = 90; h2 = 30;
A3 = 180; h3 = 30;
A4 = 270; h4 = 30;
conv = pi/180;
% Rakennematriisi A (alla)
% Osa 3. Muuta ohjelma niin, että se sisältää viidennen satelliitin,
% paikka taivaalla A5 = 0, h5 = 45.
A = [cos(A1*conv)*cos(h1*conv), sin(A1*conv)*cos(h1*conv), sin(h1*conv), 1;
cos(A2*conv)*cos(h2*conv), sin(A2*conv)*cos(h2*conv), sin(h2*conv), 1;
cos(A3*conv)*cos(h3*conv), sin(A3*conv)*cos(h3*conv), sin(h3*conv), 1;
cos(A4*conv)*cos(h4*conv), sin(A4*conv)*cos(h4*conv), sin(h4*conv), 1];
N = A'*A;
Ninv = inv(N)
HDOP = sqrt(Ninv(1,1) + Ninv(2,2));
VDOP = sqrt(Ninv(3,3));
% Osa 4. Lisää ohjelmaan PDOP-arvon laskenta ja tulostus.
% PDOP = Position dilution of precision. Katso määritelmä
% luentomonisteesta.
fprintf(1, 'HDOP = %20.10f\n', HDOP);
fprintf(1, 'VDOP = %20.10f\n\n', VDOP);
% Osa 5. Kokeile satelliitteille eri paikat taivaalla
% saavuttaaksesi mahdollisimman pieni PDOP-arvo.
```

toaallon vaihetta, vaikka se on koodimittausta vaikeampaa?

- 9) Mitä tarkoittaa *broadcast ephemeris*, kuka tietoa generoi ja miten käyttäjä saa tiedot haltuunsa?
- 10) Mitä tarkoittaa *precise ephemeris*, kuka tietoa generoi ja miten käyttäjä saa tiedot haltuunsa?
- 11) Mitkä ovat taulussa 12.3 havaintosuureiden *L1*, *L2*, *P1*, *P2* ja *C1* yksiköt? Älä etsi RINEX-formaatin määritelmää netistä!





## Harjoitus 12–1: DOP-suureiden laskenta

Tässä harjoituksessa tulet laatimaan ohjelma, joka osaa laskea eri DOP-arvot, jos GPS:n mittausgeometria on annettu, eli satelliittien paikat taivaalla, niiden atsimuutit  $\alpha$  ja korkeuskulmat  $\eta$ .

Saat käyttää suosikkipikavalmistuskieltäsi: MATLAB™, GNU Octave, Scilab (Scilab Enterprises), R (The R Project for Statistical Computing), jopa Excel™. Älä käytä ulkoisia datatiedostoja, vaan laita satelliittien paikat suoraan lähdekoodiin.

- 1) Mielivaltaiselle satelliittien lukumäärälle, kirjoita tai sovelta koodia rakennematriisin  $A$  ja normaali- eli painomatriisin  $P_{xx} = A^T A$  muodostamiseksi.  
Voitaisiin myös muodostaa, havaintojen vektorista  $\ell$ , normaaliyhtälöryhmän oikean puolen,  $A^T \ell$ , mutta me emme sitä tässä tarvitse. DOPin kauneus on, että sitä voidaan käyttää mittausten suunnittelussa, ennen kuin on saatu mitatuksi yhtäkään oikeaa havaintoa.
- 2) Anna ohjelmisto tulostaa kuvaruutuun eri DOP-suureet.
- 3) Oleta nyt, että on viisi satelliittia, yksi enemmän kuin tarvittava minimimäärä paikannuksessa. Leiki satelliittien paikkojen  $(\alpha_i, \eta_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$  kanssa minimoidaksesi yhden DOP-vaihtoehtoista, vaikkapa PDOP. Mikä on paras löytämäsi geometria viidelle satelliitille?
- 4) Varmaan fuskasit hieman... horisontin alapuolella olevia GPS-satelliitteja ei voida havaita. Siis sovelta nyt rajaehto  $\eta > 5^\circ$ .
- 5) Yritä PDOPin jälkeen minimoida HDOP ja VDOP.

Mitä olet oppinut?



# GPS-havaintojen käsittely

## 13

[...] everything is related to everything else, but near things are more related than distant things. [...]

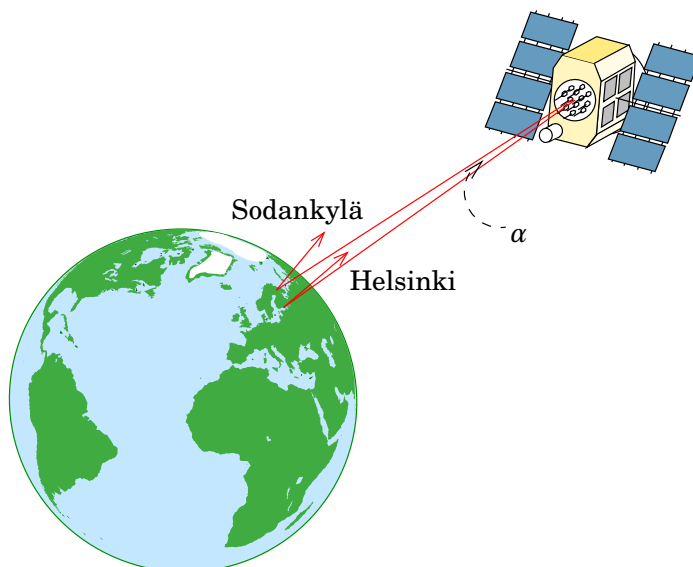
---

Maantieteen ensimmäinen laki, Waldo R. Tobler (1970)



### 13.1 Erotushavaintojen muodostus

Geodeettisissa GPS-mittauksissa ja GPS:n maanmittaussovelluksissa halutaan tavallisesti mitata kahden pisteen, vaikkapa paikallisen geodeettisen verkon pisteparin, välinen sijaintiero. Pisteiden välinen etäisyys voi olla luokkaa 100–1000 km. Tämä on paljon lyhyempi matka kuin etäisyys GPS-satelliiteille, jotka kiertävät noin 20 000 km korkeudella. Katso kuva 13.1.



KUVA 13.1. "Yhteinen virhe" -olettamus.

Satelliitista nähtynä havaintopaikkojen välinen kulma  $\alpha$  on hyvin pieni, esimerkkitapauksessa (Helsinki ja Sodankylä) vain  $2^\circ$ ! Siksi monet virheet ovat molemmille paikoille osittain yhteisiä, samanlaisia ja suunnilleen yhtä suuria. Satelliitin kellon virheen eli *kellopoikkeaman* vaikutus on jopa identtinen molemmassa havaintopaikassa. Ratavirheen vaikutus on geometrian takia likimäärin sama, ionosfäärin ja troposfäärin aiheuttamat virheet ovat myös samanlaisia, geometrian samanlaisuuden sekä ilmakehän olosuhteiden pitkän matkan *spatiaalikorrelaation*<sup>1</sup> ansiosta.

Toisaalta on kuitenkin muistettava, että Helsingin ja Sodankylän *luotiviivojen suuntien ero* on jo  $7^\circ$ , ja satelliitin korkeuskulma paikallisen horisontin yläpuolella voi olla jo siitä syystä saman verran erilainen.

”Yhteinen virhe” -olettamuksen perusteella muodostetaan kahden havaintopisteen ja yhden satelliitin havaintojen *erotuksia*. Näissä erotuksissa monet virheet häviävät kokonaan tai pienenevät olennaisesti. Erotuksen muodostaminen on suoraviivaista: vähennetään vain kaksi samanaikaisesti tehtyä raakahavaintoa toisistaan, kumpikin poimittuna taulun 12.3 näköisestä havaintotiedostosta.

Erotukset voivat olla *yksinkertaisia* — joko kahden vastaanottimen tai kahden satelliitin välillä, jolloin voidaan käyttää visuaalisesti osuvia symboleja  $\Delta$  tai  $\nabla$  — *kaksinkertaisia* tai *kolminkertaisia*, peräkkäisten mittausepookkien välisiä, symboli  $\delta$ . Katso kuva 13.2.

Erityisesti meitä kiinnostaa erotustyyppien muodostuksen vaikutus virheiden suuruuteen. Katso taulukko 13.1.



### 13.1.1 Yksinkertaiset erotukset

Selostetaan yhtälöiden avulla, miten yksinkertainen erotus lasketaan alkuperäishavainnoista. Tulemme näkemään, miten toiset systemaattiset virheet eliminoituvat kokonaan ja toiset pienentyvät huomattavasti.

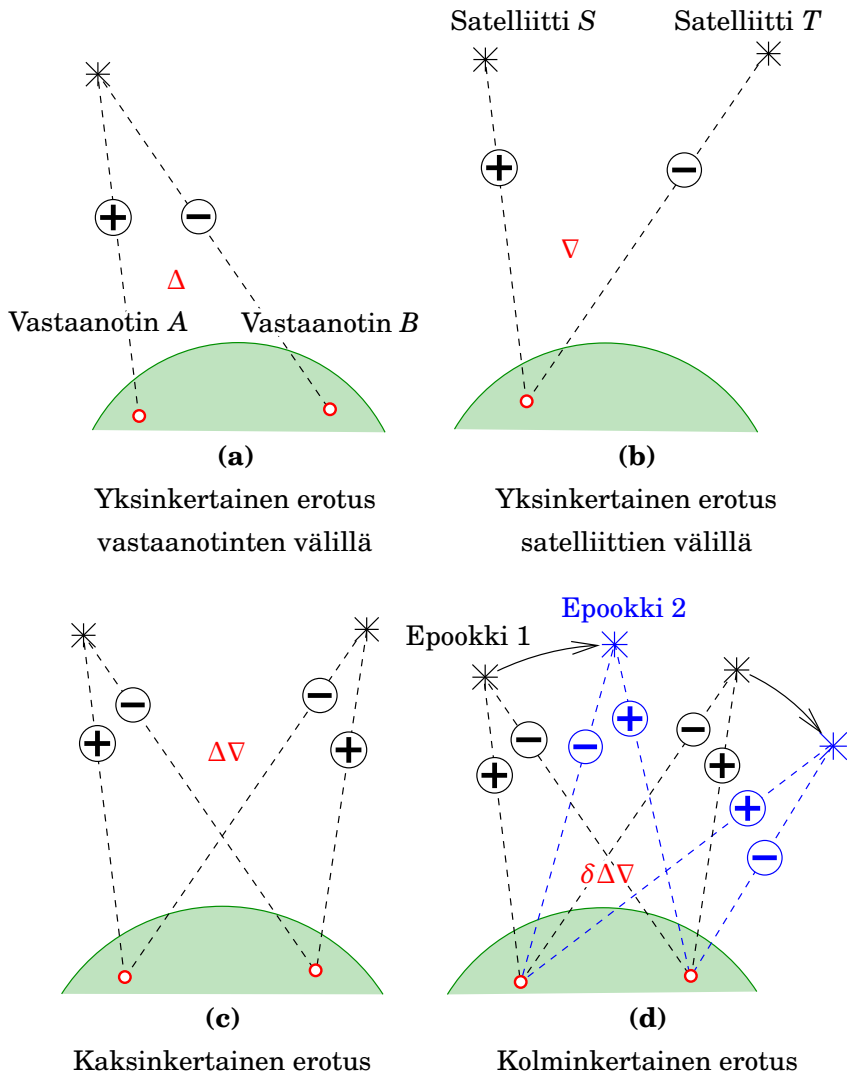
**Yksi vastaanotin (havaintoja)  $A$ , kaksi satelliittia  $S, T$**

$$p_A^{ST} \stackrel{\text{def}}{=} p_A^T - p_A^S, \quad P_A^{ST} \stackrel{\text{def}}{=} P_A^T - P_A^S.$$

<sup>1</sup>Tällä tarkoitetaan, että olosuhteet muuttuvat vain hitaasti paikan mukaan. Helsinki ja Sodankylä ovat lähes samassa ilmastovyöhykkeessä, ja jos Pohjois-Euroopan yllä on korkea- tai matalapaine, vaikuttaa se varmaan sekä Helsinkiin että Sodankylään. Sääilmiöiden *synoptinen skaala* (Wikipedia, Synoptiikka) on luokkaa 1000 km.







KUVA 13.2. Erityypisten erotushavaintojen muodostaminen ja niille käytetyt symbolit.

Kirjoita pseudoetäisyyden havaintoyhtälö 12.1 tässä laajennetussa kirjoitustavassa:

$$p_A^S = \rho_A^S + c (\Delta T_A - \Delta t^S) + d_{\text{ion},A}^S + d_{\text{trop},A}^S,$$

$$p_A^T = \rho_A^T + c (\Delta T_A - \Delta t^T) + d_{\text{ion},A}^T + d_{\text{trop},A}^T.$$

On otettu huomioon, että kellopoikkeamista  $\Delta t$  on *satelliittikohtainen*,  $\Delta T$  taas *havaintoja-* eli *vastaanotinkohtainen*. Vähentämällä saadaan erotussuure

$$p_A^{ST} = \rho_A^{ST} - c \Delta t^{ST} + d_{\text{ion},A}^{ST} + d_{\text{trop},A}^{ST},$$



TAULUKKO 13.1. Miten erotushavaintojen muodostuminen GPS-havainnoista vaikuttaa eri virheiden suuruuteen.

Virhelähde	Erotuksen tyyppi			
	$\nabla^{ST}$	$\Delta_{AB}$	$\Delta_{AB}\nabla^{ST}$	$\delta_{12}\Delta_{AB}\nabla^{ST}$
Satelliittirata $\{\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\}$	-	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\downarrow$
Satelliitin kello $\Delta t$	-	0	0	0
Vastaanottimen kello $\Delta T$	0	-	0	0
Ionosfääri $d_{\text{ion}}, D_{\text{ion}}$	-	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\downarrow$
Troposfääri $d_{\text{trop}}, D_{\text{trop}}$	-	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\downarrow$
Kokonaislukutuntemattomat $N$	-	-	-	0*

- $\downarrow$  Virhe pienenee olennaisesti, etenkin jos mittauspisteiden välimatka on lyhyt  
 $\downarrow\downarrow$  Virhe pienenee vieläkin rajummin  
 0 Virhe eliminoiduu kokonaan  
 0\* Virhe eliminoiduu, ellei tapahdu vaihekatko eli *cycle slip*.

jossa pätevät määritelmät

$$\begin{aligned}
 \rho_A^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} \rho_A^T - \rho_A^S, & d_{\text{ion},A}^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} d_{\text{ion},A}^T - d_{\text{ion},A}^S, \\
 \Delta t^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta t^T - \Delta t^S, & d_{\text{trop},A}^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} d_{\text{trop},A}^T - d_{\text{trop},A}^S.
 \end{aligned}$$

Tästä on kadonnut vastaanottimen  $A$  kellopoikkeama  $\Delta T_A$ , koska vastaanottimen ominaisuutena se on sama eri satelliiteille ja kumoutuu, kun lasketaan satelliittien välinen erotushavainto.

Tämä on käytännössä tärkeää, koska vastaanottimen kello perustuu tavallisesti huokeaan kvartsioskillaattoriin, jonka *käynti* on niin huomattava, että sen tulee ottaa huomioon.

Samanlainen havaintoyhtälö, joka seuraa yhtälöstä 12.2, pätee myös raajalle kantoaallon vaiheen havaintosuureelle:

$$\begin{aligned}
 P_A^{ST} &= \lambda \frac{\phi}{2\pi} = \bar{P}_A^{ST} - \lambda N_A^{ST} = \\
 &= \rho_A^{ST} - c\Delta t^{ST} + D_{\text{ion},A}^{ST} + D_{\text{trop},A}^{ST} - \lambda N_A^{ST},
 \end{aligned}$$

jossa saa olettaa  $\phi \in [0, 2\pi)$ , ja

$$N_A^{ST} \stackrel{\text{def}}{=} N_A^T - N_A^S$$

on kokonaislukutuntemattomien eli ambiguiteettien erotus satelliittien  $S$  ja  $T$  välillä. Ellei tapahdu vaihekatkoa ("*cycle slip*"), tämä on vakio ajassa.



### Kaksi vastaanotinta $A, B$ , yksi satelliitti $S$

$$p_{AB}^S \stackrel{\text{def}}{=} p_B^S - p_A^S, \quad P_{AB}^S \stackrel{\text{def}}{=} P_B^S - P_A^S. \quad (13.1)$$

Tästä eliminoiduu samalla tavalla kokonaan satelliitin kellopoikkeama  $\Delta t$ : se on satelliitin eikä vastaanottimen ominaisuus ja häviää, kun lasketaan saman satelliitin eri vastaanotinten välinen erotussuure.

Lisäksi ratavirheiden, ionosfäärin ja troposfäärin vaikutukset vähenevät merkittävästi: *lyhyillä vastaanotinten välisillä matkoilla*  $AB$  pätee

$$|\rho_{AB}^S| \stackrel{\text{def}}{=} |\rho_B^S - \rho_A^S| \ll |\rho_A^S| \approx |\rho_B^S|$$

ja jos  $AB \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} d_{\text{ion},AB}^S &\stackrel{\text{def}}{=} d_{\text{ion},B}^S - d_{\text{ion},A}^S \rightarrow 0, \\ d_{\text{trop},AB}^S &\stackrel{\text{def}}{=} d_{\text{trop},B}^S - d_{\text{trop},A}^S \rightarrow 0, \\ D_{\text{ion},AB}^S &\stackrel{\text{def}}{=} D_{\text{ion},B}^S - D_{\text{ion},A}^S \rightarrow 0, \\ D_{\text{trop},AB}^S &\stackrel{\text{def}}{=} D_{\text{trop},B}^S - D_{\text{trop},A}^S \rightarrow 0, \end{aligned}$$

koska

- Mittausgeometria on lähes sama pisteessä  $A$  ja pisteessä  $B$ , katso kuva 13.1.
- Ilmakehän olosuhteet eivät paljon muutu pisteiden  $A$  ja  $B$  välillä: mittaussäteet kulkevat lähes samanlaisen ilmamassan läpi.
- Satelliitin  $S$  korkeuskulma taivaalla on pisteeltä  $A$  katsottuna lähes sama kuin pisteeltä  $B$  katsottuna.



#### 13.1.2 Muut erotussuureet

Samalla tavalla, yhdistämällä yllä kuvattuja toimintoja, voi laskea myös kaksinkertaisia ja kolminkertaisia erotuksia. Yhtälöt ovat monimutkaisen näköisiä mutta menettelytapana suoraviivainen, katso yhteenveto taulussa 13.2. Taulun yhtälöt johdetaan suoraan alkuperäisistä havaintoyhtälöistä 12.1 ja 12.2 yhteen- ja vähennyslaskulla.

Kaksoiserotuksia käytetään laajasti geodeettisissa ohjelmistopakeeteissa staattisten GPS-verkon mittausten käsittelyyn. Kaksoiserotukset konstruoidaan toimistossa mittauksista, jotka kerättiin samanaikaisesti useassa paikassa yhteisistä satelliiteista.





TAULU 13.2. GPS:n havainto- ja erotussuureet, yhteenveto. Yhtälöissä on käytetty notaatioita  $d = d_{\text{ion}} + d_{\text{trop}}$ ,  $D = D_{\text{ion}} + D_{\text{trop}}$ . Huomaa johdonmukainen ylä- ja alaindeksien käyttö.

Pseudoetäisyys $p$	Kantaaallon vaihe $\phi$ , vastaava pseudoetäisyys $P$
$p_A^S = \rho_A^S + c(\Delta T_A - \Delta t^S) + d_A^S$	$P_A^S = \rho_A^S + c(\Delta T_A - \Delta t^S) + D_A^S - \lambda N_A^S$
Yksinkertainen erotus, satelliittien välillä:	
$p_A^{ST} = \rho_A^{ST} - c\Delta t^{ST} + d_A^{ST}$	$P_A^{ST} = \rho_A^{ST} - c\Delta t^{ST} + D_A^{ST} - \lambda N_A^{ST}$
Yksinkertainen erotus, vastaanotinten välillä:	
$p_{AB}^S = \rho_{AB}^S + c\Delta T_{AB} + d_{AB}^S$	$P_{AB}^S = \rho_{AB}^S + c\Delta T_{AB} + D_{AB}^S - \lambda N_{AB}^S$
Kaksinkertainen (kaksois-) erotus:	
$p_{AB}^{ST} = \rho_{AB}^{ST} + d_{AB}^{ST}$	$P_{AB}^{ST} = \rho_{AB}^{ST} + D_{AB}^{ST} - \lambda N_{AB}^{ST}$
Kolminkertainen (kolmois-) erotus:	
$\delta_{12}p_{AB}^{ST} = \delta_{12}\rho_{AB}^{ST} + \delta_{12}d_{AB}^{ST}$	$\delta_{12}P_{AB}^{ST} = \delta_{12}\rho_{AB}^{ST} + \delta_{12}D_{AB}^{ST} - \lambda \cdot (\text{vaihekatkoja})$

Kolminkertaisia erotuksia, laskettuna vähentämällä toisistaan peräkkäisillä ajanhetkillä eli epookeilla saadut kaksoiserotukset, käytetään lähes yksinomaan kantaallon vaihemittausten puhdistamiseen, koska ne ovat ainutlaatuisen kykeneviä löytämään vaihekatkoja (*“cycle slips”*), satelliitin ja vastaanottimen välisen radioyhteyden katkoksen aiheuttamia äkkinäisiä kokonaislukutunteuttomien eli ambiguuteettiarvojen muutoksia.

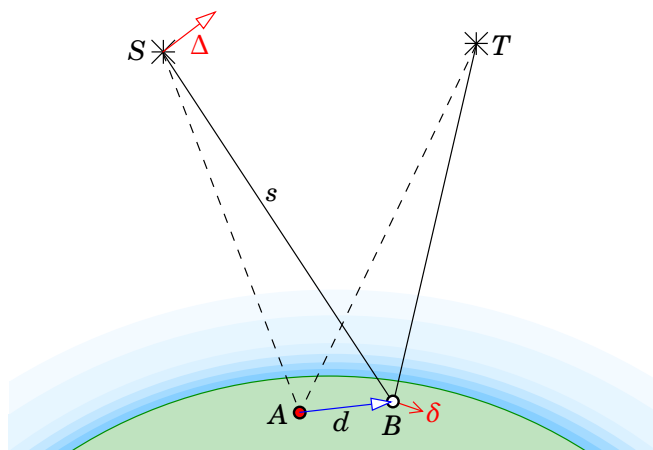


## 13.2 Relatiivinen (staattinen) GPS

Kahden lähellä toisiaan olevan havaintopaikan  $A$  ja  $B$  välinen sijaintiero eli vektori  $\mathbf{R}_{AB} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$  voidaan ratkaista tarkemmin kuin kummankin paikan absoluuttinen sijainti  $\mathbf{R}_A$  tai  $\mathbf{R}_B$  Maan massakeskipisteen suhteen. Syy tähän on eri virhelähteiden vaikutuksen ainakin osittainen kumoutuminen samanaikaisista havainnoista, kun virheet ovat samanlaisia molemmissa pisteissä. Laskentaa varten käytetään kahden havaintopaikan välisiä erotushavaintoja  $p_{AB} = p_B - p_A$ ,  $P_{AB} = P_B - P_A$ , joissa kumoutuminen jo tapahtuu. Kuten jo näytettiin kuvassa 13.1, ovat satelliittien paikat taivaalla melkein samoja havaintopaikoista  $A$  ja  $B$  nähtynä, ja myös ilmat  $A$ :n ja  $B$ :n yläpuolella ovat varmaan aika samanlaisia.

Paljonko esimerkiksi satelliittien  $S$  ja  $T$  ratavirhe vaikuttaa vektorin





KUVA 13.3. Kaksoiserotus, lyhyt GPS-vastaanotinten välinen etäisyys.

eli sivun  $AB$  määritykseen? Katso kuva 13.3. Suuruusluokan nyrkki-sääntö sanoo, että ratavirheen aiheuttama pisteen  $B$  paikannusvirhe  $\delta$  pisteen  $A$  suhteen on

$$\delta \approx \frac{d}{s} \Delta,$$

jossa  $\Delta$  on oletettu ratavirhe. Tämä on vain karkea arvio. Tiedetään, että  $s \gtrsim 20000 \text{ km}$ .

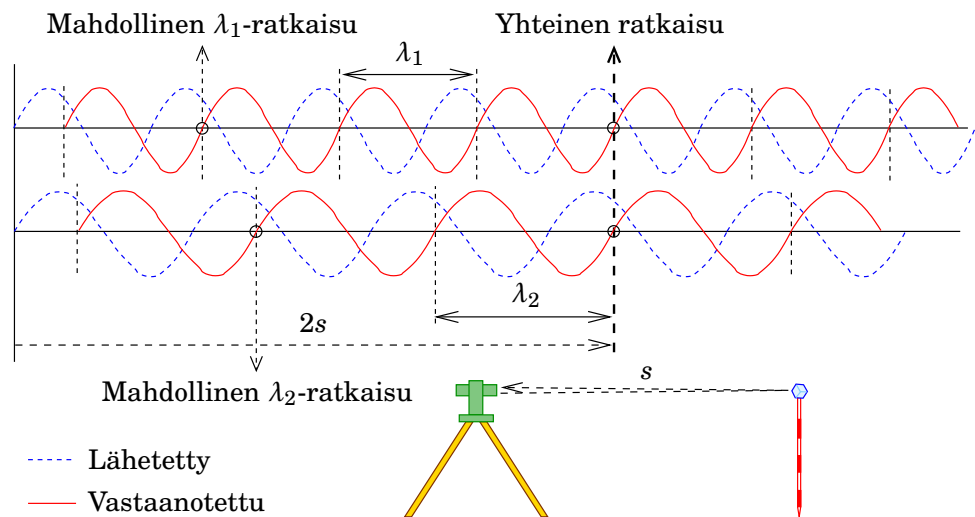
Taulukossa 13.3 annetut arvot ratavirheelle, 1 m ja 2 cm, vastannevat tämän hetken *broadcast*<sup>2</sup> ja *precise*-ratatietojen tarkkuuksiin. Johtopää-tös on, että



TAULUKKO 13.3. Ratavirheen, vektorin pituuden ja paikannusvirheen välinen likimääräinen yhteys.

Sivun pituus $d$ (km)	Ratavirhe $\Delta$ (m)	Paikannusvirhe $\delta$ (mm)
1	1	0,05
10	1	0,5
100	1	5
1000	1	50
1	0,02	0,001
10	0,02	0,01
100	0,02	0,1
1000	0,02	1

<sup>2</sup>Tämä on karkea arvio. *Broadcast*-ratojen laatu on GPS-järjestelmän alkuaajoista pa-rantunut, hitaasti mutta varmasti. Muut GNSS-järjestelmät, kuten GLONASS, Galileo ja BeiDou, suoriutuvat suunnilleen samalla tasolla, tai ehkä hieman heikommin (Monten-bruck ym., 2015).



KUVA 13.4. Yksiulotteinen kokonaislukutuntemattomien ratkaisu etäisyysmittarin tapauksessa. Katso myös kuva 7.10. Kuva näyttää tilanteen, jossa lähetetyt vaiheet menevät nollan läpi positiiviseen suuntaan. Oletetaan, että sillä hetkellä kaikki vastaanotettujen vaiheiden mittausravot ovat myös nolla, katso kuva 7.9.

*GPS-maanmittaustyössä pienillä alueilla ( $\lesssim 100\text{ km}$ ) satelliittien radat voidaan olettaa tunnetuiksi.*

Geodeettisessa työssä lasketaan havainnoista pisteessä  $A$  ja  $B$  ensin kaksinkertaisia erotuksia  $P_{AB}^{ST}$ . Kun on kyse kantoaallon vaiheen havainnoista, on ambiguiteetit eli kokonaislukutuntemattomat  $N_{AB}^{ST}$  ratkaistava ensin. Sen jälkeen lasketaan havainnoista *vektori*

$$\bar{\mathbf{R}}_{AB} = \begin{bmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \\ Z_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix}$$

pisteiden välillä. Siksi nimitys *relatiivinen GPS-* (tai *GNSS-*) *mittaus*.

Tämän vektoriratkaisun yleistys on usean mittauspisteen havainnon eli *geodeettisen verkon* mittaus ja laskenta.

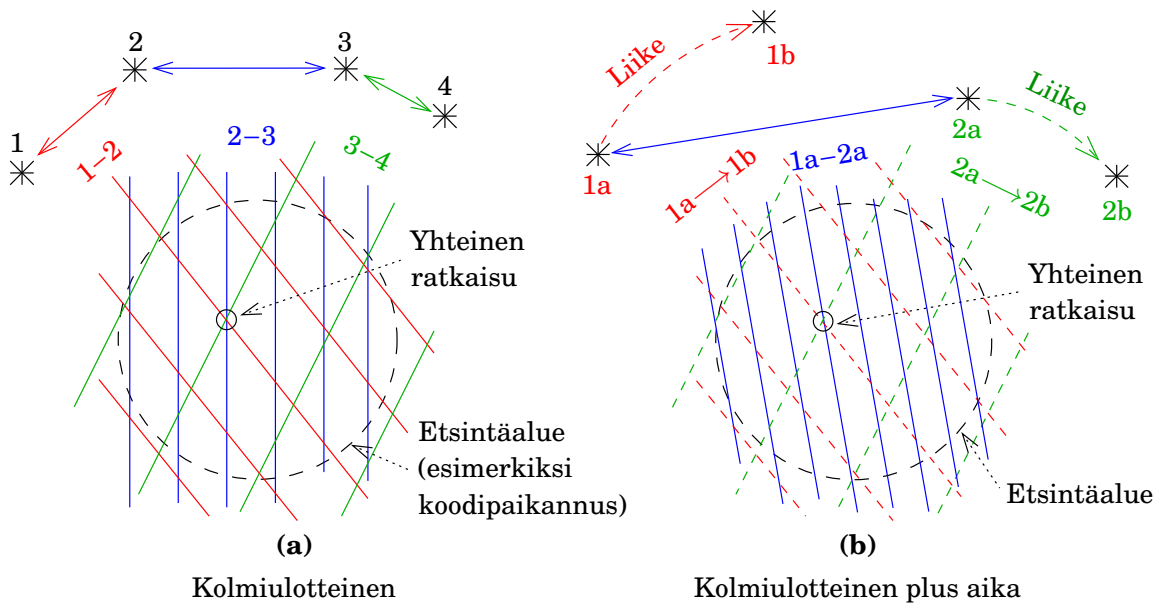


### 13.3 Kokonaislukutuntemattomien kiinnitys

Kokonaislukutuntemattomien eli *ambiguiteettien* ratkaiseminen on GPS:n kantoaallon vaihehavaintojen käytön edellytys. Menetelmiä löytyy useita.

- *Etäisyysmittauslaitteet* ratkaisevat kokonaislukutuntemattomat mittaamalla usealla eri aallonpituudella. Kuvassa 13.4, kuten ai-





KUVA 13.5. GPS-laskennan eri kokonaislukutuntemattomien ratkaisumenetelmiä. Värilliset viivakimput — itse asiassa katkaistut hyperbelien kimput eli kolmiulotteisesti pyörähdyshyperboloidien kimput — ilmaisevat vastaanotinten relatiivisten sijaintiratkaisujen joukot, jotka ovat yhteensopivia saatujen kaksoiserotushavaintojen kanssa käyttäen joko satelliittiparia tai yhtä satelliittia kahtena eri aikana.

emmin kuvassa 7.10, esitetään, millä tavalla tämä palapeli voidaan ratkaista.

GPS-satelliitti lähettää kahdella taajuudella  $L_1$  ja  $L_2$ . Kun taajuuksia on kaksi, voidaan ne yhdistää tavalla, joka helpottaa ambiguiteettien ratkaisua lyhyillä matkoilla. Lasketaan *vaihe-ero*  $\phi_w = \phi_1 - \phi_2$  vaihemittausten  $L_1$  ja  $L_2$  välillä. Se on kuin käytäisi kantoaaltoa, jonka taajuus on  $f_w = f_1 - f_2 = 347,82 \text{ MHz}$ , ja vastaava ”aallonpituus”  $\lambda_w = c/f = 86 \text{ cm}$ . Tätä menetelmää kutsutaan leveäkujaratkaisuksi (engl. *wide-laning*).

Leveäkujaratkaisu toimii vain lyhyillä matkoilla, koska muuten tuntematon ionosfäärin vaikutuksen erotus kahden mittauspaikan välillä kasvaa liian suureksi.

Koodihavainto antaa pseudoetäisyyden jo noin metrin tarkkuudella, minkä jälkeen leveäkujamenetelmä antaa kokonaislukutuntemattomat ja vaihe-erosta  $\phi_w$  saadaan ”ambiguiteettivapaa” pseudoetäisyys senttimetrin tarkkuudella.

- Käytetään useita satelliitteja. Tällä hetkellä Maata kiertää yli 30 GPS-satelliittia, joista melkein hetkellä millä tahansa 6–10 ovat paikallisella taivaalla horisontin yläpuolella. Tämä on monimutkaisempi menetelmä, koska, toisin kuin etäisyysmittauksessa, geometria on kolmiulotteinen. Tähän löytyy tehokkaita algoritmeja.
- Käytetään samoja satelliitteja pidemmän aikaa. Koska GPS:n mitausgeometria ehtii muuttua, saadaan enemmän ehtoja.

Katso kuva 13.5.

Viime vuosina on tullut GPS:n lisäksi muitakin globaalia satelliittipaikannusjärjestelmiä. Venäläinen GLONASS — jonka jokaisella satelliitilla on oma kantoaallon lähetystaajuus, *frequency division multiple access* (FDMA, taajuusjakokanavointi), mikä mutkistaa kokonaislukutuntemattomien ratkaisemista<sup>3</sup> — toimii pitkän alennustilan jälkeen taas täydellä 24 satelliitin konstellaatiolla. Eurooppalainen Galileo-järjestelmä on jo lähes täydellinen, ja myös kiinalaiset ovat tulossa Beidou-3-järjestelmänsä kanssa. Järjestelmien yhteiskäyttö samassa vastaanottimessa on teknisesti monimutkaista, mutta lupaa erittäin nopeaa ja luotettavaa kokonaislukutuntemattomien ratkaisua. Helpotusta voi tulla *ohjelmistopohjaisilta vastaanottimilta* (engl. *software-defined GNSS receivers*), joissa kaikki käsittelytyö antennin ja sen analogisen elektroniikan jälkeen on toteutettu digitaalisesti ohjelmistossa kauppahyllyltä ostettavassa tietokoneessa.



### 13.4 Tosiaikainen paikannus

Yllä kuvattu relatiivinen, staattinen menetelmä perustuu *jälkilaskentaan*. Geodeettiseen käyttöön ei-tosiaikaisuus on yleensä ongelmaton. Tarkkojen satelliittiratojen käyttö on välttämätöntä, jos haluaa geodeettista tarkkuutta pitkille vektoreille, ja edellyttää myös tiettyä odotusaikaa: pari viikkoa *precise ephemerisin* tapauksessa.

Joskus uusien pisteiden koordinaatteja tarvitaan heti, ja on tilanteita, joissa se olisi hyödyllistä tai kätevää. Silloin puhutaan *tosiaikaisesta*<sup>4</sup> *paikannuksesta* (engl. *real time*). *Navigointi* on sen laaja sovelluskenttä.

<sup>3</sup>Uusissa GLONASS-K-satelliiteissa tarjotaan myös CDMA:ta eli koodijakokanavointia, joka myös GPS käyttää.

<sup>4</sup>Tosiaikaisuuden (reaaliaikaisuuden) muodollinen määritelmä on *taattu vasteaika*. Se saa olla pitkäkin, jos se on taattu. Vasteaika (engl. *latency*) on se aika, joka kuluu mittaustapahtuman ja mittausrvojen käytön välillä.





Tarkassa GPS-paikannuksessa tosiaikaisuutta voidaan toteuttaa siirtämällä tunnetulla pisteellä  $A$  tehtyjä havaintoja lennossa, esimerkiksi radioteitse, tuntemattomalle pisteelle  $B$  yhteiskäsittelyä varten.



### 13.4.1 Differentiaallinen GPS (DGPS)

Differentiaallinen GPS on koodihavaintoihin perustuva tosiaikainen paikannusmenetelmä, jossa käytetään vertaus- eli tukiasemaa. Se on siis *relatiivinen* mittaustukiaseman  $A$  ja liikkuvan vastaanottimen eli *roverin*  $B$  välillä. Kuten aina kahden lähellä toisiaan olevan vastaanottimen mittauksessa, monet virhelähteet ovat samoja tai lähes samoja molemmissa vastaanottimissa: satelliitin ratavirheet ja kellopoikkeamat sekä ilmakehän vaikutus kumoutuvat pisteiden  $A$  ja  $B$  välisessä erotusmittauksessa kokonaan tai lähes kokonaan.

DGPS-menetelmässä ei siirretä pisteen  $A$  raakahavaintoja pisteeseen  $B$ : tietoa on siirrettäväksi turhan paljon. Sen sijaan lasketaan havainnoista ensin mitatun ja lasketun pseudoetäisyyden erotus. Voidaan laskea jokaiselle havainnolle  $p_A$  havaintopaikan  $A$  geometrinen etäisyys  $\rho_A^{(0)}$  sen ja satelliitin  $S$  välillä. Tämä ”vertausetäisyys” perustuu pisteen  $A$  tunnettuun paikkaan ja satelliittien lähettämiin ratatietoihin. Silloin voidaan laskea *pseudoetäisyyspoikkeama* jokaiselle taivaalla olevalle satelliitille:

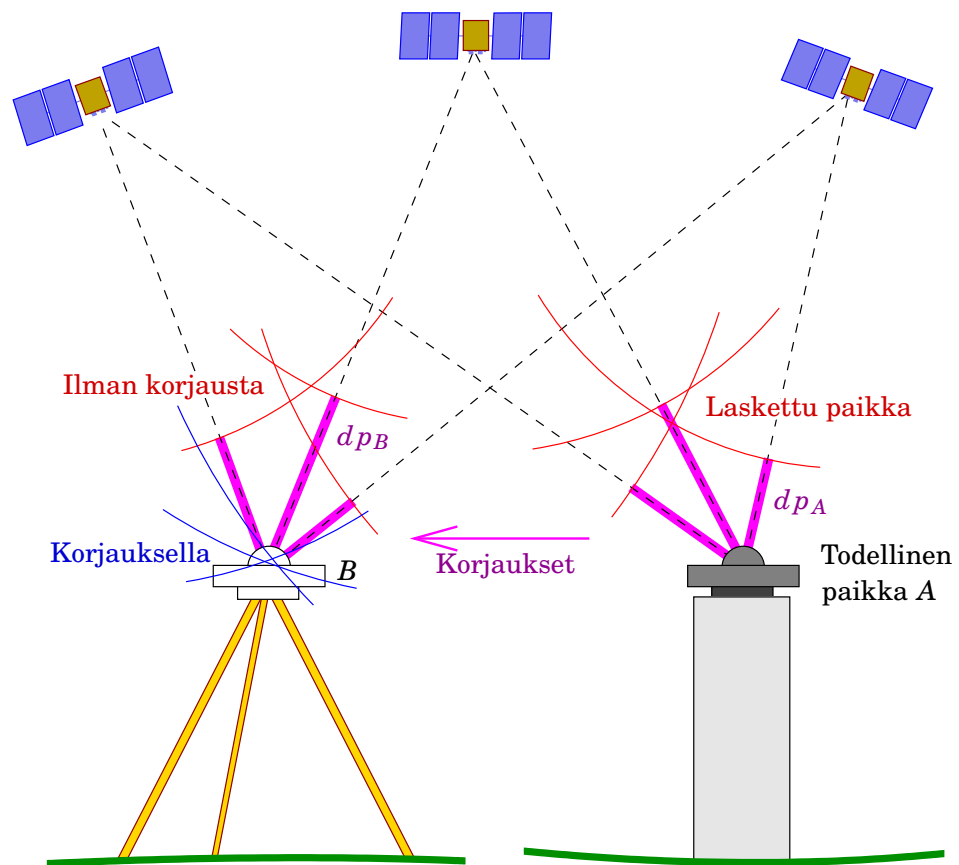
$$dp_A \stackrel{\text{def}}{=} p_A - \rho_A^{(0)}.$$

Samat satelliittien ratatiedot ovat myös liikkuvan vastaanottimen  $B$  käytettävissä, jolloin  $B$  voi laskea niistä saman etäisyyden  $\rho_A^{(0)}$  — onhan tukiaseman  $A$  paikka tiedossa. Siis poikkeamien  $dp_A$  *informaationsäältö on sama* kuin kokonaisten mittauservojen  $p_A$ , ja poikkeamat voivat korvata ne jakelussa.

Pseudoetäisyyspoikkeamien käytöllä on seuraavat edut:

- o Numeeriset arvot ovat paljon pienempiä. Poikkeamat olivat luokkaa  $\pm 100$  m silloin, kun *selective availability* (SA, rata- ja kellotietojen keinotekoinen huonontaminen) oli vielä päällä. Kun vuonna 2000 SA kytkettiin pois, poikkeamien koko putosi tasoon  $\pm 5$  m. Molemmat suuruusluokat ovat murto-osia itse havaintosuureiden koosta, kymmeniä tuhansia kilometrejä.
- o Arvot vaihtelevat hitaammin. Ne ryömivät tuntien mittaan satunnaisen näköisellä tavalla. Niiden ekstrapolointi muutaman sekunnin tai minuutin verran tulevaisuuteen onnistuu paremmin kuin raaoilla havainnoilla.





KUVA 13.6. DGPS-menetelmän toimintaperiaate hieman yksinkertaistettuna.

Molemmista syistä tarvittava tietoliikennekapasiteetti on paljon pienempi ja kanavaksi riittää

- Matkapuhelinverkko, jonka dataverkkoyhteydet (3G, 4G) ovat huomattavan nopeita. ”Mobiili Internet”.
- Radiomodeemi (lyhyitä matkoja).
- Merinavigoinnille pitkät radioaallot.

Poikkeamien arvot vaihtelevat myös hitaasti *paikan* funktiona. Siksi voidaan, jos etäisyys  $AB$  on sopivan lyhyt, 100–1000 km, kirjoittaa riittävällä tarkkuudella

$$dp_B \approx dp_A + c(\Delta T_B - \Delta T_A),$$

jossa  $\Delta T_A$  ja  $\Delta T_B$  ovat vastaanottimien kellopoikkeamat.

Alkuperäisten, yksinkertaisten havaintojen sijasta konstruoidaan *erotushavaintoja*  $p_B^{ST}$  kahden satelliitin  $S$  ja  $T$  välillä:

$$\left. \begin{aligned} dp_B^S &\approx dp_A^S + c(\Delta T_B - \Delta T_A) \\ dp_B^T &\approx dp_A^T + c(\Delta T_B - \Delta T_A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow dp_B^{ST} = dp_B^T - dp_B^S \approx dp_A^T - dp_A^S,$$



jakelussa olevien suureiden erotus, josta on eliminoitu molempien vastaanottimien kellopoikkeamat. Nyt voidaan laskea pisteen  $B$  yksinkertainen erotus etäisyyksien välillä kahteen satelliittiin:

$$\rho_B^{T(0)} - \rho_B^{S(0)} = \rho_B^{ST(0)} = p_B^{ST} - dp_B^{ST},$$

puhtaasti geometrinen suure pisteen  $B$  ja satelliittien  $S$  ja  $T$  *ratatiedoista laskettujen*, siis käyttäjän tiedossa olevien, paikkojen välillä avaruudessa. Näistä voidaan ratkaista pisteen  $B$  tuntematon sijainti ilman satelliittien ratavirheiden tai kellopoikkeamien vaikutusta. Kolme erotushavaintoa eli neljä satelliittia riittää.

Differentiaalisella GPS-paikannuksella ja -navigoinnilla ("DGPS") tarkoitetaan tavallisesti juuri tätä tosiaikaista menetelmää, jossa käytetään GPS-signaalin *modulaatioita* eli *C/A-koodia* ja *P-koodia*.



### 13.4.2 Kinemaattinen tosiaikainen paikannus, "RTK"

Jos käytetään tosiaikaisesti kantoaallon vaihemittauksia, puhutaan *RTK*:sta, tosiaikaisesta kinemaattista menetelmästä (engl. *real-time kinematic*). Tällä menetelmällä tarkkuus on paljon parempi, vaikkakin vain lyhyemmällä matkalla. Toisin kuin *DGPS*, tämä on *inkrementaalinen* menetelmä: mittaus on aloitettava käymällä *koordinaateiltaan tunnetulla pisteellä* ja mieluummin lopetettavakin tunnettuun pisteeseen — varmuuden vuoksi. Välillä mitattujen pisteiden koordinaatit saadaan suhteessa näihin tunnettuihin pisteisiin.

Katso kuva 13.7. Jos käytetään *kaksoiserotuksia*, kahden satelliitin sekä tukiaseman ja liikkuvan aseman eli "*roverin*" välillä, ovat ainoat tuntemattomat *roverin* kolme koordinaattia  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$ , sen paikka kolmiulotteisessa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Kaikki kaksoiserotushavainnon kanssa yhteensopivat *roverin* mahdolliset sijainnit muodostavat nyt *pyörähdys-hyperboloidien kimpun*. Hyperboloidien välinen matka vastaa havaintosuureen yhtä aallonpituutta. Kuvassa hyperboloidit on piirretty läpileikkauksena erivärisinä käyriä kahdelle eri satelliittiparille. Kuten aina *GPS*-mittauksissa, on satelliittien minimimäärä neljä.

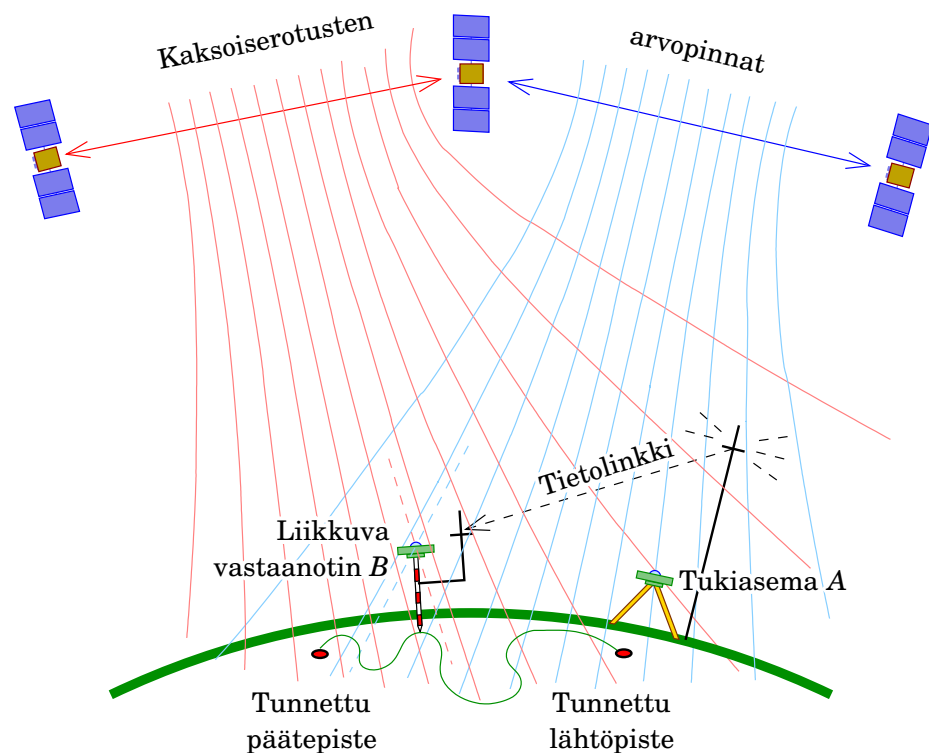
Tunnetulle pisteelle  $A$  installoidaan pysyvä (tai puolipysyvä) *GPS*-vertaus- eli tukiasema. *Roverin* hetkellinen paikka olkoon  $B$ . Kaksoiserotukset ovat

$$P_{AB}^{ST} = P_B^T - P_A^T - P_B^S + P_A^S.$$

Jos sijoitetaan tähän yhtälö 12.2, saadaan

$$P_{AB}^{ST} = \rho_{AB}^{ST} + D_{\text{ion},AB}^{ST} + D_{\text{trop},AB}^{ST} - \lambda \cdot N_{AB}^{ST}.$$





KUVA 13.7. **RTK**-menetelmän toimintaperiaate yksinkertaistettuna kahteen ulottuvuuteen. Hyperbelit ovat liikkuvan vastaanottimen sijainnit, jotka ovat yhteensopivat vaiheen kaksoiserotusten kanssa, jotka vastaavat pyöreeä lukumäärää kokonaisia aallonpituuksia. Katkoviivaiset hyperbolipätkät taas ovat yhteensopivia *havaittujen* kaksoiserotusten kanssa. Vertaile tämä **Decca**-kuvan 12.1 kanssa!

Unohdetaan hetkeksi ilmakehätermi:

$$P_{AB}^{ST} = \rho_{AB}^{ST} - \lambda \cdot N_{AB}^{ST}.$$

Jos *roverin* antenni pystytetään koordinaateiltaan tunnettuun pisteeseen<sup>5</sup> *B*, ovat *kaikki koordinaatit tunnettuja*:

- Satelliittien *S* ja *T* koordinaatit voidaan laskea ratatiedoista — jopa *broadcast ephemeris* -ratatiedoista, jos etäisyys *AB* ei ole kovin pitkä.
- Asemien *A* ja *B* koordinaatit oletettiin tunnetuiksi.

Siksi sen hetken *geometrinen* kaksoiserotus  $\rho_{AB}^{ST}(t_0)$  on *laskettavissa*. Sen jälkeen voidaan havainnoista ratkaista myös *kokonaislukutuntemattomat*<sup>6</sup> eli *ambiguiteetit*:

<sup>5</sup>Tai määritetään *roverin* lähtöpisteen koordinaatit *havainnoista* ennen liikkeelle lähtöä: *on-the-fly*-menetelmä. Katso seuraava alaasio.

$$N_{AB}^{ST} = - \frac{P_{AB}^{ST}(t_0) - \rho_{AB}^{ST}(t_0)}{\lambda}.$$

Tämän jälkeen lähdetään *roverin* kanssa pois tunnetulta pisteeltä mitausmatkalle. Liikutaan maastossa ja mitataan sopiva määrä tuntemattomia pisteitä — mutta *sillä tavalla, että yhteys satelliitteihin ei katkea*. Silloin nimittäin myös kokonaislukutuntemattomien arvot  $N_{AB}^{ST}$  eivät muutu ja kenttäpisteen  $P$  mittauksista  $P_{AB}^{ST}(t_P)$  voidaan suoraan laskea *geometrinen kaksoiserotus*

$$\rho_{AB}^{ST}(t_P) = P_{AB}^{ST}(t_P) + \lambda \cdot N_{AB}^{ST}.$$

Tämä on *kinemaattisen GPS*-paikannuksen olemus. Oikea paikka saadaan heti, jopa millimetrin tarkasti. Tietysti vain vertausaseman suhteen, ei absoluuttisesti. Siksi tukiaseman paikan tarkka geodeettinen määrittäminen on olennainen.

**RTK** toimii parhaiten lyhyillä matkoilla, sadoista metreistä kymmeniin kilometreihin. Tosiaikaisuus edellyttää tietolinkin käyttöä tukiaseman ja *roverin* välillä. Mahdolliset tietolinkkiratkaisut ovat periaatteessa samoja kuin **DGPS**:n tapauksessa.



### 13.4.3 RTK, tekniset näkökohdat

Edellisessä oletettiin, että liikkuva vastaanotin eli *rover* lähtee pisteestä, jonka koordinaatit tunnetaan geodeettisella tarkkuudella. Kuitenkin sellaisen pisteen voi myös *luoda "on the fly"* eli lennossa viipymällä lähtöpisteessä niin kauan, että satelliittigeometria muuttuu ja kokonaislukutuntemattomien ratkaisu eli kiinnittäminen kokonaislukuarvoihin onnistuu. Yhteyden tukiasemaan on oltava auki ja signaaliyhteyden tukiaseman kanssa yhteisesti näkyviin satelliitteihin on oltava katkeamaton.

Paikan ratkaisemiseen **GPS**:n avulla riittää yleensä neljä satelliittia. **RTK**-tekniikan *"on-the-fly"*-alustus vaatii kuitenkin vähintään viidettä satelliittia kokonaislukutuntemattomien ratkaisemiseksi. Myös mittaus-ten tosiaikainen laadunvalvonta edellyttää tätä. Ilman ylimääräisyyttä voitaisiin ambiguiteettiluvut  $N_{AB}^{ST}$  vapaasti valita ja laskea näin saadusta

<sup>6</sup>Näiden arvojen pitää siis olla kokonaislukuja tai lähellä niitä, jolloin ne saa pyöristää ja tuloksena on *"fix"*-ratkaisu. Elleivät ne ole lähellä kokonaisarvoja, niitä *ei* saa pyöristää. Silloin saadaan heikompi *"float"*-ratkaisu. Näin voi käydä esimerkiksi, jos pisteiden  $A$  tai  $B$  annetuissa koordinaateissa on virhe, tai jos ilmakehän vaikutus on sittenkin liian suuri ja etäisyys  $AB$  liian pitkä.

kolmesta arvosta  $\rho_{AB}^{ST}$  mielikuvituksellinen vektoriratkaisu  $\bar{\mathbf{R}}_{AB}$ , ilman että syntyisi ristiriitoja!

Mitä enemmän satelliitteja on käytettävissä, sitä nopeammin kokonaislukutuntemattomat ratkeavat. Siksi on markkinoille tullut kojeita, jotka osaavat käyttää yhtäaikaa sekä GPS- että esimerkiksi GLONASS-satelliittien signaaleja.

Lyhyellä alle kilometrin matkalla satelliittien määrä tehollisesti tuplaantuu, koska voidaan käyttää  $L_1$ - ja  $L_2$ -taajuuksien erotusta, ”leveäkujaa” (engl. *wide lane*), jonka tehollinen aallonpituus on 86 cm.

Nykyiset RTK-kojeet osaavat hyödyntää älykkäästi useita tunnettuja pisteitä mitta-alueen ympäri. Ennen mittauksia ja mittauksen jälkeen käydään pisteille, ja laite muodostaa mitattujen ja tunnettujen pistesijaintien avulla paikallisen *muunnoskaavan*. Kaavan avulla muunnetaan kaikkien mitattujen pisteiden koordinaatit samaan järjestelmään, jossa tunnetut pisteet on annettu. Tämä on kätevä mutta myös vaarallinen ominaisuus: muunnettujen koordinaattien tarkkuus ei voi olla tämän paikallisen järjestelmän sisäistä tarkkuutta parempi. Jos se on esimerkiksi vanha, perinteiseen mittaustekniikkaan perustuva KKJ (alaosio 3.2.1), menetetään GPS-maanmittauksen etu, sen ylivoimainen geometrinen tarkkuus!



#### 13.4.4 Verkkomoodin tosiaikaiset palvelut

Viime vuosina on rakennettu tukiasemaverkkoja sekä differentiaalisen GPS:n (DGPS) että tosiaikaisen kinemaattisen (RTK) tukipalvelujen tarjoamiseksi. Yhden tukiaseman käytön pääongelma on, että sen jakelemat korjaukset ovat hyviä tukiaseman lähellä, mutta huononevat nopeasti, kun liikkuvan vastaanottimen etäisyys tukiasemasta kasvaa.

On intuitiivisesti selvää, että korjaukset muuttuvat *vain hitaasti*, ja lähes lineaarisesti, paikan mukaan. Satelliitin kellopoikkeaman aiheuttama korjaus on jopa vakio. Satelliitit ovat niin korkealla, että jopa Euroopan kokoisella alueella geometria on kutakuinkin sama mantereiden eri osissa. Myös ilmakehä on yleensä melko samanlainen kaikkialla pienen alueen sisällä. Tämä tekee *interpoloinnin* mahdolliseksi, ja tukiasemaverkot tekevät juuri sen.

Realistisia korjaussignaalien jakeluvaihtoehtoja:

- Geostationaarisia tietoliikennesatelliitteja, joiden etuna on suurien alueiden homogeeninen peittävyys, haittana Suomen leveydellä satelliittien matala korkeuskulma.



- Mobiilin Internetin käyttö matkapuhelinverkon kautta. Internet ei ole tosiaikainen, mutta käytännössä niin nopea, että sen kanssa voi elää. Edut ovat
  - helppo mahdollisuus *veloittaa* palvelusta
  - mahdollisuus toimittaa vastaanottimen paikkaan *räätälöidyt* korjaukset — ”virtuaalitukiasema”-ajatus
  - suuri tietoliikennekapasiteetti pienellä rahalla.

Verkkomoodin palvelujen käyttö edellyttää myös ohjelmallista tukea. Korjausten interpoloinnin geometrinen osuus on helppo, mutta ongelmaksi muodostuu *ilmakehän* kulkuviiveen *mallinnus*. Hyvän tarkkuuden saavuttamiseksi tukiasemien verkon, johon ilmakehämallin laskenta perustuu, on oltava riittävän tiheä. Tämä mutkikas ongelmakenttä on aktiivisen tutkimuksen kohteena, esimerkiksi Koivula ym. (2018).



### 13.5 SBAS-järjestelmät, satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät (*satellite-based augmentation systems*)

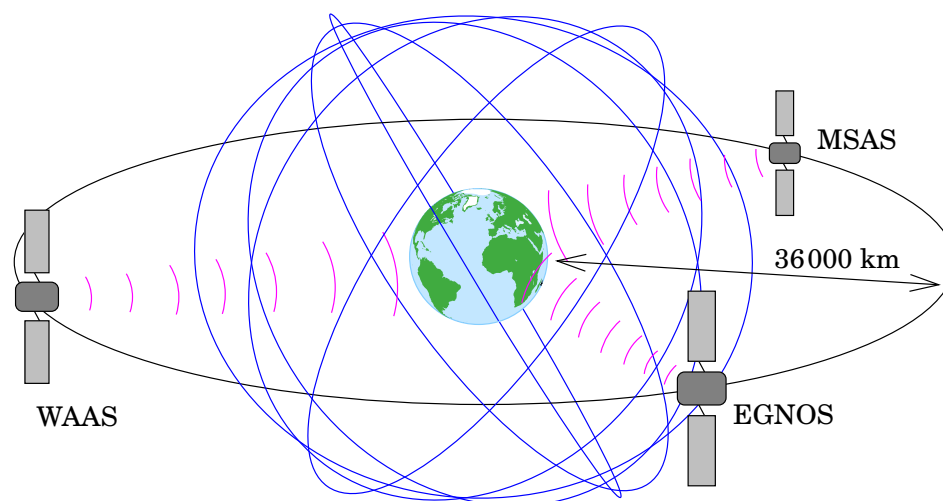
Tämän tyyppisille järjestelmille käytetään myös termiä *wide-area differential GPS* (**WADGPS**). Järjestelmät käyttävät geostationaarisia satelliitteja **GPS**-paikannuksen differentiaalikorjausten jakelukanavana. Maailmanlaajuisesti on olemassa kolme keskenään yhteensopivaa järjestelmää:

- **WAAS** (Wide Area Augmentation System, Yhdysvallat)
- **EGNOS** (European Geostationary Navigation Overlay System)
- **MSAS** (Multi-functional Satellite Augmentation System, Japani).

Nämä ovat jo laajasti käytössä, vaikka niiden kehitys jatkuu. Palvelut ovat mannerlaajuisia ja perustuvat useiden **GPS**-tukiasemien yhtäaikaiseen käyttöön verkkomoodissa. Näin saadaan tarkkoja differentiaalikorjauksia sille alueelle, jonka tukiasemaverkko kattaa. Satelliittien käyttämä signaalirakenne ja taajuudet ovat samanlaisia kuin **GPS**-satelliittien tapauksessa, minkä ansiosta on suhteellisen helppoa modifioida olemassa oleva **GPS**-vastaanotintyyppi **SBAS**:n käyttöön.

Olennaisen tärkeä sovellus on **GPS**-järjestelmän *eheyden valvonta*, joka hälyttää jos paikannuksen laatua ei voida taata. Tämä on tärkeä turvallisuuskriittisissä sovelluksissa — **SoL**, ”*Safety of Life*” — kuten lentokoneiden paikannus laskeutumisen aikana.





KUVA 13.8. Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät eli *satellite-based augmentation systems (SBAS)*.



## 13.6 Tosi aikaisia satelliittipaikannuksen tukipalveluja Suomessa



### 13.6.1 Liikenneviraston DGNSS-palvelu

Väyläviraston, aikaisemmin Liikenneviraston, vieläkin aikaisemmin Merenkululaitoksen, operoima palvelu, **Väylä, Radionavigaatiopalvelut**, lähettää korjausviestejä radioteitse, pitkien aaltojen taajuuksilla 287,5–314,5 kHz. Palvelu kattaa Itämeren merialueet ja sisämaassa Saimaan. Käyttäjäkunta muodostuu merenkulkijoista. Palvelu on maksuton.



### 13.6.2 Trimnet VRS

**Geotrim, Trimnet** on Geotrim Oy:n ylläpitämä, aluksi Maanmittauslaitoksen käyttöön suunniteltu, tosiaikainen kinemaattinen paikannus (**RTK, real-time kinematic**) verkkomoodissa. Käytettyä tekniikkaa kutsutaan nimellä verkko-**RTK**, tarkemmin, *virtual reference station RTK (VRS-RTK)*, ja se perustuu siihen, että jokaiselle käyttäjälle perustetaan laskennallisesti ”virtuaalinen” vertausasema hänen lähellään. Tähän tukiasemaan generoidaan formaatissa **RTCM-SC104** olevaa korjausdataa. Kyseessä on standardiformaatti (**”RTCM-formaatti”**), jota kaikenmerkkiset laitteet osaavat käyttää.

Verkko kattaa koko Suomen alueen yli 100 asemalla (tilanne 2019) ja tukee myös **GLONASS**in käyttöä. Korjauksia jaetaan kaupallisesti mobiilin Internetin kautta: palvelinrykelmä sijaitsee Geotrimin tiloissa Vantaalla,



ja käyttäjä voi kirjautua palveluun Internetin kautta. Saadut korjaukset on räätälöity jokaiselle käyttäjälle erikseen. Saavutettava tarkkuus on luokkaa senttimetri vaakatasossa, hieman heikommin pystysuunnassa.



### 13.6.3 HxGN SmartNet

HxGN SmartNet ([Hexagon Geosystems](#), [HxGN SmartNet](#)) on Hexagon Oy:n operoima ja ylläpitämä tosiaikaisen kinemaattisen paikannuksen ([RTK](#)) tukiverkko, joka tarjoaa korjauksia kaupallisena palveluna mobiiliin Internetin kautta. Suomessa on tällä hetkellä (2017) yli 100 tukiasemaa.



### 13.6.4 Maanmittauslaitoksen kokeellinen palvelu

Maanmittauslaitoksen Paikkatietokeskuksen palvelu, [Maanmittauslaitos](#), [Yleistä paikannuspalveluista](#), on tällä hetkellä kokeellinen, ilmainen mutta rekisteröintiä vaativa. Palvelu tarjoaa sekä differentiaalista [GNSS](#)-tekniikkaa että verkko-[RTK](#)-tekniikkaa. Tukiasemat ovat FinnRefin 20 uutta asemaa.



### 13.6.5 Arkistopalvelu

Verkko-[RTK](#)-palveluista, Suomessa ja ulkomailla, saa useimmiten sopimuksesta myös arkistoitua havaintodataa [RINEX](#)<sup>7</sup>-muodossa staattista jälkilaskentaa varten. Tavallisesti data harvennetaan tiheydestä yksi Hz — siis yksi mittaustapahtuma sekunnissa kaikista näkyvistä satelliiteista — vaikkapa tiheyteen  $\frac{1}{30}$  Hz, yksi mittaustapahtuma joka 30. sekunti.



## 13.7 GDGPS-järjestelmä

[JPL](#), [The Global Differential GPS System](#). Tämä globaali tosiaikainen [DGPS](#)-palvelu käyttää Internetiä jakelukanavanaan. Järjestelmä on [NASA](#):n Jet Propulsion Laboratoryn ([JPL](#)) kehittämä ja operoima. Palvelun osana tarjotaan *precise point positioning* -palvelua ([PPP](#)) käyttäjän lataamia [RINEX](#)-tiedostoja käyttäen.

---

<sup>7</sup>[RINEX](#), Receiver-INdependent EXchange format, on kätevä, laiteriippumaton tekstiformaatti, jota ihminenkin osaa lukea. [Gurtner ja Estey \(2007\)](#). Jokaiselle laitemerkille löytyy konversio-ohjelma. Katso taulu [12.3](#).



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on ”yhteinen virhe” -oletamus?
- 2) Minkä tyyppisiä erotushavaintoja on olemassa ja mitkä virhelähteet ne poistavat tai pienentävät?
- 3) Mikä on differentiaalin GPS (DGPS)?
- 4) Mikä on kinemaattinen tosiaikainen (RTK) paikannus?
- 5) Mihin tarkoitukseen rakennettiin SBAS-järjestelmät (*satellite-based augmentation systems*)?
- 6) Mikä on RINEX?



## Harjoitus 13–1: Geodeettinen GPS-paikanmääritys

Tehtävä on määrittää tarkka kahden aseman välinen vektori prosessoimalla ”pilvessä”. GNSS-dataa monesta sadasta jatkuvasti toimivasta asemasta on saatavilla verkosta, kuten myös palveluita näiden tietojen käyttämiseksi geodeettiseen paikanmääritykseen. Tulemme käyttämään tätä hyväksi koelaskennassa.

- 1) Hanki RINEX-tiedostot asemilta Sodankylä (SODA) ja Metsähovi (METS), katso kuva 13.1. Lähteinä voit käyttää Maanmittauslaitoksen paikkatietokeskuksen FGI:n verkkisivua (Maanmittauslaitos, RINEX-palvelu), joka vaatii rekisteröitymisen, San Diegossa Kaliforniassa sijaitsevan Scripps merentutkimuslaitoksen ylläpitämän SOPACin verkkisivua (SOPAC, GPS Explorer) tai EUREFin datakeskusta (ROB, EUREF Permanent GNSS Network) Kuninkaallisessa observatoriossa Brysselissä, Belgiassa. Lataa tietoja eräästä yksittäisestä päivästä<sup>8</sup> — sama kummallekin asemalle. Tietojen koko ei saa ylittää 5 MB.
- 2) Ladattu data saattaa olla *Hatanaka-komprimoitu* (SOPAC, *Hatanaka file compression*). Tämä on RINEX-datalle räätälöity komprimointimenetelmä, joka käyttää hyväkseen tietojen samanlaisuutta peräkkäisten epookkien välillä. Sinun on saatava konversio-ohjelma nimeltä CRX2RNX alustallesi käännettynä binääriin ja konvertoitava dataa ei-komprimoiduksi RINEX:ksi. Jälkimmäinen on ihmisille lukukelpoinen ja jopa ymmärrettävä. Myös Hatanaka-komprimoitu tiedosto on ihmisille lukukelpoinen. Käytetty komprimointimene-

<sup>8</sup>Ehdotus: viime vuoden syntymäpäiväsi!

telmä näkyy selvästi.

Muista, että data voi myös olla komprimoituna standardimenetelmällä, kuten zip tai gzip tai Unix compress (\*.Z) ... mikä olisi ensin dekomprimoitava. Windows-alustalla sovellus 7-zip voi olla hyödyksi.

Myös Windows-alustalla voit törmätä rivin loppu -ongelmaan: Unixin tekstitiedostot lopettavat rivejään pelkällä rivinvaihtomerkillä (LF), kun Windows käyttää telanpalautusta (CR) ja rivinsiirtoa (LF). Tekstieditori Notepad++ voi olla hyödyksi.

3) Nyt voit lähettää [RINEX](#)-tiedostosi pilveen. Kaksi vaihtoehtoa — valitse tähän harjoitukseen yksi:

- [AUSPOS – Online GPS Processing Service](#), Australian valtion palvelu. Palvelu on usein aika hidas, tulokset tulevat yön yli laajana raporttina. Julkisesti saatavana olevaa dataa lähellä olevista [IGS](#)-asemista käytetään paikannuslaskennassa, ja niistä on kartta mukana.
- [GDGPS APPS](#), Yhdysvaltojen hallinnon palvelu, jonka Jet Propulsion Laboratory [JPL](#) — International [GNSS](#) Servicen [IGS](#):n (alaosio [12.11](#)) päämaja — operoi. Ja niinpä, hekin käyttävät [IGS](#)-verkon dataa (kuva [12.24](#)) vertauskehyksen kiinnittämiseksi laskennoissa.

Lähetä METS ja SODA erikseen, tiedosto kerrallaan.

4) [AUSPOS](#)in tulokset saapuvat sähköpostitse.

- (a) Lue tulokset huolellisesti. Mitkä muut asemat olivat mukana laskennassa ja missä vertausjärjestelmässä tulos on ilmaistu?
- (b) Geosentrinen, karteellinen (suorakulmainen) koordinaattitarkaisu  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .
- (c) Geodeettiset koordinaatit ja niiden tarkkuudet ("Positional Uncertainty").
- (d) Muut mielenkiintoiset asiat. Miten troposfäärin kulkuviive on mallinnettu? Niinpä, estimoidaan kuivat ja kosteat troposfääriset zenitiin kulkuviiveet, kuten myös vaakagradientit!
- (e) Huomaa geoidimallin käyttö korkeusarvojen saamiseksi keskimerenpinnasta. Kuinka hyvä luulet mallin olevan?
- (f) Kokonaislukutuntemattomien ratkaisu.

5) [APPS](#)in tulokset tulevat näkyviin webbisivulla.



[APPS](#)in tapauksessa tarkista yhteenvetotiedosto (\*.sum) seuraavien asioiden kannalta:

- (a) Geosentrinen karteesinen koordinaattiratkaisu  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , ja koordinaattien epävarmuudet ("sigmat"). Miten tämä tarkkuuskäsite eroaa [AUSPOS](#)in vastaavasta?
- (b) Geodeettiset koordinaatit Lat, East\_Lon ja Height sekä niiden sigmat. Vertaa korkeuden sigmaa muiden kanssa.
- (c) Muut kiinnostavat otsikot. Miten troposfääri mallinnetaan? Vertaile [AUSPOS](#)in kanssa.



# Tasotuslasku geodesiassa

## 14

[...] Mais comment vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voyant se métamorphoser mon correspondant estimé M. Leblanc en cette illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurais peine de croire. Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas ; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décelent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ses recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. [...]

---

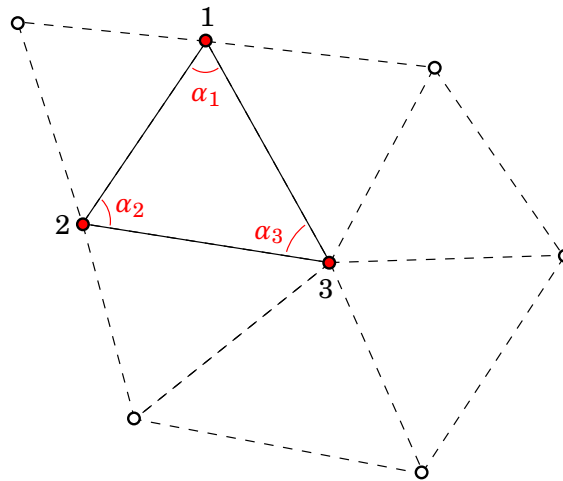
Gaussin kirje Sophie Germainille, 1807 ([Friedelmeyer, 2014](#)). Katso myös [Wikipedia, Sophie Germain](#).



### 14.1 Miksi tasotus?

Geodesiassa, kuten tieteessä yleensä, tiedetään että *kaikki mittaukset ovat vääriä*. Mittauksia kerätään aina enemmän kuin välttämätön minimimäärä, jotta voitaisiin arvioida mittaustulosten epävarmuudet edes jotenkin realistisesti. Käytäntöä kutsutaan *redundanssiksi*.

Hyvä esimerkki ovat geodeettisen verkon mittaukset. Kolmiomittaustalossa, kuva 14.1, mitataan suunnat kolmiopisteistä toisiin kolmiopisteisiin.



KUVA 14.1. Kolmiomittausverkko, kolmio.

Pisteissä 1, 2 ja 3 tehdyistä suuntamittauksista naapuripisteisiin lasketaan kulmat  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ja  $\alpha_3$ . Kulmille pätee *kolmioehto*<sup>1</sup>:

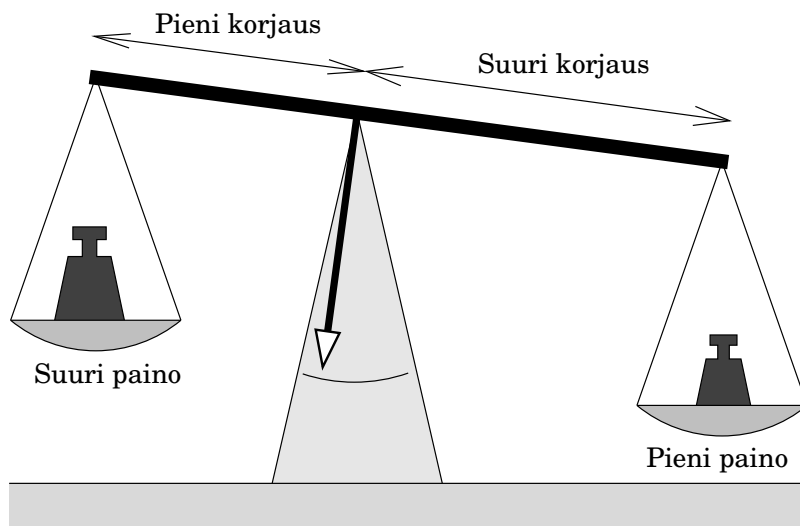
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ.$$

Kolmioehto mahdollistaa seuraavat tarkastukset:

- 1) Ne mittaukset, joista kulmat  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ja  $\alpha_3$  on laskettu, eivät sisällä *karkeita* virheitä. Esimerkiksi jos saadaan kulmien summaksi  $\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 + \underline{\alpha}_3 = 173^\circ,6742$ , voimme heti päätellä, että havaintoarvoista ainakin yksi sisältää karkean virheen, koska käytettyjen mittauskojeiden tarkkuudet ovat asteen murto-osia.
- 2) Saadun summan poikkeamasta teoreettisesta arvosta  $180^\circ$  voidaan päätellä mittauksen tarkkuus. Esimerkiksi jos saadaan summaksi  $\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 + \underline{\alpha}_3 = 179^\circ,9958$ , on *sulkuvirhe*  $\underline{\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 + \underline{\alpha}_3 - 180^\circ = -0^\circ,0042$ , ja päätelmä on, että käytetyn mittausmenetelmän tarkkuus on muutama tuhannesosa astetta.

Jos tehdään tällä tavoin ylimääräisiä mittauksia, tarvitaan menetelmä mittausten välisten, pientenkin ristiriitojen poistamiseksi ja mittausten saattamiseksi keskenään yhteensopiviksi. Raaka temppu olisi yksinkertaisesti heittää mittausrarvo  $\underline{\alpha}_3$  pois ja laskea sille taatusti yhteensopiva, korvaava arvo kaavan  $\underline{\alpha}_3 = 180^\circ - \underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2$  avulla. Kuitenkin voi oikeutetusti kysyä, miksi  $\underline{\alpha}_3$  eikä  $\underline{\alpha}_1$  tai  $\underline{\alpha}_2$ ? Näin mielivaltaisesti ei saisi menetellä, eikä noin vain heittää pois arvokasta havainnon sisältämää informaatiota. Oikea ratkaisu on *verkkotasointu*.

<sup>1</sup>Kaarevan Maan pinnalla summa ei ole tarkasti  $180^\circ$ , vaan hieman suurempi, *pallo-ylijäämä*. Tämä on esimerkki epäeuklidisesta geometriasta.



KUVA 14.2. Vertauskuva: suuri paino merkitsee pientä korjausta ja päinvastoin.

Yksinkertaisessa kolmion tapauksessa jaetaan sulkuvirhe *tasan* kulmien kesken: tasoitetut kulma-arvot ovat demokraattisesti

$$\hat{\alpha}_1 = \underline{\alpha}_1 - \frac{1}{3}\underline{\Delta}, \quad \hat{\alpha}_2 = \underline{\alpha}_2 - \frac{1}{3}\underline{\Delta}, \quad \hat{\alpha}_3 = \underline{\alpha}_3 - \frac{1}{3}\underline{\Delta},$$

jonka jälkeen  $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 = 180^\circ$  tarkasti.

Jos kuitenkin tiedetään, että vaikkapa kulma  $\alpha_3$  on mitattu *kaksi kertaa* (ja arvo  $\underline{\alpha}_3$  on näiden mittausten keskiarvo), mutta kulmat  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  vain kerran samalla kojeella, voidaan tämä ottaa huomioon tasoittamalla seuraavalla tavalla:

$$\hat{\alpha}_1 = \underline{\alpha}_1 - \frac{2}{5}\underline{\Delta}, \quad \hat{\alpha}_2 = \underline{\alpha}_2 - \frac{2}{5}\underline{\Delta}, \quad \hat{\alpha}_3 = \underline{\alpha}_3 - \frac{1}{5}\underline{\Delta},$$

jossa edelleen  $\underline{\Delta} = \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 + \underline{\alpha}_3 - 180^\circ$ . Tässä tapauksessa puhutaan mitausten *painotuksesta*. Mittaus  $\underline{\alpha}_3$  saa *kaksinkertaisen painon* — ja siis puolittaisen korjauksen — mittausten  $\underline{\alpha}_1$  ja  $\underline{\alpha}_2$  verrattuna.

*Suuri paino merkitsee pientä korjausta ja päinvastoin*, kuva 14.2. Painojen suhteet ovat 1 : 1 : 2, korjausten suhteet ovat käänteiset 2 : 2 : 1 ja korjaussuhteiden summa on 5. Näin saadaan yllä annetut korjauskertoimet (”painokertoimet”)  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$  ja  $\frac{1}{5}$ .

Todellisen, monimutkaisen kolmiomittausverkon (tai minkä tahansa geodeettisen verkon) tasoitus on matemaattisesti paljon monimutkaisempi, mutta tämä on sen perusajatus.

Tavallisesti oletetaan, että havaintojen satunnaiset mittausvirheet ovat C. F. Gaussin mukaan nimetyn kellokäyrän (kuva 2.5) eli *normaalijakauman* mukaisia. Ainakin siinä tapauksessa teoreettisesti parhaan

ratkaisun antaa pienimmän neliösumman tasoitus. Yksinkertaisin esimerkki tästä menetelmästä on *keskiarvon* laskenta.



## 14.2 Keskiarvo

Olkoon sama suure havaittuna  $n$  kertaa — on siis kyse *stokastisesta suureesta*  $\underline{\ell}$  — ja havaintoarvot ovat  $\ell_i, i = 1, \dots, n$ . Havainnoilla on tilastollinen odotusarvo  $\mu$  ja kaikilla sama standardipoikkeama eli *keskivirhe*<sup>2</sup>  $\sigma$ . Havaintojen keskiarvo on<sup>3</sup>

$$\bar{\ell} = \frac{1}{n} (\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell_i.$$

Voidaan osoittaa, että tämä on odotusarvon  $\mu$  estimaattorina ”paras mahdollinen” havaintojen lineaariyhdistelmä. Voidaan myös näyttää,<sup>4</sup> että tämä lineaariyhdistelmä minimoi *jäännösvirheiden*<sup>4</sup> (residuaalien)

$$v_i \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\ell} - \ell_i, \quad i = 1, \dots, n$$

neliöiden summan

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \min.$$

Tästä ominaisuudesta nimi ”pienimmän neliösumman menetelmä” juontaa juurensa.

Voidaan myös *estimoida* yhden havainnon standardipoikkeama eli keskivirhe  $\sigma$  otoskeskivirheen yhtälöllä

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Tästä taas seuraa keskiarvon  $\bar{\ell}$  laadun eli epävarmuuden mittana *sen* keskivirheen (standardipoikkeaman) estimaatti  $\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma} / \sqrt{n}$ . Tämä keskiarvon epävarmuutta kuvaava arvo on siis sitä pienempi, mitä pidempi on mittausarvojen sarja, eli mitä suurempi  $n$ .

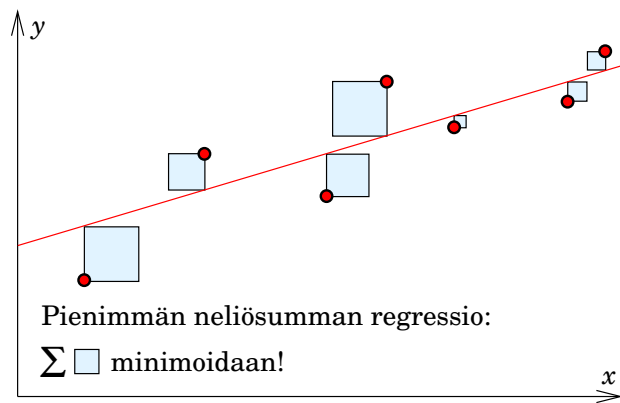
<sup>2</sup>Teoreettisemmin sanottuna, jos odotusarvon operaattori on  $E\{\cdot\}$ , voidaan kirjoittaa  $\mu = E\{\underline{\ell}\}$  ja  $\sigma^2 = E\{(\underline{\ell} - \mu)^2\}$ .

<sup>3</sup>Tässä kirjoitetaan arvot  $\ell_i$  *stokastisina*, koska keskiarvon muodostus voidaan *toistaa*, stokastisen suureen  $\underline{\ell}$  eri realisointien muodostamiseksi.

<sup>4</sup>Havainnon jäännösvirhe  $\bar{\ell} - \ell_i$  *ei ole* sama kuin sen havainnon *virhe*  $\ell_i - \mu$  (tai sen vastaluku)! Jäännösvirhe voidaan laskea havainnoista, virhe ei.







KUVA 14.3. Lineaarisen regression idea.

Jos tunnetaan yhden havainnon keskivirhe  $\sigma$  *a priori*, voi myös suoraan käyttää yhtälöä  $\sigma_n = \sigma / \sqrt{n}$ , jossa tulos ei ole estimaatti vaan laskettu arvo.



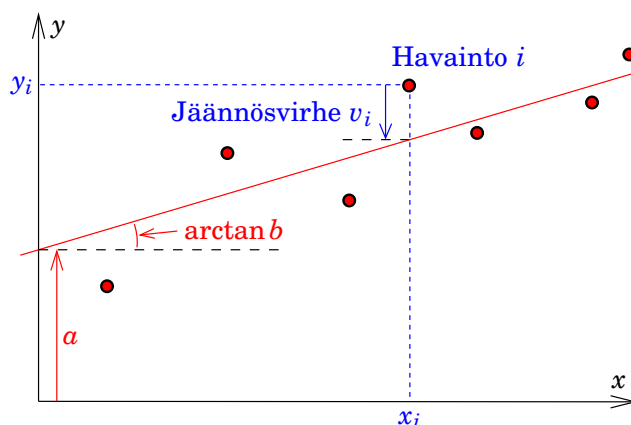
### 14.3 Lineaarinen regressio

Lineaarisessa regressiossa estimoidaan kaksi parametria  $a$  ja  $b$ , kun on annettuna havainnot  $\underline{y}$ , jotka riippuvat lineaarisesti argumentista  $x$ :

$$\underline{y}_i + \underline{v}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i.$$

Tässä  $\underline{v}_i$  on taas havainnon  $i$  *jäännösvirhe* eli residuaali. Parametrit  $a$  ja  $b$  kuvaavat *suoraa*, joka kulkee mahdollisimman hyvin — siis mahdollisimman pienin jäännösvirhein — mitatun ”pistepilven”  $(x_i, \underline{y}_i)$  läpi. Katso kuvat 14.3 ja 14.4.

Lineaarinen regressio on *pienimmän neliösumman menetelmä*, kuva 14.3. Jäännösvirheiden neliöiden summa minimoituu.



KUVA 14.4. Lineaarinen regressio, suureiden määritelmät.



Pienimmän neliösumman ratkaisu on

$$\hat{b} = \frac{n \sum (xy) - \sum x \sum y}{n \sum (x^2) - (\sum x)^2}, \quad \hat{a} = \frac{\sum y - \hat{b} \sum x}{n},$$

jossa on käytetty tiivistä kirjoitustapaa

$$\sum (\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n (\cdot),$$

summausta kaikkien  $n$  pisteiden eli koordinaattiparien  $(x_i, y_i)$  yli. Voimme kirjoittaa ratkaisun vielä kauniimmin *keskiarvojen* avulla:

$$\hat{b} = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad \hat{a} = \langle y \rangle - \hat{b} \langle x \rangle,$$

jos keskiarvo kirjoitetaan seuraavasti:

$$\langle \cdot \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\cdot)$$

”Hattutyylä”  $(\hat{a}, \hat{b})$  on usein käytetty estimaattoreiden kirjoitustapa.



## 14.4 Pienimmän neliösumman tasoituksen teoria



### 14.4.1 Ratkaisun laskeminen havainnoista

Pienimmän neliösumman menetelmää käytti luultavasti ensimmäisenä

- <sup>5</sup> Carl Friedrich Gauss, vaikka Adrien-Marie Legendre<sup>5</sup> on myös väitetty menetelmän keksijäksi. Gauss suoritti mittavia geodeettisia verkkolas-
- <sup>6</sup> kentoja<sup>6</sup> Hannoverissa keksimänsä menetelmän avulla.

Tähtitieteessä menetelmän ensimmäinen sovellus oli pikkuplaneettojen ja komeettojen ratojen laskeminen havainnoista. Tämä ja geodeettisten verkkojen tasoittaminen ovat erikoistapauksia tilanteista, joita syntyy koko ajan havaintojen tekijän elämässä:

- On käytettävissä tietty havaintoaineisto, ja haluamme laskea siitä tietyt kiinnostavat tuntemattomat tavalla, joka
  - Käsittelee kaikki havainnot samanarvoisina.

<sup>5</sup>Adrien-Marie Legendre (1752–1833) oli ranskalainen matemaatikko, yksi Eiffel-tornin 72 nimestä ([Eiffel Tower, 72 names](#)).

<sup>6</sup>Verkkotasoitukseen numeerisen työn suoritti käsilaskijoiden armeija Gaussin komennon alla. Silloin ”computer” eli saksaksi ”Rechner” oli ihminen!



- Tekee kiinnostavien tuntemattomien laskettujen arvojen poikkeamat ”todellisista arvoistaan” mahdollisimman pieniksi.
- Tämän lisäksi olisi toivottavaa, että
  - Havainnoissa luuraavat karkeat virheet löydetään ja poistetaan.

Tätä varten käytetään pienimmän neliösumman tasoitusmenetelmän *parametrissa muotoa*, joka perustuu *havaintoyhtälöiden* muodostamiseen.



#### 14.4.2 Havaintoyhtälöt

Havaintoyhtälöiden eli virheyhtälöiden<sup>7</sup> muodostaminen käy seuraavasti.<sup>7</sup> Kirjoitetaan kaikki havainnot kaikkien tuntemattomien *lineaarisina*<sup>8</sup> <sup>8</sup> funktioina:

$$\begin{aligned}\underline{\ell}_1 + \underline{v}_1 &= a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + \cdots + a_{1m}\hat{x}_m, \\ \underline{\ell}_2 + \underline{v}_2 &= a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + \cdots + a_{2m}\hat{x}_m, \\ &\vdots \\ \underline{\ell}_n + \underline{v}_n &= a_{n1}\hat{x}_1 + a_{n2}\hat{x}_2 + \cdots + a_{nm}\hat{x}_m,\end{aligned}\tag{14.1}$$

jos on  $n$  havaintoa  $\underline{\ell}_i$ ,  $n$  jäännösvirhettä eli residuaalia  $\underline{v}_i$  ja  $m$  tuntemattomaa  $\hat{x}_j$ .

Yhtälöryhmä kirjoitetaan kätevästi matriisiyhtälön muotoon

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{x},\tag{14.2}$$

jossa

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ \vdots \\ \underline{\ell}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix}.$$

Matriisi  $A$  on suorakulmainen:  $n > m$ , korkeus on suurempi kuin leveys. Havainnoja eli yhtälöitä on enemmän kuin tuntemattomia: *redundanssi*. Havainnot  $\underline{\ell}$ , tuntemattomat  $\hat{x}$  ja jäännösvirheet  $\underline{v}$  ovat *abstrakteja*

<sup>7</sup>Suomen kielellä nimitys ”virheyhtälöt” on vakiintunut. Kuitenkin englanninkielinen ”*observation equations*” tuntuu järkevämältä, koska jäännösvirheet  $\underline{v}_i$  eivät suinkaan ole ”virheitä”.

<sup>8</sup>Usein tosielämän havaintoyhtälöt eivät ole lineaarisia. Silloin *linearisointi* on useimmiten mahdollinen, katso osio 14.6.



vektoreita, abstraktin vektoriavaruuden alkioita:

$$\underline{\ell}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^m.$$

Usein saa olettaa, että kaikilla havainnoilla  $\ell_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  on sama keskivirhe  $\sigma$  (ja saman muotoinen tilastollinen jakauma) ja että havainnot ovat *keskenään tilastollisesti riippumattomia*, mikä merkitsee myös, että havainnot eivät korreloi keskenään. Oletusta kutsutaan englannin kielellä *i.i.d.* — ”independent, identically distributed”.



### 14.4.3 Normaalilyhtälöt

Matriisiyhtälöstä 14.2 lasketaan pienimmän neliösumman ratkaisu ensin kertomalla vasemmalta matriisin  $A$  transpoosilla  $A^T$ :

$$A^T A \hat{x} = A^T \underline{\ell} + A^T \underline{v}.$$

<sup>9</sup> Asetetaan<sup>9</sup>

$$A^T \underline{v} = 0,$$

antaen pienimmän neliösumman ratkaisulle  $\hat{x}$ :

$$(A^T A) \hat{x} = A^T \underline{\ell}. \quad (14.3)$$

Tämä on yhtälöryhmä, jossa on  $m$  yhtälöä ja  $m$  tuntematonta vektorissa  $\hat{x}$ : kerroinmatriisi  $A^T A$  on neliön muotoinen.



### 14.4.4 Normaalilyhtälöiden ratkaisu

Ratkaisu eli *estimaattori* saadaan esimerkiksi seuraavalla tavalla:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell}, \quad (14.4)$$

olettaen, että matriisi  $A^T A$  voidaan todella *käöntää*, siis että se ei ole singulaarinen.

Yhtälöt 14.3 tunnetaan *normaalilyhtälöinä*.

<sup>9</sup>Jos kirjoitetaan  $\eta \stackrel{\text{def}}{=} A\xi$ , on

$$\langle \eta \cdot \underline{v} \rangle = \langle (A\xi) \cdot \underline{v} \rangle = \xi^T A^T \underline{v} = 0$$

mielivaltaiselle vektorille  $\xi$ ; sanotaan, että vektoreiden  $A\xi$  havaintosuureiden avaruuden aliavaruus (”ratkaisuavaruus”, matriisin  $A$  sarakkeiden virittämä) on *kohtisuora* jäännösvirheiden aliavaruutta kohtaan. Tästä nimi ”normaalilyhtälöt” juontaa juurensa.



Siinä tapauksessa, että kaikilla havainnoilla on sama keskivirhe  $\sigma$  (eli sama *varianssi*  $\sigma^2$ ) ja että ne eivät korreloi keskenään, ratkaisu 14.4 on *optimaalinen* pienimmän neliösumman merkityksessä.

Tietysti yhtälöryhmän ratkaiseminen perinteisin keinoin, ilman matriiseja, ratkaisuvektorin  $\hat{x}$  alkioiden eli tuntemattomien laskemiseksi on myös käypä menetelmä: kirjoitetaan normaaliyhtälöt 14.3 seuraavalla tavalla, joka soveltuu hyvin tietokonekoodaukseen:

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{jk} a_{ji} \right) \hat{x}_i = \left( \sum_{j=1}^n a_{jk} \ell_j \right), \quad k = 1, \dots, m.$$

Tämä yhtälöryhmä koostuu  $m$  lineaarisesta yhtälöstä  $m$ :ssä tuntemattomassa  $\hat{x}_i$ , jonka ratkaisemiseksi löytyy numeerisia standardimenetelmiä ja ohjelmakirjastoja. Yleensä suurin haaste on löytää sopivat havaintoyhtälöt 14.1 konkreettisisessa mittaustilanteessa.

Yllä annetut keskiarvon ja lineaarisen regression ratkaisut, osiot 14.2 ja 14.3, ovat yleisen tasoitusratkaisun erikoistapauksia, kuten tullaan näyttämään.



#### 14.4.5 Tarkkuuden arviointi

Kun lasketaan pienimmän neliösumman ratkaisu yhtälöllä

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell},$$

voidaan *varianssien kasautumislaillo* saada myös estimaattorin  $\hat{x}$  tarkkuus.

Oletetaan edelleen, että havaintojen  $\underline{\ell}$  varianssimatriisi on  $\text{Var}\{\underline{\ell}\} = \sigma^2 I$ , eli havainnot ovat keskenään korreloimattomia ja kaikki yhtä tarkkoja.

Jos määritetään lineaarinen operaattori

$$L \stackrel{\text{def}}{=} (A^T A)^{-1} A^T,$$

saadaan lineaarisen riippuvuussuhteen perusteella

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\hat{x}\} &= \Sigma_{xx} = L \text{Var}\{\underline{\ell}\} L^T = \\ &= (A^T A)^{-1} A^T \cdot \sigma^2 I \cdot A (A^T A)^{-1} = \sigma^2 (A^T A)^{-1}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Tämä mielenkiintoinen tulos kertoo, että matriisisuure  $(A^T A)^{-1}$  edustaa *havaintojen keskivirheen  $\sigma$  kulkemista tasoituksen lopputuloksen  $\hat{x}$  variansseihin*.



Matriisia  $N = P_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} A^T A$  kutsutaan *tuntemattomien painomatriisiksi* tai *normaalimatriisiksi*, ja sen käänteismatriisia, matriisi  $Q_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} (A^T A)^{-1}$ , kutsutaan *tuntemattomien painokerroinmatriisiksi* (Baarda, 1981).



## 14.5 Pienimmän neliösumman menetelmän esimerkkejä

Sekä keskiarvo että lineaarinen regressio ovat oivia esimerkkejä pienimmän neliösumman tasoitusmenetelmästä. Ne ovat käytännöllisiä ja vielä suhteellisen yksinkertaisia. Seuraavassa käydään ne askel kerrallaan läpi ja näytetään, miten ne ovat yleisen pienimmän neliösumman menetelmän erikoistapauksia.



### 14.5.1 Keskiarvo pienimmän neliösumman tasoituksena

Havaitaan sama suure  $x$  suoraan  $n$  kertaa:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 + \underline{v}_1 &= \hat{x} \\ \underline{x}_2 + \underline{v}_2 &= \hat{x} \\ &\vdots \\ \underline{x}_n + \underline{v}_n &= \hat{x} \end{aligned} \quad (14.6)$$

Tässä  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  ovat yksittäiset havaintoarvot,  $\hat{x}$  on tuntemattoman suureen  $x$  estimaattori ja  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  ovat havaintojen jäännösvirheet.

Sopivan tasoitusmenettelyn laatimisen salaisuus on löytää havaintoyhtälöryhmän *standardimuoto*

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{x}.$$

Tässä tapauksessa se onnistuu valitsemalla

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^n \text{ kertaa}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Tarkista, että tämä todella on yhtenevä yhtälöiden 14.6 kanssa.

Normaaliyhtälöt ovat nyt

$$\overbrace{A^T A}^N \hat{x} = \overbrace{A^T \underline{\ell}}^b,$$



jossa normaalimatriisi  $N$  on

$$N = A^T A = \left[ \begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}^{n \text{ kertaa}} \\ 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} n \text{ kertaa} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} n \end{bmatrix}$$

ja oikean puolen vektori

$$\underline{b} = A^T \underline{\ell} = \left[ \begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}^{n \text{ kertaa}} \\ 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu saadaan siis seuraavasti:

$$\left[ \begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right] \hat{x} = \left[ \begin{array}{c} \underline{b} \\ \sum_{i=1}^n \underline{x}_i \end{array} \right] \Rightarrow \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i,$$

klassinen keskiarvon yhtälö!

Myös ratkaisun *tarkkuuden* eli keskivirheen johtaminen onnistuu. Oletus, että havaintojen  $\underline{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , keskivirheet ovat kaikki sama  $\sigma$  ja että havainnot eivät korreloi keskenään — mikä on keskiarvoyhtälön käytön edellytys — merkitsee, että havaintovektorin  $\underline{\ell}$  varianssimatriisi on

$$\text{Var}\{\underline{\ell}\} = \sigma^2 I = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$n \times n$  -kokoinen matriisi. Silloin yhtälön 14.5 mukaan tuntemattomien vektorin varianssimatriisi<sup>10</sup> on

10

$$\text{Var}\{\hat{x}\} = \sigma^2 (A^T A)^{-1} = \frac{1}{n} \sigma^2,$$

ja tuntemattoman keskivirhe on tämän neliöjuuri:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

<sup>10</sup>”Vektorilla”  $\hat{x}$  on tässä vain yksi alkio, ja vastaavasti myös ”matriisilla”  $\text{Var}\{\hat{x}\}$ .





### 14.5.2 Lineaarinen regressio pienimmän neliösumman tasoituksena

Kirjoitetaan lineaarisen regression havaintoyhtälöt muotoon

$$\underline{y}_i + \underline{v}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i,$$

jossa jokainen pari  $(x_i, \underline{y}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  on yksi havainto ja sovitettavan suoran kertoimet  $\hat{a}$  ja  $\hat{b}$  ovat määritettävänä.

Jos kirjoitetaan havaintojen vektori, jäännösvirheiden vektori, tuntemattomien vektori ja taas (olennaista!) rakennematriisi seuraavasti:

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix},$$

<sup>11</sup> voidaan tämä ryhmä kirjoittaa havaintoyhtälöiden standardimuotoon<sup>11</sup>

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{\underline{x}}.$$

Normaaliyhtälöissä

$$\overbrace{A^T A}^N \hat{\underline{x}} = \overbrace{A^T \underline{\ell}}^{\underline{b}}$$

normaalimatriisi on

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}$$

ja oikean puolen vektori

$$\underline{b} = A^T \underline{\ell} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \underline{y}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \underline{y}_i \end{bmatrix}.$$

<sup>11</sup>Kirjaimen  $x$  käyttö tässä voi aiheuttaa sekaannusta, ja sillä ei ole mitään tekemistä  $x_i$ :n kanssa!





TAULUKKO 14.1. Mittaustulokset lineaarista regressiota varten.

	$i \rightarrow 1$	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^5$
$x_i$	1,51	2,44	3,34	4,41	5,05	16,75
$y_i$	2,32	3,12	3,57	3,93	4,15	17,09
$x_i^2$	2,28	5,95	11,16	19,45	25,50	64,34
$x_i y_i$	3,50	7,61	11,92	17,33	20,96	61,32

Tästä saadaan ratkaisu kääntämällä yllä oleva  $2 \times 2$  -matriisi. Kuitenkin ratkaisu onnistuu myös yksinkertaisesti eliminoimalla ja takaisinsijoittamalla. Yhtälöryhmä on

$$\begin{aligned} n \cdot \hat{a} + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \hat{b} &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \hat{a} + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \hat{b} &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

Vähennetään ensimmäinen yhtälö toisesta kerrottuna kertoimella  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , tuloksena

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \cdot \hat{b} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i,$$

josta

$$\hat{b} = \left( n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right) / \left( n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right).$$

Nyt saadaan  $\hat{a}$  takaisinsijoituksella:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \hat{b} \right).$$

Löytyneet lausekkeet ovat samantarvoisia osiossa 14.3 annettujen lausekkeiden kanssa.



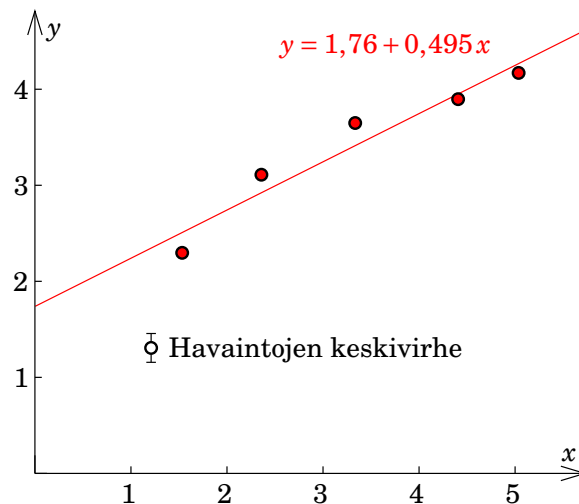
### 14.5.3 Lineaarisen regression laskuesimerkki

Olkoon annettuna taulukon 14.1 esittämät mittaustulokset. Mittausten graafinen esitys on kuvassa 14.5.

Taulukossa on laskettu valmiiksi tarvittavat summat

$$\sum_{i=1}^n x_i, \quad \sum_{i=1}^n y_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$





KUVA 14.5. Lineaarisen regression laskuesimerkki.

Tästä

$$\hat{b} = \frac{5 \cdot 61,32 - 16,75 \cdot 17,09}{5 \cdot 64,34 - 16,75^2} = \frac{20,3425}{41,1375} = 0,495,$$

$$\hat{a} = \frac{1}{5} (17,09 - 16,75 \cdot \hat{b}) = 1,76.$$

Tämä ratkaisu on piirretty kuvaan 14.5.

Normaalimatriisi eli *tuntemattomien painomatriisi* saadaan seuraavasti:

$$N = P_{xx} = A^T A = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,00 & 16,75 \\ 16,75 & 64,34 \end{bmatrix}$$

ja sen käänteismatriisi on

$$Q_{xx} = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5640 & -0,4072 \\ -0,4072 & 0,1215 \end{bmatrix},$$

*painokerroinmatriisi*. Tästä saadaan varianssimatriisi

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 Q_{xx} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1,5640 & -0,4072 \\ -0,4072 & 0,1215 \end{bmatrix},$$

josta saadaan keskivirheet  $\sigma_a$  ja  $\sigma_b$  lävistäjäalkioiden neliöjuurina:

$$\hat{a} = 1,76 \pm 1,25 \sigma,$$

$$\hat{b} = 0,495 \pm 0,349 \sigma.$$

Tässä  $\sigma$  on yhden pisteen  $y$ -arvon *a priori* (ennalta annettu) keskivirhe eli *painoyksikön keskivirhe*.





## 14.6 Geodeettisten mallien linearisointi

Geodesiassa, kuten yleisemmin tieteessä, löytyy kahden suureen välisiä yhteyksiä, jotka käyttäytyvät *epälineaarisesti*. Esimerkkejä tästä ovat havaintosuureiden ja tuntemattomien välinen yhteys tai kahden eri koordinaatiston koordinaattien välinen yhteys.

Kuitenkin monet teoriat, kuten esimerkiksi pienimmän neliösumman tasointusmenetelmä, perustuvat *lineaarisii* yhtälöihin, joiden matemaatiikka on olennaisesti yksinkertaisempaa. Myös virheiden (varianssien) kasautumislaki pätee vain lineaarisille riippuvuussuhteille suureiden välillä.

*Käytännössä* muodollisesti epälineaarinen yhteys, esimerkiksi pistekoordinaatin ja pisteelle mitatun suunnan välillä, on *melkein* lineaarinen pisteen sijainnin epävarmuusalueen sisällä. Onhan mittaustarkkuus geodesiassa varsin suuri: pisteen sijainnin epävarmuus voi olla senttimetrien luokkaa, kun pisteiden välinen etäisyys voi olla satoja metrejä tai kilometrejä. Silloin voidaan tutkia alkuperäisten suureiden sijasta yhteyttä suureiden pienten *vaihtelujen* tai *erotusten* välillä. Yhteys on lähestulkoon lineaarinen. Asia esitetään Taylorin sarjakehitelmän avulla.



### 14.6.1 Skalaaritapaus

Tavallisesti jos on kaksi suuretta, joiden välillä on funktionaalinen yhteys:

$$y = f(x),$$

voidaan se linearisoida valitsemalla *liikiarvo*  $x_0$  ja kehittämällä funktio Taylorin *sarjakehitelmään* liikiarvon ympäristössä. Saadaan

$$y = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \dots$$

eli

$$y - y_0 \approx a (x - x_0), \quad (14.7)$$

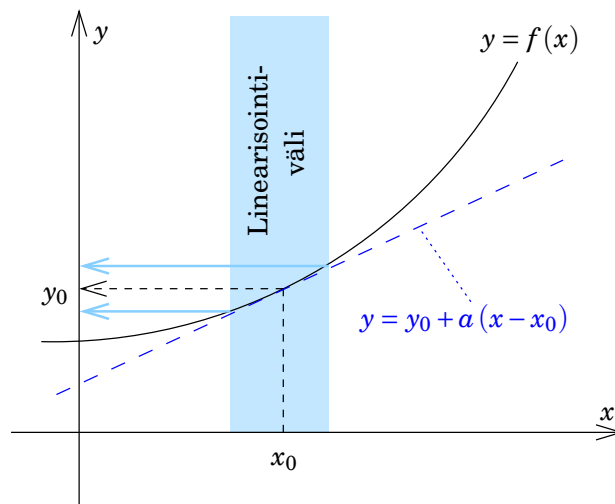
jossa

$$y_0 \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0), \quad a \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Delta y = a \Delta x,$$





KUVA 14.6. Yksiulotteinen kuvaus ja linearisointi.

mikä usein lyhennetään muotoon

$$y = ax,$$

kun vain muistetaan, että nyt  $x$  ja  $y$  ovat ”linearisoidut suureet”, siis erotussuureet  $\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0$  ja  $\Delta y \stackrel{\text{def}}{=} y - y_0$  poikkeamina likiarvoista  $x_0$  ja  $y_0$ .



### 14.6.2 Vektoritapaus

Jos on kaksi vektorisuuretta,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

joiden välillä on funktionaalinen yhteys

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

eli

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$



tilanne mutkistuu. Voidaan valita *likiarvojen vektori*

$$\mathbf{x}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix},$$

ja vastaava likiarvojen vektori  $\mathbf{y}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ , jonka jälkeen taas

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \left. \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_1 - x_1^{(0)}) + \\ &\quad + \left. \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_2 - x_2^{(0)}) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \left. \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_n - x_n^{(0)}) + \dots \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} y_i &= y_i^{(0)} + \left. \frac{\partial F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_1 - x_1^{(0)}) + \\ &\quad + \left. \frac{\partial F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_2 - x_2^{(0)}) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \left. \frac{\partial F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_n - x_n^{(0)}) + \dots, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Tässä yhtälössä on  $m$  eri riviä ja jokaisella rivillä on  $n$  eri (lineaarista) termiä. Tämän yhtälöryhmän yhteenvedoksi kirjoitetaan seuraava matriisiyhtälö:

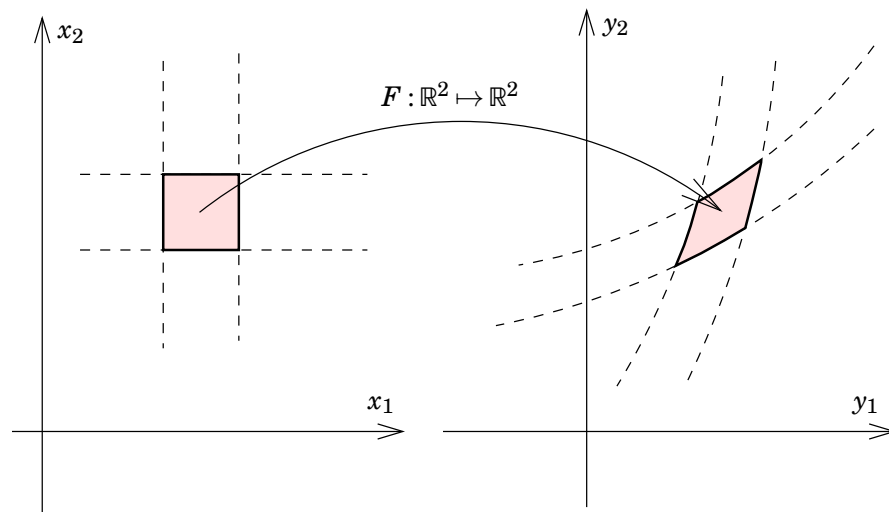
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots,$$

jossa matriisi  $\mathbf{A}$  on

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} F_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_m & \frac{\partial}{\partial x_2} F_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_m \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}.$$

Tämä matriisi on kahden abstraktin vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^n$  ja  $\mathbb{R}^m$  välisen vektorikuvauksen  $F: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  *Jacobin*<sup>12</sup> *matriisi*. Matriisi kuvaa *pai-*<sup>12</sup>





KUVA 14.7. Kaksiulotteinen kuvaus.

*kallisesti*, siis pisteen  $x = x_0$  ympäristössä, millä tavalla pienet ”häiriöt” vektorissa  $x$  kulkeutuvat vektoriin  $y$ :

$$\Delta y = y - y_0 \approx A(x - x_0) = A \Delta x,$$

määritelmillä  $\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0$  ja  $\Delta y \stackrel{\text{def}}{=} y - y_0$ . Erotussuureiden  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  välinen kuvaus on siis paikallisesti lineaarinen. Tätä kutsutaan *linearisoinniksi*.

Yleisessä tapauksessa  $m \neq n$ . Erikoistapauksessa  $m = n$  voidaan ajatella, että kuvauksella  $F$  olisi käänteiskuvaus  $G = F^{-1}$ , jolla

$$\Delta x = G(\Delta y).$$

*Paikallisesti*, likipisteen  $x_0$  ympäristössä, voidaan tästä sanoa: Jos matriisi  $A$  on *singulaarinen*, toisin sanoen sen determinantti  $\det A = 0$ , pisteen  $x_0$  ympäristössä, merkitsee tämä, että kuvauksella  $F$  ei ole olemassa siinä ympäristössä käänteistä kuvausta. Tämä merkitsee taas, että voi olla useita (itse asiassa äärettömän monta) eri arvoa  $\Delta x$ , joilla on kaikki sama kuva  $\Delta y = F(\Delta x)$ . Toisaalta jos  $\det A \neq 0$  pisteessä  $x_0$ , sellainen käänteiskuvaus on (riittävän pienellä likipisteen  $y_0$  ympäristössä) olemassa.

**Tulkinta** Determinantti  $\det A$  kuvaa, miten *tilavuudet* kuvautuvat vektorikuvauksen  $F$  alla.

Esimerkiksi jos  $n = m = 2$ , se kuvaa, miten pikkuneliön pinta-ala  $\mathbb{R}^n$ -avaruudessa kuvautuu suunnikkaan pinta-alaksi

<sup>12</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, oli juutalaissaksalainen matemaatikko, Königsbergin yliopiston professori 1827–1842.



$\mathbb{R}^m$ -avaruuteen. Determinantti on niiden kahden pinta-alan suhde.

Jos  $n = m = 3$ , determinantti on vastaavasti sama kuin suhde  $\mathbb{R}^n$ -avaruuden pikkukuution ja sen  $\mathbb{R}^m$ -avaruuden vastaavan parallelepipedin eli suuntaissärmiön tilavuuksien välillä.

Jos suhde on nolla, ilmeisesti neliö ”litistyy” viivapätkäksi ja kuutio taso-suunnikkaaksi, ja kuvaus on siis singulaarinen.



### 14.6.3 Havaintoyhtälöiden linearisointi

Käsitellään esimerkkinä funktionaalista yhteyttä tuntemattomien  $x$  ja havaintosuureiden  $\ell$  välillä. Yhteys on todellisessa mittausgeometriassa harvoin lineaarinen. Joudutaan *linearisoimaan*: olkoon ei-lineaariset havaintoyhtälöt

$$\underline{\ell} + \underline{v} = F(\hat{x}), \quad (14.8)$$

jossa  $F(\cdot)$  on moniulotteinen ei-lineaarinen ”havaintofunktio”.

Yhtälöt linearisoidaan kehittämällä ne Taylorin sarjaan karkeasti arvioitujen ratkaisukoordinaattien (”likiarvojen”) ympärille ja käyttämällä sarjasta vain ensimmäisen asteen termit. Jos käytetyt likiarvot eivät ole riittävän hyviä, joudutaan *iteroimaan*.

Valitaan *likiarvojen vektori*  $x_0$  ja yhteensopivasti vektori  $\ell_0$ , joille siis pätee

$$\ell_0 = F(x_0). \quad (14.9)$$

Siis kun tuntemattomien lukumäärä on  $m$  ja havaintojen lukumäärä  $n$ :

$$\ell_i^{(0)} = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Tämä vähennetään yhtälöstä 14.8 ja tehdään Taylorin sarjakehitelmä, säilyttäen vain lineaariset termit:

$$\begin{aligned} (\underline{\ell}_i - \ell_i^{(0)}) + \underline{v}_i &= F_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m) - F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \approx \\ &\approx \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} (\hat{x}_j - x_j^{(0)}). \end{aligned}$$

Kutsutaan

$$A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=x_0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (14.10)$$



*rakennematriisin* alkioit. Itse matriisi on silloin

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} F_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} F_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_n & \frac{\partial}{\partial x_2} F_n & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} F_n \end{array} \right] \bigg|_{x_1=x_1^{(0)}, x_2=x_2^{(0)}, \dots, x_m=x_m^{(0)}}.$$

Jos kutsutaan

$$\Delta \underline{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{\ell} - \underline{\ell}_0) = (\underline{\ell} - F(\underline{x}_0)), \quad \Delta \widehat{\underline{x}} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\underline{x}} - \underline{x}_0)$$

(”korvaavat” eli ”linearisoidut” havaintosuureet ja tuntemattomat), saadaan linearisoiduiksi havaintoyhtälöiksi

$$\Delta \underline{\ell} + \underline{v} = A \Delta \widehat{\underline{x}}. \quad (14.11)$$

Tässä laskettava pienimmän neliösumman ratkaisu minimoi jäännösvirheiden neliöiden summan  $\underline{v}^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}$ , mistä nimi tulee. Matriisi  $Q_{\ell\ell}$  on havaintojen suhteellista tarkkuutta ja mahdollista keskinäistä tilastollista riippuvuutta (korrelaatiota) kuvaava havaintojen *painokerroinmatriisi*<sup>13</sup>.

Yhtälöstä 14.11 jätetään usein  $\Delta$  pois kirjoitusmukavuuden vuoksi.  $\Delta$ -suureet ovat tyypillisesti paljon pienempiä kuin ”kokonaiset” suureet. Siksi numeriiikka onnistuu hyvin, vaikka  $A$ -matriisin alkioit eivät olisi eksakteja.

Kuitenkin yhtälö 14.9 on aina laskettava *tarkasti* ja riittävällä desimaalien määrällä.



## 14.7 Varianssien kasautumislaki

Jos stokastinen suure  $\underline{y}$  on stokastisen suureen  $\underline{x}$  lineaarinen funktio:

$$\underline{y} = \lambda \underline{x},$$

voidaan kirjoittaa myös

$$\sigma_y = \lambda \sigma_x,$$

jossa  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$  ovat suureiden  $x$  ja  $y$  keskivirheet. Samalla voidaan kirjoittaa

$$E\{\underline{y}\} = E\{\lambda \underline{x}\} = \lambda E\{\underline{x}\}$$

<sup>13</sup>Kirjoitetaan  $\text{Var}\{\underline{\ell}\} = \Sigma_{\ell\ell} = \sigma^2 Q_{\ell\ell}$ , jossa  $\Sigma_{\ell\ell}$  on havaintojen varianssimatriisi ja  $\sigma$  painoyksikön keskivirhe.





(”odotusarvojen kasautumislaki”), jossa  $E\{\cdot\}$  on odotusarvo-operaattori. Odotusarvo on *lineaarinen* operaattori.

Jos määritellään varianssi seuraavasti:

$$\text{Var}\{\underline{x}\} = \sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{\left(\underline{x} - E\{\underline{x}\}\right)^2\right\},$$

seuraa, että

$$\sigma_y^2 = \lambda^2 \sigma_x^2.$$

Tämä on *varianssien kasautumislaki* yksinkertaiselle stokastiselle suurelle.

Jos stokastisilla suureilla

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

on useita komponentteja — eli ne ovat abstrakteja vektorisuureita — pätee, jos  $\underline{y} = \Lambda \underline{x}$ , että

$$E\{\underline{y}\} = \Lambda E\{\underline{x}\} \quad (14.12)$$

ja

$$\text{Var}\{\underline{y}\} = \Lambda \text{Var}\{\underline{x}\} \Lambda^T, \quad (14.13)$$

jossa nyt  $\Lambda$  ja varianssit ovat *matriiseja*.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$$

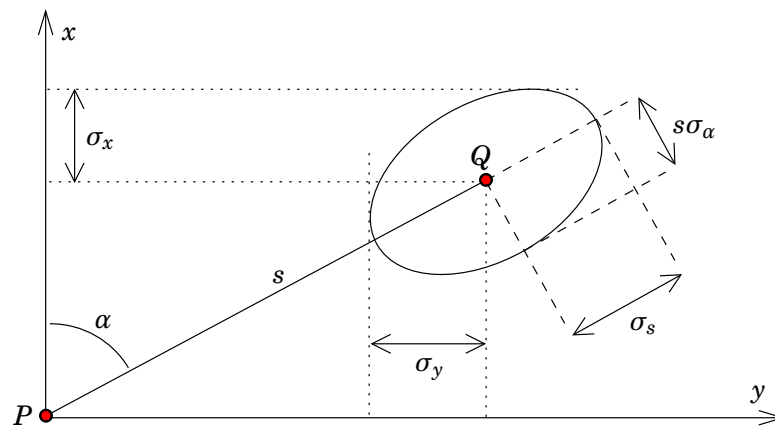
on  $m \times n$  -kokoinen matriisi.

$$\text{Var}\{\underline{x}\} = \Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

on  $n \times n$  -kokoinen, neliön muotoinen matriisi ja

$$\text{Var}\{\underline{y}\} = \Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 y_2} & \cdots & \sigma_{y_1 y_m} \\ \sigma_{y_2 y_1} & \sigma_{y_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{y_m y_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{y_m}^2 \end{bmatrix}$$





KUVA 14.8. Virhe-ellipsiin liittyvät suureet.

on  $m \times m$  -kokoinen neliömatriisi. Tässä varianssit ovat

$$\sigma_{x_i}^2 = \text{Var}\{\underline{x}_i\} = E\left\{(\underline{x}_i - E\{\underline{x}_i\})^2\right\}$$

ja kovarianssit

$$\sigma_{x_i x_j} = \text{Cov}\{\underline{x}_i, \underline{x}_j\} = E\left\{(\underline{x}_i - E\{\underline{x}_i\})(\underline{x}_j - E\{\underline{x}_j\})\right\},$$

ja samoin vektorin  $\underline{y}$  komponenteille.

Yhtälöä 14.13 kutsutaan *yleiseksi varianssien kasautumislainsi*. Se on jo alaosiossa 2.4.4 johdetun yhtälön 2.4 yleistys mielivaltaisille muuttujien lukumäärille. Tässä oletettu lineaarisuusominaisuus saadaan tarvittaessa aikaan linearisoimalla, josta puhuttiin aikaisemmin.



## 14.8 Esimerkki: geodeettinen päätehtävä

Varianssien kasautumislain sovelluksena esitetään *geodeettinen päätehtävä* tasossa, jossa suunta- ja etäisyysmittauksen tunnetut epävarmuudet kulkevat eli *kasautuvat* tuntemattoman pisteen koordinaattien epävarmuudeksi.

Annettuna mittasuureet  $s$  ja  $\alpha$  sekä lähtöpisteen  $P$  koordinaatit  $(x_P, y_P)$ , tehtävä on määrittää tuntemattoman pisteen  $Q$  koordinaatit, kuva 14.8:

$$x_Q = x_P + s \cdot \cos \alpha, \quad y_Q = y_P + s \cdot \sin \alpha.$$

Ongelma ratkaistaan seuraavalla tavalla. Valitaan likiarvot  $s^{(0)}, \alpha^{(0)}$ :

$$s = s^{(0)} + \Delta s, \quad \alpha = \alpha^{(0)} + \Delta \alpha,$$

ja kehitetään Taylorin sarjaksi:

$$x_Q \approx x_P + s^{(0)} \cos \alpha^{(0)} + \Delta s \cos \alpha^{(0)} + s^{(0)} \frac{\partial \cos \alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^{(0)}} \Delta \alpha =$$



$$= \overbrace{x_P + s^{(0)} \cos \alpha^{(0)}}^{x^{(0)}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha^{(0)} & -s^{(0)} \sin \alpha^{(0)} \end{bmatrix}}^{\Delta x} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta \alpha \end{bmatrix},$$

ja samalla tavalla

$$y_Q \approx \overbrace{y_P + s^{(0)} \sin \alpha^{(0)}}^{y^{(0)}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \sin \alpha^{(0)} & s^{(0)} \cos \alpha^{(0)} \end{bmatrix}}^{\Delta y} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta \alpha \end{bmatrix}.$$

Nyt jättämällä pois mutta muistamalla likiarvotarrat (0) ja tekemällä vektoreista  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  satunnaissuureita eli *stokastisia* suureita:

$$\underline{y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{y} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta \underline{s} \\ \Delta \underline{\alpha} \end{bmatrix},$$

ja

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -s \sin \alpha \\ \sin \alpha & s \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{Var}\{\underline{x}\} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix},$$

yllä olevat yhtälöt voidaan kirjoittaa lyhyesti muotoon

$$\underline{y} = \Lambda \underline{x}.$$

Varianssimatriisi on

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\underline{y}\} &= \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \Lambda \text{Var}\{\underline{x}\} \Lambda^\top = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -s \sin \alpha \\ \sin \alpha & s \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -s \sin \alpha & s \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ja alkioit ovat

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_s^2 \cos^2 \alpha + \sigma_\alpha^2 s^2 \sin^2 \alpha, \\ \sigma_y^2 &= \sigma_s^2 \sin^2 \alpha + \sigma_\alpha^2 s^2 \cos^2 \alpha, \\ \sigma_{xy} &= \cos \alpha \sin \alpha (\sigma_s^2 - s^2 \sigma_\alpha^2), \end{aligned}$$

laskettuna varianssien kasautumislain 14.13 avulla<sup>14</sup>.

14

<sup>14</sup>Jos ilmaistaan suunnan  $\alpha$  varianssi gooneissa, voidaan sijoittaa kaikkiin yhtälöihin

$$\sigma_\alpha^2 = \left( \frac{\sigma_\alpha [\text{g}]}{\rho} \right)^2,$$

jossa  $\rho$  on radiaanin suuruus käytetyssä asteyksikössä, tässä tapauksessa  $\rho = 63,661977236758$ . Samoin kun käytetään kaarisekunteja: silloin

$$\sigma_\alpha^2 = \left( \frac{\sigma_\alpha ["]}{\rho} \right)^2,$$

jossa nyt  $\rho = 57,295779513 \times 60 \times 60 = 206264,806247$ .



Sijoittamalla vielä

$$\cos \alpha = \frac{x_Q - x_P}{s}, \quad \sin \alpha = \frac{y_Q - y_P}{s},$$

saadaan vaihtoehtoinen muoto:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \text{Var}\{\Delta \underline{x}\} = \left(\frac{x_Q - x_P}{s}\right)^2 \sigma_s^2 + (y_Q - y_P)^2 \sigma_\alpha^2, \\ \sigma_y^2 &= \text{Var}\{\Delta \underline{y}\} = \left(\frac{y_Q - y_P}{s}\right)^2 \sigma_s^2 + (x_Q - x_P)^2 \sigma_\alpha^2, \\ \sigma_{xy} &= \text{Cov}\{\Delta \underline{x}, \Delta \underline{y}\} = \left(\left(\frac{\sigma_s}{s}\right)^2 - \sigma_\alpha^2\right) (x_Q - x_P)(y_Q - y_P). \end{aligned} \quad (14.14)$$

Näin havaintojen keskivirheet  $\sigma_s, \sigma_\alpha$  muunnetaan koordinaattikeskivirheiksi  $\sigma_x, \sigma_y$ . Tarkkuuteen vaikuttavat sekä havaintojen tarkkuudet  $\sigma_s, \sigma_\alpha$  että geometria  $s, \alpha$ .



### 14.8.1 Virhe-ellipsi ja sen ominaisarvotehtävä

*Virhe-ellipsi* eli epävarmuusellipsi on pisteen sijaintiratkaisun  $(x, y)$  tilastollinen epävarmuusalue. Sitä voidaan käyttää tilastollisissa testeissä.

Pistetarkkuuden mitaksi löytyy sopiva suure, joka ei riipu koordinaattiakseleiden suunnasta. Virhe-ellipsi on oikeastaan *pistevarianssimatriisin kuvaajaellipsi*. Kuvan 14.8 pisteen  $Q$  koordinaattien  $(x_Q, y_Q)$  — tai vastaavasti linearisoitujen koordinaattien  $(\Delta x, \Delta y)$  — varianssimatriisi voidaan kirjoittaa

$$\Sigma = \text{Var}\left\{\begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{y} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \text{Var}\{\Delta \underline{x}\} & \text{Cov}\{\Delta \underline{x}, \Delta \underline{y}\} \\ \text{Cov}\{\Delta \underline{x}, \Delta \underline{y}\} & \text{Var}\{\Delta \underline{y}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin *invariantit* ovat sen *ominaisarvot ja -vektorit*: ominaisarvotehtävän  $(\Sigma - \lambda I)\bar{\mathbf{x}} = 0$  ratkaisut  $(\lambda_i, \bar{\mathbf{x}}_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Jos käännetään koordinaatiston akselit niin, että ne ovat samansuuntaisia ellipsin pääakseleiden kanssa, saadaan

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s^2 \sigma_\alpha^2 & \\ & \sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

ja selvästi  $\lambda_1 = s^2 \sigma_\alpha^2$  ja  $\lambda_2 = \sigma_s^2$ .

Yleisessä tapauksessa ratkaistaan determinanttiyhtälö

$$\det(\Sigma - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \Sigma_{11} - \lambda & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} - \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sigma_x^2 - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$



Tätä kutsutaan *karakteristiseksi polynomiksi*:

$$\det(\Sigma - I\lambda) = (\sigma_x^2 - \lambda)(\sigma_y^2 - \lambda) - \sigma_{xy}^2 = 0,$$

siis

$$\lambda^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\lambda + (\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0, \quad (14.15)$$

standardi kvadraattinen yhtälö. Ratkaisut eli ominaisarvot ovat

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 - 4(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad (14.16) \end{aligned}$$

ja virhe-ellipsin iso- ja pikkuakselin puolikkaat ovat  $\sqrt{\lambda_1}$  ja  $\sqrt{\lambda_2}$ .

Myös akseleiden *suunnat* voidaan määrittää: tutki koordinaattien lineaariyhdistelmä

$$z(\theta) = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

joka on suuntakulman  $\theta$  funktio.

Varianssien kasautumislain avulla saadaan

$$\text{Var}\{z\} = \sigma_x^2 \sin^2 \theta + \sigma_y^2 \cos^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta.$$

Kuvaajaellipsin akselien suunnat ovat tämän suuntakulman  $\theta$  funktion *stationaariset arvot*,

$$\frac{d}{d\theta} \text{Var}\{z\} = 0.$$

Differentioimalla

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + 2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_{xy} &= 0 \\ \implies \sin 2\theta (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + 2 \cos 2\theta \cdot \sigma_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \arctan \left( -\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right) + k \cdot 100^\circ = \\ &= \arctan \frac{-\sigma_{xy}}{\frac{1}{2} (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + \sigma_{xy}^2}} + k \cdot 100^\circ, \end{aligned}$$

käyttämällä arctangentin puolikulmakaavaa<sup>15</sup>.

15

Saadaan vielä yhtälöstä 14.16:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Var}\{x\} + \text{Var}\{y\} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (14.17)$$



16 ja<sup>16</sup>

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det \Sigma = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2. \quad (14.18)$$

Suureet 14.17 ja 14.18 ovat *invariantteja* — siis aina samat, koordinaatiakseleiden orientoinnista riippumatta — ja etenkin suure 14.17, jota kutsutaan pisteen  $P$  *pistevarianssiksi*  $\sigma_P^2$ , on sopiva pistetarkkuuden mitta:

$$\sigma_P^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

*Pistekeskivirhe*  $\sigma_P$  on tämän pistevarianssin neliöjuuri.



## 14.9 Käytännön havaintosuureet ja havaintoyhtälöt

Tässä esitetään klassisen geodesian havaintosuureet: vaakasuuntien ja zeniittikulmien sekä vinoetäisyyksien mittaukset linearisoitujen havaintoyhtälöiden muodossa. Jo ylhäällä esitetyt GPS-havaintosuureet, yhtälöt 12.1 ja 12.2, ovat vinoetäisyyksimittauksen erikoistapauksia.

Kaikki esitetyt havaintosuureet ovat havainnoista, jotka on suoritettu kahden pisteen välillä pisteestä toiseen. Havaintoyhtälöt kuvaavat havaintosuureiden riippuvuutta tuntemattomista, tässä tapauksessa pisteiden kolmiulotteisista koordinaateista.

Esitämme vain yhden havainnon havaintoyhtälöt: tositilanteessa yhdistetään kaikkien havaintojen ja kaikkien tuntemattomien havaintoyhtälöt yhdeksi yhtälöryhmäksi ennen ryhtymistä ratkaisuun.



### 14.9.1 Vinoetäisyyksimittaus

Olkoon kojeen ja tähyksen koordinaatit  $(x_1, y_1, z_1)$  ja  $(x_2, y_2, z_2)$ . Silloin funktiomalli, yhtälö 14.8, on

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (14.19)$$

Oletetaan ensin, että piste 1, koordinaatit  $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^T$ , on tunnettu. Silloin tuntemattomat ovat vain pisteen 2 koordinaatit,  $\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^T$ .

<sup>15</sup>Näin vältetään nollajakoa rajatapauksessa  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ .

<sup>16</sup>Koska yhtälö 14.15 voidaan kirjoittaa muotoon

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

josta  $\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ , matriisin  $\Sigma$  jälki, ja  $\lambda_1 \lambda_2 = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2$ , sen *determinantti*.



Valitaan näihin likiarvot  $x_2^{(0)}$ ,  $y_2^{(0)}$ ,  $z_2^{(0)}$ , ja yhteensopivasti

$$s^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\left(x_2^{(0)} - x_1\right)^2 + \left(y_2^{(0)} - y_1\right)^2 + \left(z_2^{(0)} - z_1\right)^2}.$$

Vähennys antaa

$$\begin{aligned} \Delta s = s - s^{(0)} &= \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} - \\ &\quad - \sqrt{\left(x_2^{(0)} - x_1\right)^2 + \left(y_2^{(0)} - y_1\right)^2 + \left(z_2^{(0)} - z_1\right)^2} \approx \\ &\quad \approx \frac{\partial s}{\partial x_2} \overbrace{\left(x_2 - x_2^{(0)}\right)}^{\Delta x_2} + \frac{\partial s}{\partial y_2} \overbrace{\left(y_2 - y_2^{(0)}\right)}^{\Delta y_2} + \frac{\partial s}{\partial z_2} \overbrace{\left(z_2 - z_2^{(0)}\right)}^{\Delta z_2}, \end{aligned}$$

katkaistu Taylorin kehitelmä.

Tässä havaintojen abstraktilla ”vektorilla”  $\ell$  on vain yksi alkio,  $\ell = \begin{bmatrix} \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - s^{(0)} \end{bmatrix}$ , ja rakennematriisi  $A$  (yhtälö 14.10) koostuu tämän yhden havaintosuureen osittaisderivaatoista kaikkien tuntemattomien  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  suhteen:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_2} & \frac{\partial s}{\partial y_2} & \frac{\partial s}{\partial z_2} \end{bmatrix}.$$

Alkiot johdetaan differentioimalla yhtälö 14.19:

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{s}, \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{s}, \quad \frac{\partial s}{\partial z_2} = \frac{z_2 - z_1}{s}.$$

Numeerinen tulos saadaan sijoittamalla likiarvot:

$$A \approx \begin{bmatrix} \frac{x_2^{(0)} - x_1}{s^{(0)}} & \frac{y_2^{(0)} - y_1}{s^{(0)}} & \frac{z_2^{(0)} - z_1}{s^{(0)}} \end{bmatrix}.$$

Koordinaattien likiarvojen käyttö on sallittua, jos ne ovat ”riittävän hyviä”, niin lähellä totuutta, että linearisointi pätee.

Tämän matriisin  $A$  alkiot ovat yksikkövektorin komponentteja! Käyttämällä suuntakulman (atsimuutin)  $\alpha$  ja zeniittikulman  $\zeta$  likiarvot voidaan kirjoittaa

$$A \approx \begin{bmatrix} \cos \alpha^{(0)} \sin \zeta^{(0)} & \sin \alpha^{(0)} \sin \zeta^{(0)} & \cos \zeta^{(0)} \end{bmatrix},$$

eli symbolisesti

$$A = \bar{\mathbf{e}}_{12}^T,$$

jossa  $\bar{\mathbf{e}}_{12}$  on pisteiden 1 ja 2 välinen *suuntavektori* (komponenttien abstraktina vektorina), jolle pätee

$$\|\bar{\mathbf{e}}_{12}\| = 1.$$



Yleisempi tapaus, jossa molemmat pisteet ovat tuntemattomia, käsitellään seuraavaksi. Tuntemattomien vektoriksi muodostetaan

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^{(0)} & y_1 - y_1^{(0)} & z_1 - z_1^{(0)} & | & x_2 - x_2^{(0)} & y_2 - y_2^{(0)} & z_2 - z_2^{(0)} \end{bmatrix}^T,$$

ja havaintojen ”vektori” on taas  $\ell = \begin{bmatrix} \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - s^{(0)} \end{bmatrix}$ . Rakennematriisi  $A$ , yhtälö 14.10, on

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_1} & \frac{\partial s}{\partial y_1} & \frac{\partial s}{\partial z_1} & | & \frac{\partial s}{\partial x_2} & \frac{\partial s}{\partial y_2} & \frac{\partial s}{\partial z_2} \end{bmatrix}.$$

Edellisen perusteella on lopputulos

$$A \approx \begin{bmatrix} -\frac{x_{12}^{(0)}}{s^{(0)}} & -\frac{y_{12}^{(0)}}{s^{(0)}} & -\frac{z_{12}^{(0)}}{s^{(0)}} & | & \frac{x_{12}^{(0)}}{s^{(0)}} & \frac{y_{12}^{(0)}}{s^{(0)}} & \frac{z_{12}^{(0)}}{s^{(0)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{e}}_{12}^T & \bar{\mathbf{e}}_{12}^T \end{bmatrix},$$

jossa käytimme lyhenteet

$$x_{12}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} x_2^{(0)} - x_1^{(0)}, \quad y_{12}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} y_2^{(0)} - y_1^{(0)}, \quad z_{12}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} z_2^{(0)} - z_1^{(0)}.$$

Linearisoitu havaintoyhtälö on nyt

$$\begin{bmatrix} s - s^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{e}}_{12}^T & \bar{\mathbf{e}}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{r}}_1 \\ \Delta \bar{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}$$

jossa linearisoinut koordinaatit

$$\Delta \bar{\mathbf{r}}_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_i^{(0)} \\ y_i - y_i^{(0)} \\ z_i - z_i^{(0)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

ovat tuntemattomina, yhteensä kuusi.

Kirjoita tämä stokastiseen muotoon jäännösvirheineen  $\underline{v}$ :

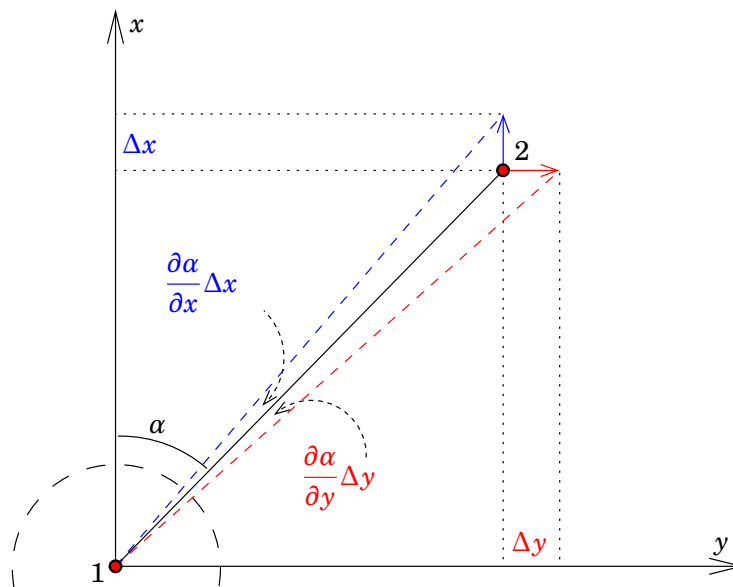
$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \underline{s} \end{bmatrix}}^{\ell} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{v} \end{bmatrix}}^{\mathbf{v}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{e}}_{12}^T & \bar{\mathbf{e}}_{12}^T \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{r}}_1 \\ \Delta \hat{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{x}}},$$

jossa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_{12}^T &= \begin{bmatrix} \frac{x_2^{(0)} - x_1^{(0)}}{s^{(0)}} & \frac{y_2^{(0)} - y_1^{(0)}}{s^{(0)}} & \frac{z_2^{(0)} - z_1^{(0)}}{s^{(0)}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{s} & \frac{y_2 - y_1}{s} & \frac{z_2 - z_1}{s} \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{x_{12}}{s} & \frac{y_{12}}{s} & \frac{z_{12}}{s} \end{bmatrix}^{(0)}, \end{aligned}$$







KUVA 14.9. Atsimuuttimittauksen geometria (katsottuna ylhäältä) ja rakenne-matriisin alkioita.

$$\Delta \hat{\mathbf{r}}_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_i \\ \Delta \hat{y}_i \\ \Delta \hat{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_i - x_i^{(0)} \\ \hat{y}_i - y_i^{(0)} \\ \hat{z}_i - z_i^{(0)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta \underline{s} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{s} - s^{(0)}.$$

Tässä yläindeksi (0) kertoo aina, että on kyse likiarvosta. Likiarvoille pätee funktiomalli tarkasti:

$$s^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)}) = \sqrt{\left(x_2^{(0)} - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(y_2^{(0)} - y_1^{(0)}\right)^2 + \left(z_2^{(0)} - z_1^{(0)}\right)^2}.$$

## 14.9.2 Atsimuuttimittaus

Jos atsimuutti eli vaakasuunta  $\alpha$  mitataan tuntemattomien pisteiden 1 ja 2 välillä:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + k \cdot 200^g,$$

tuntemattomien vektoriksi voi muodostaa

$$\mathbf{x} = \left[ x_1 - x_1^{(0)} \quad y_1 - y_1^{(0)} \mid x_2 - x_2^{(0)} \quad y_2 - y_2^{(0)} \right]^T.$$

Rakennematriisi saadaan taas ketjusäännön avulla, seuraavasti. Lyhennetään  $x_{12} = x_2 - x_1$ ,  $y_{12} = y_2 - y_1$ . Katso kuvan 14.9 geometrinen

logiikka:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \arctan(y_{12}/x_{12})}{\partial x_1} &= \frac{\partial \arctan(y_{12}/x_{12})}{\partial (y_{12}/x_{12})} \cdot \frac{\partial (y_{12}/x_{12})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_{12}}{\partial x_1} = \\ &= \frac{1}{1 + (y_{12}/x_{12})^2} \cdot \left(-\frac{y_{12}}{x_{12}^2}\right) \cdot (-1) = \frac{y_{12}}{x_{12}^2 + y_{12}^2} = \frac{y_{12}}{\rho^2} = \frac{\sin \alpha}{\rho}.\end{aligned}$$

Koko matriisi on nyt

$$\begin{aligned}A &\approx \left[ +\frac{\sin \alpha}{\rho} \quad -\frac{\cos \alpha}{\rho} \mid -\frac{\sin \alpha}{\rho} \quad +\frac{\cos \alpha}{\rho} \right]^{(0)} = \\ &= \left[ +\frac{y_2 - y_1}{\rho^2} \quad -\frac{x_2 - x_1}{\rho^2} \mid -\frac{y_2 - y_1}{\rho^2} \quad +\frac{x_2 - x_1}{\rho^2} \right]^{(0)},\end{aligned}$$

jossa  $\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , kojeen ja tähyksen välinen vaakatasolle projisoitu etäisyys.

Tästä saadaan linearisoitu havaintoyhtälö:

$$\underbrace{\Delta \underline{\alpha}}_{\ell} + \underbrace{\underline{v}}_{\underline{v}} = \overbrace{\left[ +\frac{y_2 - y_1}{\rho^2} \quad -\frac{x_2 - x_1}{\rho^2} \mid -\frac{y_2 - y_1}{\rho^2} \quad +\frac{x_2 - x_1}{\rho^2} \right]^{(0)}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_1 \\ \Delta \hat{y}_1 \\ \Delta \hat{x}_2 \\ \Delta \hat{y}_2 \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{x}}},$$

jossa deltat on muodostettu tavalliseen tapaan vähentämällä likiarvot havaituista tai estimoiduista arvoista:

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\alpha} &= \underline{\alpha} - \alpha^{(0)}, & \Delta \hat{x}_1 &= \hat{x}_1 - x_1^{(0)}, & \Delta \hat{y}_1 &= \hat{y}_1 - y_1^{(0)}, \\ \Delta \hat{x}_2 &= \hat{x}_2 - x_2^{(0)}, & \Delta \hat{y}_2 &= \hat{y}_2 - y_2^{(0)}.\end{aligned}$$



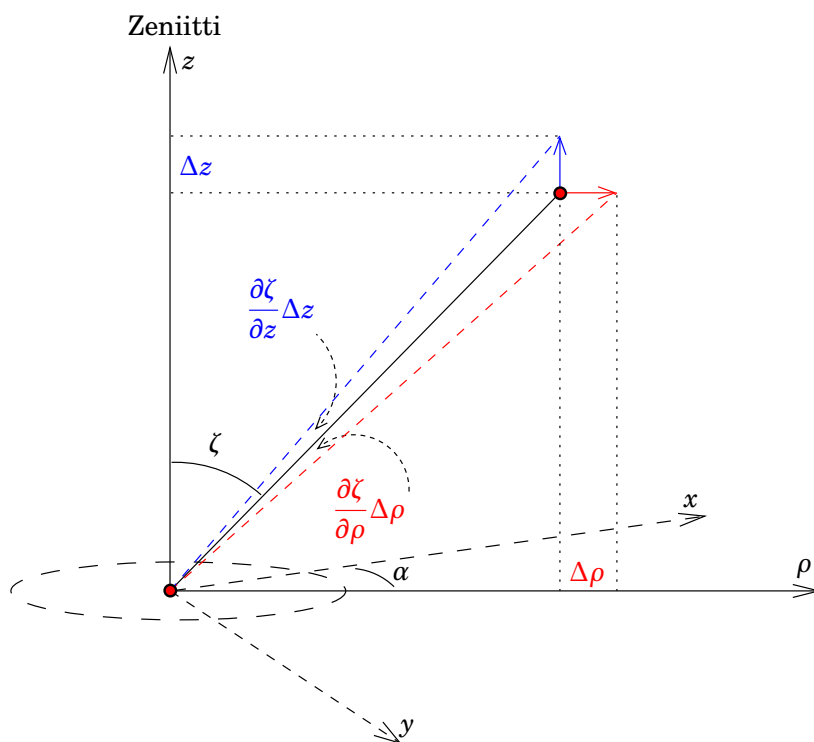
### 14.9.3 Vaakakulmamittaus

Käytännössä atsimuuttimittaus onnistuu vain gyroteodoliitilla, kalliil-la erikoislaitteella, jota käytetään etenkin maanalaisissa mittauksissa. Tavalliset teodoliitit eivät osaa mitata absoluuttisia vaakasuuntia, vaan vain suuntien välisiä *eroja* eli vaakakulmia.

Yksi tapa johtaa havaintoyhtälöä tähän havaintotyyppiin on lisätä *orientaatiotuntematon* tuntemattomien vektoriin, kuten tehtiin jo alao-siossa 6.4.1: silloin kojeen asemalla 1 on, kolmen koordinaatin  $x_1$ ,  $y_1$  ja  $z_1$  lisäksi, vielä neljäs tuntematon  $\Omega_1$ , ja havaintoyhtälö on

$$\theta = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \Omega_1 + k \cdot 200^g.$$





KUVA 14.10. Zeniittikulmamittauksen geometria.

Linearisointi suoritetaan kuten edellisessä alaosiossa, tuloksena

$$\underbrace{\frac{\Delta \ell}{\Delta \theta}} + \underbrace{\frac{v}{v}} = \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|cc} +\frac{y_2 - y_1}{\rho^2} & -\frac{x_2 - x_1}{\rho^2} & -1 & -\frac{y_2 - y_1}{\rho^2} & +\frac{x_2 - x_1}{\rho^2} \end{array} \right]}^A \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \Delta \hat{x}_1 \\ \Delta \hat{y}_1 \\ \Delta \hat{\Omega}_1 \\ \Delta \hat{x}_2 \\ \Delta \hat{y}_2 \end{pmatrix}^{(0)},$$

jossa  $\Delta \hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_1 - \Omega_1^{(0)}$ . Tämä tuntematon edustaa tuntematonta kojeen vaakakehän nollakohdan atsimuuttia, kun se on pystytettynä pisteellä 1.

#### 14.9.4 Zeniittikulmamittaus

Mitataan pisteiden 1 ja 2 välinen zeniittikulma

$$\zeta = \arccos \frac{z_2 - z_1}{s} = 100^g - \arctan \frac{z_2 - z_1}{\rho},$$

jossa taas  $\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

Kirjoita

$$A = \begin{bmatrix} -A_{12} & A_{12} \end{bmatrix}$$



jossa (ketjusääntö)

$$\begin{aligned} A_{12} &= \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} \right]^{(0)} = \\ &= \left[ \frac{1}{s} \cos \zeta \cdot \cos \alpha \quad \frac{1}{s} \cos \zeta \cdot \sin \alpha \quad -\frac{1}{s} \sin \zeta \right]^{(0)} = \\ &= \left[ \frac{z_2 - z_1}{s^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{\rho} \quad \frac{z_2 - z_1}{s^2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{\rho} \quad -\frac{\rho}{s^2} \right]^{(0)}. \quad (14.20) \end{aligned}$$

Tässä suureen  $\zeta$  osittaisderivaatat laskettiin lieriökoordinaateissa  $(\rho, \alpha, z)$  määritelmällä  $z \stackrel{\text{def}}{=} z_2 - z_1$ . Näissä koordinaateissa  $\zeta = \zeta(\rho, z)$ , siis  $\zeta$  ei riipu atsimuutista, ja saadaan (kuva 14.10):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = \frac{1}{s} \cos \zeta = \frac{1}{s} \frac{z_2 - z_1}{s}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} = -\frac{1}{s} \sin \zeta = -\frac{1}{s} \frac{\rho}{s}.$$

Nyt linearisoitu havaintoyhtälö on

$$\underbrace{\Delta \zeta}_{\ell} + \underbrace{v}_{\nu} = \overbrace{\begin{bmatrix} -A_{12} & A_{12} \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{r}}_1 \\ \Delta \hat{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{x}}},$$

jossa  $A_{12}$  kuten yllä, yhtälö 14.20, ja

$$\Delta \hat{\mathbf{r}}_i = \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_i \\ \Delta \hat{y}_i \\ \Delta \hat{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_i - x_i^{(0)} \\ \hat{y}_i - y_i^{(0)} \\ \hat{z}_i - z_i^{(0)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$



## 14.10 Takymetrimittaus

Voimme yhdistää edellisen neljän alaosion tulokset takymetrimittauksen kuvaamiseksi, jolloin mittaamme samanaikaisesti vaakasuunnan, pystykulman ja etäisyyden:

$$\begin{bmatrix} s \\ \theta \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_s \\ v_\theta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{bmatrix} 3 \times 3 \end{bmatrix}}^{[3 \times 3]} & 0 \\ -A_{12} & -1 \\ & 0 \end{array} \middle| \overbrace{\begin{bmatrix} 3 \times 3 \end{bmatrix}}^{A_{12}} \right] \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_1 \\ \Delta \hat{y}_1 \\ \Delta \hat{z}_1 \\ \Delta \hat{\Omega}_1 \\ \Delta \hat{x}_2 \\ \Delta \hat{y}_2 \\ \Delta \hat{z}_2 \end{bmatrix},$$

jossa

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{s} & \frac{y_2 - y_1}{s} & \frac{z_2 - z_1}{s} \\ -\frac{y_2 - y_1}{\rho^2} & +\frac{x_2 - x_1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{z_2 - z_1}{s^2} \frac{x_2 - x_1}{\rho} & \frac{z_2 - z_1}{s^2} \frac{y_2 - y_1}{\rho} & -\frac{\rho}{s^2} \end{bmatrix}^{(0)}$$

kaikilla yllä olevilla määritelmillä ja tuloksilla.





## 14.11 Helmertin muunnos tasossa



### 14.11.1 Teoria

Tasossa, jos on annettuna enemmän kuin kaksi pistettä molemmissa koordinaatistossa, voidaan laskea koordinaatistojen välisen Helmertin muunnoksen tuntemattomat parametrit. Lähdetään liikkeelle yhtälöstä **3.4 yhdelle pisteelle** (huomaa notaation muutos):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Jos kirjoitetaan  $K \stackrel{\text{def}}{=} 1 + m$ , jossa  $m$  on *mittakaavavääritymä*, oletettu pieneksi, saadaan, jos myös kiertokulma  $\theta$  on pieni:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx \\ &\approx \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

josta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_0 + mx + \theta y \\ y_0 + my - \theta x \end{bmatrix},$$

mikä voidaan järjestää uudelleen seuraavasti:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix}}^{\ell} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x^{(0)} & y^{(0)} \\ 0 & 1 & y^{(0)} & -x^{(0)} \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ m \\ \theta \end{bmatrix}}^{\times}.$$

Tämä on ilmeisesti kahden havaintoyhtälön ryhmä, jonka havaintojen vektori, tuntemattomien vektori ja rakennematriisi ovat  $\ell$ ,  $\times$  ja  $A$ , ja jossa  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  ovat pisteen koordinaattien  $(x, y)$  likiarvot<sup>17</sup>.

17

Jos useita pisteitä on annettuna molemmissa koordinaatistoissa:

$$\begin{bmatrix} x'_i - x_i \\ y'_i - y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_i^{(0)} & y_i^{(0)} \\ 0 & 1 & y_i^{(0)} & -x_i^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ m \\ \theta \end{bmatrix},$$

<sup>17</sup>Likiarvojen käyttö on tässä sallittu, koska sekä  $m$  että  $\theta$  oletetaan pieniksi.

jossa  $i$  on pistenumero. Nähdään, että jos käytettävissä olevien pisteiden määrä  $n$  ylittää 2, syntyy *redundanssi*: enemmän havaintoyhtälöitä —  $2n$  — kuin tuntemattomia — 4. Stokastisesti kirjoitettuna on nyt jään-  
nösvirheiden kera

$$\begin{bmatrix} \overbrace{x'_i - x_i}^{\ell} \\ \overbrace{y'_i - y_i}^{\ell} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{v_{2i-1}}^{\nu} \\ \overbrace{v_{2i}}^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad x_i^{(0)} \quad y_i^{(0)}}^A \\ \overbrace{0 \quad 1 \quad y_i^{(0)} \quad -x_i^{(0)}}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_0 \\ \widehat{y}_0 \\ \widehat{m} \\ \widehat{\theta} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.21)$$



#### 14.11.2 Epävarmuuden kasautuminen

Jos on enemmän kuin kaksi yhteistä pistettä  $(x', y')$ - ja  $(x, y)$ -järjestelmien välillä, on mahdollista määrittää Helmertin muunnoksen parametrien lisäksi, miten pisteiden epävarmuudet kasautuvat muunnosparametreihin. Katso esimerkiksi [Kahmen ja Faig \(1988\)](#), sivut 253–255.

Lähdetään havaintoyhtälöiksi kirjoitetusta Helmertin muunnosyhtälöstä, [14.21](#). Pisteiden annettujen koordinaattiarvojen  $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$  on oltava riittävän hyviä, ja mittakaavavääritysmä  $m$  ja akseleiden kiertokulma  $\theta$  oletetaan molemmat pieniksi. Tämä pitää useimmiten paikkansa: monet, myös paikalliset, koordinaatistot ovat suunnilleen oikeamittakavaisia ja orientoituneita pohjoiseen.

Yllä olevissa havaintoyhtälöissä on  $2n$  riviä, jossa  $n$  on pisteiden määrä:  $i = 1, \dots, n$ . Rakennematriisi  $A$  on muotoa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_i^{(0)} & y_i^{(0)} \\ 0 & 1 & y_i^{(0)} & -x_i^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Jos oletetaan, että annettujen pisteiden kaikki koordinaatit ovat yhtä tarkkoja, voidaan laskea *normaalimatriisi* eli tuntemattomien painomatriisi  $P_{xx}$  seuraavasti (symboli  $\sum$  merkitsee summaus kaikkien pisteiden yli, kaikki ala- ja yläindeksit pudotettu):

$$P_{xx} = A^T A = \begin{bmatrix} n & 0 & \sum x & \sum y \\ 0 & n & \sum y & -\sum x \\ \sum x & \sum y & \sum (x^2 + y^2) & 0 \\ \sum y & -\sum x & 0 & \sum (x^2 + y^2) \end{bmatrix}.$$

Tämän merkitys on, että tuntemattomien  $\widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_0 & \widehat{y}_0 & \widehat{m} & \widehat{\theta} \end{bmatrix}^T$  varians-



simatriisi on juuri

$$\text{Var}\{\hat{\mathbf{x}}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \sigma_{x_0}^2 & \sigma_{x_0 y_0} & \sigma_{x_0 m} & \sigma_{x_0 \theta} \\ \sigma_{y_0 x_0} & \sigma_{y_0}^2 & \sigma_{y_0 m} & \sigma_{y_0 \theta} \\ \sigma_{m x_0} & \sigma_{m y_0} & \sigma_m^2 & \sigma_{m \theta} \\ \sigma_{\theta x_0} & \sigma_{\theta y_0} & \sigma_{\theta m} & \sigma_{\theta}^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{Q}_{\text{xx}} = \sigma^2 \mathbf{P}_{\text{xx}}^{-1},$$

jossa  $\mathbf{Q}_{\text{xx}} = \mathbf{P}_{\text{xx}}^{-1}$  on tuntemattomien painokerroinmatriisi ja  $\sigma$  on painoyksikön keskivirhe, tässä tapauksessa yhden pistekoordinatin oletettu tarkkuus. Tässä lävistäjäalkiot  $\sigma_{x_0}^2 = \text{Var}\{\hat{x}_0\}$  ja niin edelleen ovat varianssit,  $\sigma_{x_0 y_0} = \text{Cov}\{\hat{x}_0, \hat{y}_0\}$  ja niin edelleen, kovarianssit.

Jos nyt  $\sum x = \sum y = 0$ , toisin sanoen  $(x, y)$  ovat *painopistekoordinaatit*, saadaan

$$\mathbf{P}_{\text{xx}} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum (x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum (x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

ja, kirjoittaen  $\mathbf{Q}_{\text{xx}} = \mathbf{P}_{\text{xx}}^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\hat{\mathbf{x}}\} &= \text{Var}\left\{ \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{m} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} \right\} = \sigma^2 \mathbf{Q}_{\text{xx}} = \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sum (x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sum (x^2 + y^2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyt muunnosparametrien varianssit ovat

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\hat{x}_0\} &= \sigma_{x_0}^2 = \sigma^2 (\mathbf{Q}_{\text{xx}})_{11} = \frac{\sigma^2}{n}, \\ \text{Var}\{\hat{y}_0\} &= \sigma_{y_0}^2 = \sigma^2 (\mathbf{Q}_{\text{xx}})_{22} = \frac{\sigma^2}{n}, \\ \text{Var}\{\hat{m}\} &= \sigma_m^2 = \sigma^2 (\mathbf{Q}_{\text{xx}})_{33} = \sigma^2 / \sum (x^2 + y^2), \\ \text{Var}\{\hat{\theta}\} &= \sigma_{\theta}^2 = \sigma^2 (\mathbf{Q}_{\text{xx}})_{44} = \sigma^2 / \sum (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Lisäksi parametrit eivät tilastollisesti korreloi keskenään: niiden väliset kovarianssit häviävät.

Itse asiassa ratkaistavat havaintoyhtälöt ovat 14.21, joissa suureet  $\underline{v}_{2i-1}, \underline{v}_{2i}$  ovat tärkeät *jäännösvirheet*, jotka sisältävät arvokasta laadunvalvontaan liittyvää informaatiota.





TAULUKKO 14.2. Pistejoukko kahdessa eri koordinaatistossa. Pisteet ovat Porvoon kunnassa ja koordinaatistot ovat ETRS-GK27 ja KKJ kais-  
ta 3.

Piste	$x'$	$y'$	$x$	$y$
10	6697976,388	27427023,033	6698108,117	3427192,039
36	6700867,976	27428566,410	6700999,695	3428735,464
714	6701212,704	27424871,393	6701344,461	3425040,439
717	6696502,735	27428579,172	6696634,432	3428748,182
17_vara	6697821,437	27424568,639	6697953,182	3424737,628
35_vara	6709919,416	27434433,390	6710051,148	3434602,545
2061	6694497,478	27432539,402	6694629,164	3432708,409
2062	6704170,468	27432163,151	6704302,189	3432332,245
2063	6703595,075	27426736,815	6703726,833	3426905,879



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on redundanssi?
- 2) Miksi tasoituksessa painotetaan havaintoja?
- 3) Miksi tasoituksen jäännösvirheet eli residuaalit ovat mielenkiintoisia?
- 4) Mikä on painoyksikön keskivirhe?
- 5) Mikä on varianssimatriisin ja painokerroinmatriisin välinen ero?
- 6) Mikä on havaintoyhtälöiden linearisoinnin tuloksena saadun Jacobin matriisin toinen, tunnetumpi nimi?
- 7) Mikä on varianssien kasautumislaki stokastisille vektorisuureille?
- 8) Montako riippumatonta invarianttia pisteen sijainnin varianssimatriisilla on tasossa? Mitkä ne ovat (esimerkiksi)?
- 9) Mitkä ovat kaksiulotteisen eli tason Helmertin muunnoksen parametrit? Minkä näköinen on tason Helmertin muunnoksen tuntemattomien pienimmän neliösumman ratkaisun varianssimatriisi painopistekoordinaateissa?



### Harjoitus 14–1: Helmertin muunnosparametrien estimointi

Annettuna on pistejoukko kahdessa eri koordinaatistossa, taulukko 14.2 (Porvoo). Näillä tiedoilla tee seuraavasti:

- 1) Laske (ratkaise) neljä Helmertin muunnosparametriä<sup>18</sup>  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $m$





- ja  $\theta$ . Annamme octave-skriptin tähän tarkoitukseen, taulu 14.3.
- 2) Laske käänteisen muunnoksen parametrit  $x'_0$ ,  $y'_0$ ,  $m'$  ja  $\theta'$  — siis, vaihda sarakkeet  $x'$  ja  $y'$  ja sarakkeet  $x$  ja  $y$  keskenään.
  - 3) Verifioi, että mittakaavat  $K = m + 1$  ja  $K' = m' + 1$  ovat toistensa käänteislukuja:  $K' = 1/K$  ja siis  $m' \approx -m$ , ja että  $\theta$ -kiertoparametrit ovat toistensa vastaluvut,  $\theta' = -\theta$ .
  - 4) Tarkista jäännösvirheet. Kuinka tarkat olivat pisteiden annetut koordinaatit?
  - 5) Montako havaintoa on (vihje: havaintojen lukumäärä on sama kuin jäännösvirheiden lukumäärä)? Montako tuntematonta? Montako vapausastetta  $b$  (erotus havaintojen ja tuntemattomien lukumäärien välillä eli redundanssi)?
  - 6) Estimoi  $\hat{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{2n} v_i^2}$ , jossa  $b$  on vapausasteiden lukumäärä,  $v_i$  jäännösvirheet ja  $2n$  havaintojen lukumäärä. Estimoitu suure  $\sigma$  on painoyksikön keskivirhe, pistekoordinaatin tyypillinen tarkkuus<sup>19</sup>.
  - 7) Toista laskenta sen jälkeen, kun olet lisännyt yhden metrin yhteen  $x$ -arvoon. Huomaa vaikutus jäännösvirheisiin. Osaisitko sanoa, että se on nimenomaan tämä koordinaatti, joka sisältää karkean virheen? Laske myös  $\hat{\sigma}$  uudelleen. Mitä näet?

<sup>18</sup>Emme käytä tässä stokastisuutta ilmaisevia alleviivauksia, koska parametriarvot ovat vain vastaavien stokastisten muuttajien yksittäiset realisoinnit.

<sup>19</sup>Tarkemmin otettuna tämä pätee vain, jos annetuista koordinaattiaineistoista,  $(x', y')$  ja  $(x, y)$ , yksi oletetaan virheettömäksi. Muussa tapauksessa se on koordinaattieron tyypillinen tarkkuus.



TAULU 14.3. Laskentaskripti Helmertin muunnosta varten. Huomaa, että koodissa koordinaatit ei redukoida painopistekoordinaateiksi. Koordinaattikonventio on geodeettinen:  $x$  osoittaa pohjoiseen,  $y$  itään. Toisin kuin tekstissä on kuitenkin oletettu, että kiertokulma  $\theta$  on positiivinen vastapäivään.

```
format long

% Tietojen syöttö:
npts = 9;
pts = [10, 36, 714, 717, 17, 35, 2061, 2062, 2063];
x2 = [6697976.388, 6700867.976, 6701212.704, 6696502.735, 6697821.437,...
      6709919.416, 6694497.478, 6704170.468, 6703595.075];
y2 = [27427023.030, 27428566.410, 27424871.393, 27428579.172, 27424568.639,...
      27434433.390, 27432539.402, 27432163.151, 27426736.815];
x1 = [6698108.117, 6700999.695, 6701344.461, 6696634.432, 6697953.182,...
      6710051.148, 6694629.164, 6704302.189, 6703726.833];
y1 = [3427192.039, 3428735.464, 3425040.439, 3428748.182, 3424737.628,...
      3434602.545, 3432708.409, 3432332.245, 3426905.879];

% Havaintovektori:
yoffset = (27-3)*1E6;
ell = [x2'-x1';y2'-y1'-yoffset];

% Muodosta rakennematriisi:
A = zeros(2*npts,4);
for i = 1:npts
    A(i,:) = [1, 0, x1(i), -y1(i)];
    A(i+npts,:) = [0, 1, y1(i), x1(i)];
end

% Ratkaise tuntemattomat:
x = inv(A'*A)*A'*ell;
x0 = x(1);
y0 = x(2) + yoffset;
scale = 1.0 + x(3);
rot = 57.296*x(4);
printf('\nTuntemattomat:\n\n');
printf('x0: %20.10f\ny0: %20.10f\nmkaava:%20.10f\nrot: %20.10f\n\n',...
      x0, y0, scale, rot);

% Jäännösvirheet:
v = A*x - ell;
printf('Jäännösvirheet:\n\n');
for i = 1:npts
    printf('%5i %10.3f %10.3f\n', pts(i), v(i), v(i+npts));
end
```



# Tilastolliset menetelmät geodesiassa

## 15

[...] There has not been a single date in the history of the theory of gravitation when a modern significance test would not have rejected all laws and left us with no law. Nevertheless the law did lead to improvement for centuries, [...]

---

Harold Jeffreys, 1939 (Jeffreys, 1998, sivu 391)

TÄSSÄ LUVUSSA ESITETÄÄN kaksi toisiinsa liittyvää aihetta:

- Tilastollinen testaus geodeettisten mittausaineistojen validoinnin ja poikkeavien havaintoarvojen löytämisen yhteydessä.
- Geodeettisten verkkojen luotettavuus.

Käytetty käsitekehys on hypoteesitestausta nolla- ja vaihtoehtoisine hypoteeseineen. Näytämme myös, miten samaa kehystä voidaan käyttää esimerkiksi geodeettisessa muodonmuutosten analyysissä.

Olisi väärin olla painottamatta, että hypoteesitestausta ei ole sopiva tapa ratkaista kaikkia tieteellisiä kiistakysymyksiä. Olemassa on muita usein sopivampia menetelmiä, kuten Akaiken informaatiokriteeri (Burnham ja Anderson, 2013) ja bayesiläiset lähestymistavat. Yllä oleva Harold Jeffreysin<sup>1</sup> lainaus on osuva.

1



## 15.1 Pienimmän neliösumman menetelmä

Pienimmän neliösumman tasoitusmenetelmän selostaminen käy helpoiten jos oletetaan, että kaikki havaintosuureet ovat stokastisina suureina

---

<sup>1</sup>Sir Harold Jeffreys FRS (1891–1989) oli brittiläinen matemaatikko, tilastotieteilijä, geofyysikko ja tähtitieteilijä. Hän oli vaikutusvaltainen bayesiläisen tilastotieteen puolestapuhuja.

*normaalisti jakautuneita* (kuva 2.5) sekä yksitellen että yhdessä: ne muodostavat *moninormaalijakauman*. Jos normaalisti jakautuneet havaintosuureet ovat toisistaan tilastollisesti riippumattomia — esimerkiksi jos ne ovat riippumattomien mittausprosessien tuottamia — tämä on automaattisesti totta.

Olemme käsitelleet aiemmin pienimmän neliösumman menetelmää tapana minimoida satunnaiset virheet estimoiduissa suureissa, kuten pistekoordinaateissa. Luvussa 14 käsiteltiin *parametrinen tasoitusmenetelmä*, jossa havainnot kirjoitetaan etsittyjen tuntemattomien funktioina. Vaihtoehto, *ehtotasoitus*, sopii esimerkiksi monikulmiojonon laskentaan.

Tässä käsitellään parametrista menetelmää hieman perusteellisemmin.

Olkoon *havainnot*, vektorina  $\underline{\ell}$ , tuntemattomien  $\times$  lineaarisia funktioita:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}}^{\underline{\ell}} \\ [n] \end{array} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}^A \\ [n \times m] \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}^{\times} \\ [m] \end{array} + \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix}}^{\underline{n}} \\ [n] \end{array}.$$

Tässä  $n$  on havaintojen,  $m$  tuntemattomien määrä. Havainnot,  $\underline{\ell}$ -vektorin alkiot, ovat stokastisia suureita. Oletetaan, että ne ovat normaalisti jakautuneita havaitun suureen ”oikean” arvon ympäri. Silloin *havaintovirheiden* vektorin  $\underline{n}$  alkiot ovat myös normaalisti jakautuneet<sup>2</sup>.

Tässä aika yleisessä tapauksessa voidaan laskea *pienimmän neliösumman ratkaisu* seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{c} \hat{\underline{x}} \\ [m] \end{array} = \begin{array}{c} (A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} \\ [m \times m]^{-1} \end{array} \begin{array}{c} (A^T Q_{\ell\ell}^{-1}) \\ [m \times n] \end{array} \begin{array}{c} \underline{\ell} \\ [n] \end{array}, \quad (15.1)$$

jossa  $Q_{\ell\ell}$  on havaintojen *painokerroinmatriisi*, koko  $[n \times n]$ :

$$Q_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup>Usein niiden oletetaan myös olevan toisistaan tilastollisesti riippumattomia, mikä merkitsee, että niiden satunnaiset vaihtelut tapahtuvat toisistaan riippumatta. Kuitenkaan tasoituksen tuloksena saadun ratkaisuvektorin  $\hat{\underline{x}}$  tai jäännösvirheiden vektorin  $\underline{v}$  alkiot eivät tule olemaan toisistaan tilastollisesti riippumattomia.



Tämä matriisi liittyy havaintojen varianssimatriisiin seuraavalla tavalla:

$$\text{Var}\{\underline{\ell}\} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{Q}_{\ell\ell},$$

jossa

$$\sigma_i^2 = \text{Var}\{\underline{\ell}_i\} = E\left\{\left(\underline{\ell}_i - E\{\underline{\ell}_i\}\right)^2\right\} = \sigma^2 q_{ii},$$

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}\{\underline{\ell}_i, \underline{\ell}_j\} = E\left\{\left(\underline{\ell}_i - E\{\underline{\ell}_i\}\right)\left(\underline{\ell}_j - E\{\underline{\ell}_j\}\right)\right\} = \sigma^2 q_{ij}.$$

Tässä  $\sigma$  on painoyksikön keskivirhe.

Ratkaisun varianssimatriisi saadaan varianssien kasautumislain avulla. Olkoon

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\underline{\ell},$$

jossa

$$\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{A}^\top \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}.$$

Silloin yhtälön 15.1 perusteella

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{L} \mathbf{Q}_{\ell\ell} \mathbf{L}^\top = (\mathbf{A}^\top \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} \mathbf{A})^{-1},$$

sopivasti eliminoiden. Siis ratkaisuvektorin  $\hat{\mathbf{x}}$  varianssimatriisi,  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \sigma^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ , saadaan joka tapauksessa ratkaisun laskemisen, yhtälön 15.1, sivutuotteena!



## 15.2 Tasoituksen jäännösvirheet

Havaintojen ja tuntemattomien pienimmän neliösumman estimaattorit  $\hat{\underline{\ell}}$  ja  $\hat{\mathbf{x}}$  ovat kytkettyinä toisiinsa funktiomallin

$$\hat{\underline{\ell}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

kautta, ja alkuperäishavainnoista

$$\underline{\ell} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

lasketaan *jäännösvirheet*<sup>3</sup> eli residuaalit:

3

$$\underline{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\underline{\ell}} - \underline{\ell} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \underline{\ell} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - \mathbf{n}.$$



*Jäännösvirheet ovat keskeisiä geodeettisten verkkoratkaisujen laadunvalvonnassa.*

- Jäännösvirheiden suuruus kertoo jotain verkkoratkaisussa olevista ristiriidoista, mahdollisista karkeista virheistä tai jopa mallivirheistä.
- Tietyn havainnon jäännösvirhe voi kertoa, piilekö havainnossa mahdollisesti karkea virhe.
- Verkon on oltava *luotettava*: on oltava redundanssia, ylimääräistä havaintoaineistoa. Esimerkiksi kaikenlaiset sulkuvirheet tarjoavat tarkistusmahdollisuuksia.

Jos redundanssi on pieni tai olematon, jäännösvirheet saattavat hyvinkin olla pieniä tai jopa nolla, mutta se ei merkitse mitään!

Usein käytetty *havaintoyhtälöiden* muoto on

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{x}.$$

Pienimmän neliösumman tasoituksen jäännösvirheillä  $\underline{v}$  on *neljä kaunista ominaisuutta*, tässä annettuna ilman todistusta:

1) Kvadraattinen muoto

$$\underline{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{v}^T P_{\ell\ell} \underline{v} = \underline{v}^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} = \sigma^2 (\underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}),$$

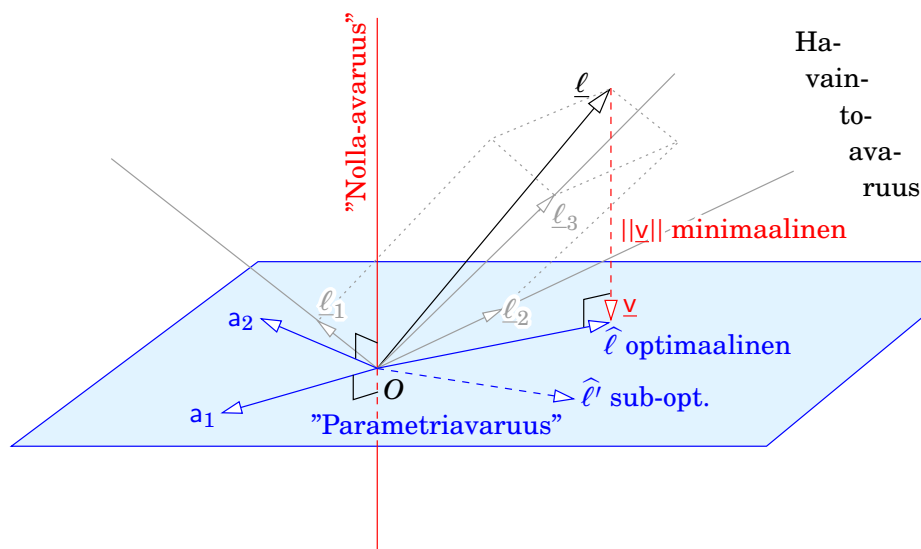
jäännösvirheiden neliöiden painotettu summa, *minimoituu* — tästä pienimmän neliösumman menetelmä sai nimensä. Itse asiassa tämän suureen neliöjuuri on jäännösvirheiden vektorin  $\underline{v}$  *normi* eli pituus,  $Q_{\ell\ell}$ -metriikassa, joka siis minimoidaan<sup>4</sup>:  $\underline{\mathcal{E}} = \|\underline{v}\|_Q^2$ .

2) Tuntemattomien  $\hat{x}$  *mielivaltaisen lineaariyhdistelmän*  $\hat{\lambda} = \Lambda \hat{x}$  varianssi  $\Sigma_{\lambda\lambda}$  (ja keskivirhe  $\sqrt{\Sigma_{\lambda\lambda}}$ ) minimoituu.

<sup>3</sup>Jäännösvirheiden vektori  $\underline{v}$  ei ole sama kuin havaintovirheiden eli ”-kohinan” vektori  $\underline{n}$ ! Jäännösvirhe on alkuperäishavainnon ja tasoitettun havainnon ero, toisin sanoen *korjaus*. Kuitenkaan tasoitettukaan havainto — tai tuntematon — ei ole ”totuus”. Totuutta ei voi tarkasti tuntea vaan ainoastaan approksimoida, ja vektorin  $\underline{n}$  alkioden arvoja, toisin kuin vektorin  $\underline{v}$  alkioden arvoja, ei voi laskea.

<sup>4</sup>Painomatriisi voitaisiin kokonaan eliminoida havaintoavaruuden koordinaattimuunnoksen avulla: tee Choleskyn hajotelma  $P_{\ell\ell} = \Gamma \Gamma^T$ , tuloksena  $\underline{\mathcal{E}} = \underline{v}^T P_{\ell\ell} \underline{v} = \underline{v}^T \Gamma \Gamma^T \underline{v} = \tilde{\underline{v}}^T \tilde{\underline{v}}$ , jossa  $\tilde{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^T \underline{v}$ . Tämä saadaan aikaan automaattisesti, jos määritellään havaintosuureet uudelleen:  $\tilde{\underline{\ell}} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^T \underline{\ell}$ . Tämä on suoraviivainen tapa redukoida yleinen pienimmän neliösumman ongelma 15.1 yksinkertaisemmaksi ei-painotetuksi ongelmaksi 14.3. Uudet havaintosuureet  $\tilde{\underline{\ell}}$  eivät korreloi keskenään ja niillä on kaikki samat keskivirheet.





KUVA 15.1. Pienimmän neliösumman tasointu ortogonaalisena projektiona. Visualisointia varten oletetaan, että havaintoavaruudella on kolme ulottuvuutta, parametriavaruudella kaksi, ja siis vapausasteiden lukumäärä eli nolla-avaruuden ulottuvuuksien määrä on yksi.

- 3) Tasoitettujen havaintosuureiden  $\hat{\ell}$  ja jäännösvirheiden  $\underline{v}$  ovat keskenään ortogonaalisia  $Q_{\ell\ell}$ -metriikassa: jos skalaaritulos määritellään  $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle_Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^T Q_{\ell\ell}^{-1} \mathbf{b}$ :

$$\langle \hat{\ell} \cdot \underline{v} \rangle_Q = \langle A\hat{x} \cdot \underline{v} \rangle_Q = (A\hat{x})^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} = \hat{x}^T A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} = 0,$$

koska

$$\mathbf{a}_i^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

toisin sanoen jäännösvirheiden vektori on ortogonaalinen rakenne-matriisin  $A$  kaikkia sarakkeita  $\mathbf{a}_i$  kohtaan.

Kuva 15.1 antaa geometrisen tulkinnan: tuntemattomat ovat  $A$ -matriisin sarakkeiden lineaariyhdistelmässä ne kertoimet, jotka minimoivat jäännösvirheiden vektorin normin.

- 4) Tuntemattomien vektorin  $\hat{x}$  ja jäännösvirheiden vektorin  $\underline{v}$  välinen kovarianssimatriisi häviää:  $\Sigma_{xv} = \sigma^2 Q_{xv} = 0$ . Ne ovat siis keskenään korreloimattomia.

Koska

$$\underline{\ell} = A\hat{x} - \underline{v},$$

seuraa varianssien kasautumislain ja yllä mainitun ominaisuuden 4 perusteella, että

$$Q_{\ell\ell} = A Q_{xx} A^T + Q_{vv} \implies Q_{vv} = Q_{\ell\ell} - A Q_{xx} A^T, \quad (15.2)$$



hyödyllinen yhtälö *jäännösvirheiden painokerroinmatriisin*  $Q_{vv}$  — ja varianssimatriisin  $\Sigma_{vv} = \sigma^2 Q_{vv}$  — laskemiseksi.



### 15.3 Testaus, testaushypoteesit

Havaintoaineistossa voi olla *karkeita virheitä*. Tosielämän tasoituslaskun yhteydessä on voitava sanoa, havaintojen tunnetun tilastollisen jakauman perusteella,

- Jotain karkeiden virheiden mahdollisesta esiintymisestä.
- Kuinka suuria karkeiden virheiden olisi oltava, jotta ne voidaan havaita ja poistaa.
- Tämän kokoisten karkeiden virheiden kulkeutuminen kiinnostaviin tuntemattomiin.

Karkeiden virheiden etsiminen kuuluu *tilastollisen testauksen* alaan.

Löytyneet karkeat virheet voidaan käsitellä kahdella tavalla:

- Poistetaan ne havaintoaineistosta ja kyseessä olevat mittaukset toistetaan. Jälkeenpäin tämä on vaikeaa ja kallista, mistä syystä ainakin osa tilastollisesta testauksesta suoritetaan jo kentällä.
- Jätetään ne yksinkertaisesti pois. Tämä edellyttää, että mittaus on suunniteltu alusta lähtien *redundantisti*: on tehty niin monta mittausta, että on varaa jättää (pieni) osa pois.

Tilastollista testausta varten on aina formuloitava *hypoteeseja*. Yksi hypoteeseista on aina

**Nollahypoteesi** Kaikki verkon mittaukset ovat korrekteja, niissä ei ole karkeita virheitä. Tähän hypoteesiin — englanniksi *null hypothesis* — käytetään symbolia  $H_0$ .

Tämän lisäksi on oltava ainakin yksi

**Vaihtoehtoinen hypoteesi** Verkossa esiintyy joku karkea virhe, karkeiden virheiden yhdistelmä tai tietty karkea virhe. Tähän hypoteesiin — englanniksi *alternative hypothesis* — käytetään symbolia  $H_a$ .

Yleensä halutaan tietää tai arvioida kaksi asiaa:

- Onko *koko* havaintoaineistossa jäljellä karkeita virheitä?
- Onko *tämä tietty havainto* virheellinen?

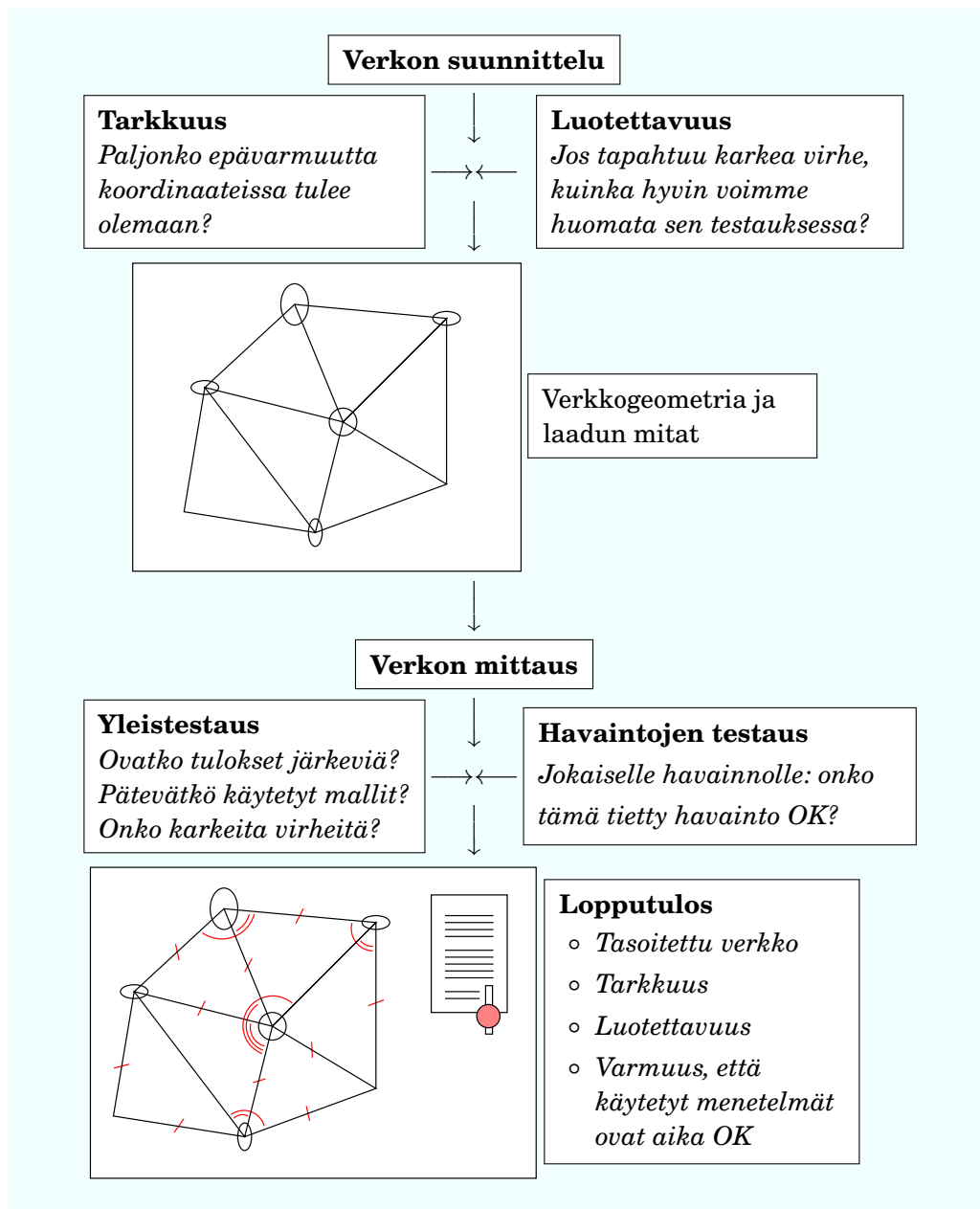
Taulu 15.1 näyttää testauksen roolin koko suunnittelu- ja mittausprosessissa.







TAULU 15.1. Suunnittelu- ja mittausprosessi.



Seuraavissa osioissa nämä kysymykset käsitellään erikseen.



## 15.4 Kokonaisvalidointi



### 15.4.1 $\chi^2$ -jakauma

Ensimmäisenä valitaan seuraava vaihtoehtoinen hypoteesi:

$H_a$ : jossain mittausaineistossa (emme vielä tiedä missä) esiintyy karkea virhe.



Tällainen hypoteesi voidaan testata  $\chi^2$ -testin avulla. Menetelmä ja siihen kuuluvat taulukot löytyvät tilastotieteen oppikirjoista ja Internetistä. Testattava suure on jäännösvirheiden vektorin pituus  $\Sigma_{\ell\ell}$ - tai  $Q_{\ell\ell}$ -metriikassa, sen *normi*, toiseen potenssiin:

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \|\underline{v}\|_{\Sigma}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} = \frac{1}{\sigma^2} (\underline{v}^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma^2} \|\underline{v}\|_Q^2. \quad (15.3)$$

Tämä suure — huomaa skaalaus painoyksikön varianssilla — on jakautunut  $\chi_{n-m}^2$ -jakauman mukaan.  $\chi_{n-m}^2$  on  $\chi^2$ -jakauma  $n - m$  vapausasteella, kuva 15.2. *Vapausasteiden* lukumäärä on havaintojen ja tuntemattomien lukumäärien erotus eli *redundanssi*  $b = n - m$ .

Käsitteellisesti jakauman  $\chi_b^2$  mukainen stokastinen suure, vapausasteiden määrällä  $b$ , saadaan neliöimällä ja summaamalla  $b$  riippumatonta, standardi-normaalisti jakautunutta — siis odotusarvon nolla ja keskivirheen yksi omaavaa — stokastista suuretta  $\underline{n}_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ . Koska yhden sellaisen neliön odotusarvo on yhtä suuri kuin standardi normaalin jakauman varianssi eli yksi, seuraa, että odotusarvo

$$E\{\chi_b^2\} = \sum_{i=1}^b E\{\underline{n}_i^2\} = \sum_{i=1}^b \text{Var}\{\underline{n}_i\} = \sum_{i=1}^b 1 = b.$$

Vieläkin toinen tarkastelukulma on, että suureella

$$\widehat{\sigma^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{E}}{n-m} = \sigma^2 \frac{\underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}}{n-m}$$

on odotusarvo  $E\{\widehat{\sigma^2}\} = \sigma^2$  ja näin ollen on suureen  $\sigma^2$  *harhaton estimaattori*. Sitä kutsutaan *a posteriori* painoyksikön varianssiksi. Katso myös alaosio 6.4.3. Suhteen  $\widehat{\sigma^2}/\sigma^2$  odotetaan olevan lähellä yhtä, jos nollahypoteesi pätee.



### 15.4.2 Yleistesti

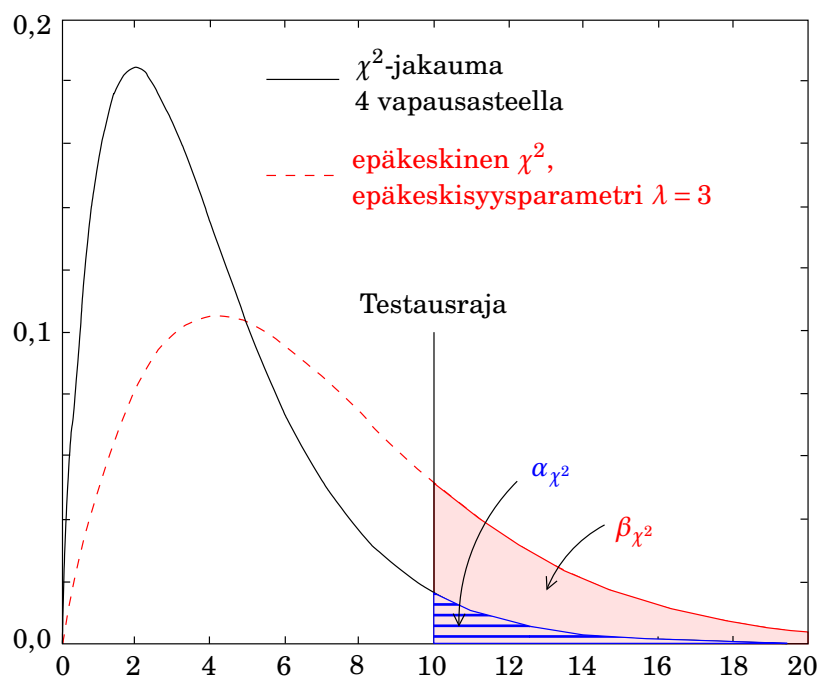
Testaamalla yllä oleva suure 15.3 voidaan päätellä, onko mittausaineistossa *joku* karkea virhe vai ei<sup>5</sup>, sanomatta vielä, missä havainnossa se voisi esiintyä.

MATLAB sisältää  $\chi^2$ -menetelmän valmiita rutiineja.

<sup>6</sup> Suure<sup>6</sup>  $\mathcal{E}/\sigma^2$  on jakautunut jakauman  $\chi_{n-m}^2$  mukaan ainoastaan siinä

<sup>5</sup>  $\chi^2$ -testi ei osaa erottaa toisistaan todellisia karkeita virheitä ja aineistoon sovelletun funktiomallin  $\ell = A \times$  sopimattomuutta. Jos käy niin, että  $\chi^2$ -testi hylkää nollahypoteesin, mutta kaikki havainnot näyttävät olevan kunnossa, voi olla, että vika on funktiomallissa: joku systemaattinen efekti lienee unohtunut.





KUVA 15.2.  $\chi^2$ -jakauma neljälle vapausasteelle.

tapauksessa, että aineisto ei sisällä karkeitä virheitä, eli *nollahypoteesi*  $H_0$  pätee. Silloin testisuureen odotusarvo on

$$E\left\{\frac{1}{\sigma^2}\underline{\mathcal{E}} \mid H_0\right\} = E\{\chi_{n-m}^2\} = n - m.$$

Oletetaan nyt kuitenkin, että havainnoissa on yksi tai useampi karkea virhe, yhteensä  $\nabla\ell$ : vaihtoehtoinen hypoteesi  $H_a$  pätee. Tämän virhevektorin vaikutus *jäännösvirheisiin* on  $\nabla v$ . Tässä tapauksessa suureen  $\underline{\mathcal{E}}/\sigma^2$  jakauma on *epäkeskinen*  $\chi^2$ , kuvassa 15.2 punainen käyrä.

### 15.4.3 Luotettavuus

Mielenkiintoinen kysymys on nyt, paljonko  $\nabla\ell$  pääsee vaikuttamaan vektoriin  $\nabla v$ . Toivottavasti paljon, koska silloin verkko on *luotettava*<sup>7</sup>. Yleensä ei koko  $\nabla\ell$  pääse vektorin  $\nabla v$  osaksi, tasoituksen myötä osa menee tuntemattomien vektoriin karkean virheen vaikutuksena<sup>8</sup>, jonka suuruus on  $\nabla x$ . Katso myös osio 15.9.

<sup>6</sup>Baardan nimityksen mukaan: "siirtosuure". Willem Baarda (1917–2005) oli modernin tasoituslaskun ja tilastollisen geodesian uranuurtaja.

<sup>7</sup>Tätä kutsutaan *sisäiseksi luotettavuudeksi*.

<sup>8</sup>Tätä kutsutaan *ulkoiseksi luotettavuudeksi*. Pieni vaikutus merkitsee hyvää ulkoista luotettavuutta.

Tässä tilanteessa jäännösvirheiden vektori on  $\underline{v} + \nabla v$ . Kirjoitettuna termeihin, testisuure on

$$\frac{1}{\sigma^2} \underline{\mathcal{E}} = \|\underline{v} + \nabla v\|_{\Sigma}^2 = \underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} + \underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \nabla v + \nabla v^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} + \nabla v^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \nabla v.$$

Testisuureen odotusarvo

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{1}{\sigma^2} \underline{\mathcal{E}} \mid H_a\right\} &= \\ &= E\left\{\underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}\right\} + E\left\{\underline{v}^T\right\} \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \nabla v + \nabla v^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} E\left\{\underline{v}\right\} + \nabla v^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \nabla v = \\ &= E\left\{\chi_{n-m}^2\right\} + 0 + 0 + \nabla v^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \nabla v = (n - m) + \lambda, \end{aligned}$$

jossa  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \nabla v^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \nabla v$  kutsutaan  $\chi^2$ -jakauman *epäkeskisyyssparametriksi*. Se kuvaa, kuinka kauas oletetun karkean virheen vaikutus  $\nabla v$  jäännösvirheisiin ulottuu matriisin  $\Sigma_{\ell\ell}$  kuvaaman havaintojen epävarmuusalueen ulkopuolelle.

Kvadraattinen suure on aina positiivinen. Siksi  $\chi^2$ -testi on *yksipuolinen*, toisin kuin myöhemmin esitettävä normaalijakauman testi. Siis koska  $\underline{\mathcal{E}}$  on kvadraattinen suure, tulee jokainen karkea virhe — ja jopa systemaattiset virheet eli virheet käytetyssä funktiomallissa — todennäköisesti vaikuttamaan kasvattavasti. *Joka ikisellä virheellä on taipumus tehdä  $\chi^2$  suuremmaksi* ja virheen havaitsemisen todennäköisemmäksi. Tämä tekee  $\chi^2$ -testistä niin hyödyllisen yleistestin.

Itse asiassa  $\chi^2$ -testi validoi paljon muutakin kuin itse havainnot. Se varmistaa, että

- Havaintoaineistossa ei esiinny (suuria) karkeita virheitä.
- Käytetty funktiomalli (havaintoyhtälöt) pitää riittävän tarkasti paikkansa.
- Havaintojen oletetut keskivirheet (ja mahdollinen korreloimattomuuden oletus) ovat realistisia.



## 15.5 Karkeiden virheiden paikantaminen

Jos olemme päättelleet, että aineistossa lienee yksi tai useampi karkea virhe, haluamme seuraavaksi selvittää, mitkä havainnot ovat epäilyttäviä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että karkea virhe on vain yhdessä havainnossa, vaikka virheitä voi hyvinkin olla useissa havainnoissa yhtäaikaa.

Yksinkertaisin tapa etsiä karkeita virheitä eli tarkemmin löytää ”poikkeavia arvoja” (engl. *outlier detection*) on *katsella jäännösvirheet*.





TAULUKKO 15.2. Merkitsevyystasojen  $\alpha_2$  hylkäysrajat  $h$  standardi normaali-jakaumaan, siis keskivirhe  $\sigma = 1$  ja odotusarvo  $\mu = 0$ , perustuvassa kaksipuolisessa testissä. Katso kuva 15.4.

$1 - \alpha_2, \%$	$\alpha_2, \%$	$h$
5	95	1,96
2,5	97,5	2,24
1	99	2,57
0,1	99,9	3,29

Olkoon jäännösvirheiden vektori

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_i & \cdots & \underline{v}_{n-1} & \underline{v}_n \end{bmatrix}^T.$$

Alkio  $\underline{v}_i$  on havainnon numero  $i$ , siis havainnon  $\underline{\ell}_i$ , jäännösvirhe. Alkion varianssi on

$$\sigma_{v_i}^2 = \sigma^2 [Q_{vv}]_{ii},$$

ja sen keskivirhe  $\sigma_{v_i}$  on tämän neliöjuuri.

Olettakaamme, että jäännösvirheet  $\underline{v}_i$  ovat *normaalisti jakautuneita*. Silloin voimme *testata* jokaisen havainnon  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} |\underline{v}_i| > 1,96 \sigma_{v_i} &\implies \underline{\ell}_i \text{ lienee virheellinen} \\ |\underline{v}_i| \leq 1,96 \sigma_{v_i} &\implies \underline{\ell}_i \text{ on luultavasti oikein.} \end{aligned}$$

Tämä normaalijakaumaan perustuva kaksipuolinen testi käyttää *signifikanssi*- eli merkitsevyystasoa 95%: *Vaikka aineistossa ei olisi karkeaa virhettä*, on kuitenkin  $100\% - 95\% = 5\%$  todennäköisyys, että testin perusteella havainto  $\underline{\ell}_i$  tulee hylätyksi.

Taulukossa 15.2 on lueteltu eri merkitsevyystasojen hylkäysrajat kaksipuolisessa standardi normaalijakaumaan perustuvassa testissä.

Tässä kuvattu menetelmä toimii oikein vain siinä tapauksessa, että havainnot eivät korreloi keskenään eli matriisi  $Q_{\ell\ell}$  on lävistäjämatrisi. Ellei näin ole, löytyy kirjallisuudesta sopivasti muunneltu<sup>9</sup> testausmenetelmä nimeltä *data snooping* (Baarda, 1968).

<sup>9</sup>Temppu on yksinkertaisesti se, että jäännösvirheiden  $\underline{v}$  sijasta otetaan *painotettuja* jäännösvirheitä  $\underline{w} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}$  ja niiden variansseja.

Logiikka on se, että jos etsitään karkeaa virhettä havainnossa numero  $i$ , etsitään jäännösvirheiden lineaariyhdistelmää, jossa virhe näkyy selvimmin. Lasketaan vektorin  $\underline{v}$  ortogonaalinen projektiio ( $Q_{\ell\ell}$ -metriikassa) oletetun karkean virheen suuntaan  $\mathbf{e}_i \stackrel{\text{def}}{=}$



TAULUKKO 15.3. Lineaarisen regression esimerkki.

	$i \rightarrow$	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^5$
$x_i$		1,51	2,44	3,34	4,41	5,05	16,75
$y_i$		2,32	3,12	3,57	3,93	4,15	17,09
$\hat{a} + \hat{b}x_i$		2,51	2,97	3,41	3,94	4,26	
$v_i$		+0,19	-0,15	-0,16	+0,01	+0,11	0,00
$v_i^2$		0,0361	0,0225	0,0256	0,0001	0,0121	0,0964



## 15.6 Laskuesimerkki: lineaarinen regressio

Palataan lineaarisen regression esimerkkiin, jota käytettiin jo alaosiossa **14.5.3**, katso taulukko **15.3**.

Muistakaamme, että löytynyt pienimmän neliösumman ratkaisu oli

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 1,76 \pm 1,25\sigma, \\ \hat{b} &= 0,495 \pm 0,349\sigma.\end{aligned}$$

Laskemme sovitetun viivan funktioarvot  $\hat{a} + \hat{b}x_i$  sekä sen jäännösvirheet  $v_i = (\hat{a} + \hat{b}x_i) - y_i$ . Ehto  $\sum_{i=1}^n v_i = 0$  on hyvä järkevyyssko.

Jos havaintojen  $y_i$  varianssimatriisi on  $\Sigma_{\ell\ell} = \sigma^2 I$ , on testattava ”siirtosuure”

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v},$$

jossa  $\underline{v}$  on jäännösvirheiden  $v_i$  muodostama vektori. Saadaan

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \implies \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Jos on annettu *a priori*, että  $\sigma = \pm 0,15$ , seuraa

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \frac{0,0964}{0,0225} = 4,28.$$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  (jossa ykkönen on paikassa  $i$ ):

$$\underline{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{e}_i, \underline{v} \rangle_Q = \mathbf{e}_i^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}.$$

Yhdessä komponentit  $\underline{w}_i$  muodostavat vektorin  $\underline{w}$  ja ne soveltuvat parhaiten karkeiden virheiden (”outliers”) erottamiseksi.

Testissä tarvitaan myös jokaisen yksittäisen alkion  $\underline{w}_i$  keskivirhe  $\sigma_{w_i}$ , joka lasketaan matriisiin (yhtälö **15.2**)

$$Q_{ww} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\ell\ell}^{-1} Q_{vv} Q_{\ell\ell}^{-1} = Q_{\ell\ell}^{-1} (Q_{\ell\ell} - A Q_{xx} A^T) Q_{\ell\ell}^{-1}$$

lävistäjäalkioista, aivan kuten  $\underline{v}$ -pohjaisen testin tapauksessa.





TAULUKKO 15.4. Kumulatiivisen  $\chi^2_3$ -jakauman arvot.  $\alpha_{\chi^2}$  on  $\chi^2$ -testin merkitsevyystaso.

$x$	$\int_0^x \chi^2_3(x') dx' / (\alpha_{\chi^2})$	$\int_x^\infty \chi^2_3(x') dx' / (1 - \alpha_{\chi^2})$
4,642	0,80	0,20
6,251	0,90	0,10
7,815	0,95	0,05
9,837	0,98	0,02
11,345	0,99	0,01
12,838	0,995	0,005
14,796	0,998	0,002
16,266	0,999	0,001

Suure  $\mathcal{E}/\sigma^2$  on jakautunut  $\chi^2_3$ :n mukaan: on  $n = 5$  havaintoa ja  $m = 2$  tuntematonta ( $a$  ja  $b$ ), siis *vapausasteiden lukumäärä* (redundanssi) on  $n - m = 3$ . Taulukon 15.4 mukaan todennäköisyys, että nollahypoteesin mukaan  $\chi^2_3 > 4,642$  on 20 %, eli arvo 4,28 on ainakin merkitsevyystasolla 80% täysin hyväksyttävissä.

Testataan seuraavaksi yksittäiset jäännösvirheet. Lasketaan ensin jäännösvirheiden vektorin painokerroinmatriisi yhtälön 15.2 mukaan:

$$Q_{vv} = Q_{\ell\ell} - A Q_{xx} A^T,$$

jossa  $Q_{\ell\ell} = I$ ,

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 1,5640 & -0,4072 \\ -0,4072 & 0,1215 \end{bmatrix}$$

laskettiin jo alaosiossa 14.5.3, ja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,51 \\ 1 & 2,44 \\ 1 & 3,34 \\ 1 & 4,41 \\ 1 & 5,05 \end{bmatrix}.$$

Huolellisen laskennan (MATLAB!) jälkeen saamme matriisin  $Q_{vv}$ , joka löytyy taulukosta 15.5. Tässä matriisissa meitä kiinnostavat lähinnä *lävistäjäalkiot*:

$$\sigma_{v_1} = \sigma \sqrt{[Q_{vv}]_{11}} = 0,15 \cdot \sqrt{0,3887} = 0,15 \cdot 0,623 = 0,0935,$$

$$\sigma_{v_2} = \sigma \sqrt{[Q_{vv}]_{22}} = 0,1255,$$





TAULUKKO 15.5. Lineaarisen regression esimerkki. Lasketaan jäännösvirheet, niiden varianssi-kovarianssimatriisi ja normalisoidut jäännösvirheet.

	$i \rightarrow$	1	2	3	4	5
$v_i$		+0,19	-0,15	-0,16	+0,01	+0,11
		+0,3887	-0,4032	-0,2019	+0,0375	+0,1807
		-0,4032	+0,6998	-0,2006	-0,0821	-0,0112
$Q_{vv}$		-0,2019	-0,2006	+0,8007	-0,1978	-0,1969
		+0,0375	-0,0821	-0,1978	+0,6646	-0,4178
		+0,1807	-0,0112	-0,1969	-0,4178	+0,4502
$\sigma_{v_i}$		0,0935	0,1255	0,1342	0,1223	0,1006
$ v_i /\sigma_{v_i}$		2,03	1,20	1,19	0,08	1,09

<sup>10</sup> ja niin edelleen. (Muista, että  $\sigma = 0,15$ .) Katso taulukko 15.5<sup>10</sup>.

Kuten näkyy, kaikki havainnot ovat hyväksyttäviä, paitsi  $y_1$ , joka hylätään juuri ja juuri 95 %:n merkitsevyystasolla (hylkäysraja 1,96). Kuitenkin jo 97,5 %:n merkitsevyystasolla sekin hyväksytään.



## 15.7 Karkean virheen lisäys

Seuraavaksi lisätään havaintoarvolle  $y_3$  simuloitu karkea virhe +1,0.

Pienimmän neliösumman ratkaisuksi saadaan nyt taulukon 15.6 tulos:

$$\hat{b} = \frac{5 \cdot 64,66 - 16,75 \cdot 18,09}{5 \cdot 64,34 - 16,75^2} = \frac{20,2925}{41,1375} = 0,493,$$

$$\hat{a} = \frac{1}{5} (18,09 - 16,75 \cdot \hat{b}) = 1,97.$$

Taulukossa 15.6  $\sigma_{v_i}$ -arvot eivät muuttuneet.

Lasketaan ”siirtosuure”

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{1,1973}{0,0225} = 53,21!$$

Tässä on jotain pahasti pielessä...

<sup>10</sup>Huomaa, miten jäännösvirheiden keskivirheet *alittavat systemaattisesti* havaintojen keskivirhettä  $\sigma = \pm 0,15$ , etenkin reunimmaisilla pisteillä! Suurella pistemäärällä tämä ilmiö häviää ja voidaan kirjoittaa  $Q_{vv} \approx Q_{\ell\ell}$ .

Usein tehdään niin joka tapauksessa. Silloin karkeat virheet reunapisteillä eivät tule huomatuksi riittävän herkästi.





TAULUKKO 15.6. Lineaarisen regression esimerkki. Simuloitu karkea virhe pisteessä 3: lähtödata, lineaarinen regressio, jäännösvirheet, testaus.

$i \rightarrow$	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^5$
$x_i$	1,51	2,44	3,34	4,41	5,05	16,75
$y_i$	2,32	3,12	4,57	3,93	4,15	18,09
$x_i^2$	2,28	5,95	11,16	19,45	25,50	64,34
$x_i y_i$	3,50	7,61	15,26	17,33	20,96	64,66
$\hat{a} + b x_i$	2,71	3,17	3,62	4,14	4,46	
$v_i$	+0,39	+0,05	-0,95	+0,21	+0,31	0,01
$v_i^2$	0,1521	0,0025	0,9025	0,0441	0,0961	1,1973
$\sigma_{v_i}$	0,0935	0,1255	0,1342	0,1223	0,1006	
$ v_i /\sigma_{v_i}$	4,17	0,40	7,08	1,72	3,08	
Hylkäys?	*		**		*	

Katso nyt taulukko 15.6. Ylivoimaisesti suurin testausarvo, 7,08, esiintyy virheellisellä havainnolla 3. Mutta myös havainnot 1 ja 5 tulevat hylätyiksi jopa 99%:n merkitsevyystasolla! Siksi on syytä edetä varovaisesti. *Testin perusteella saadaan hylätä vain yksi havaintoarvo kerrallaan*, minkä jälkeen koko pienimmän neliösumman laskenta on suoritettava uudelleen.



## 15.8 Testin merkitsevyystaso



### 15.8.1 Hylkäysrajan valinta

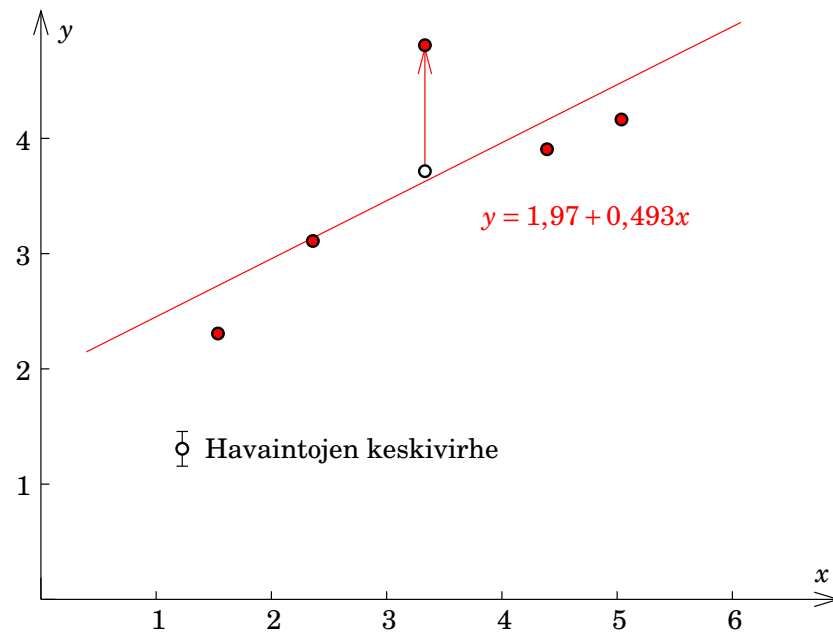
Kun testataan tiettyä vaihtoehtoista hypoteesia nollahypoteesia vastaan käyttämällä oletettavasti normaalisti jakautunutta testisuureta, on valittava sopiva *hylkäysraja*. Jos testattava suure ylittää tämän rajan, hylätään  $H_0$  ja hyväksytään  $H_a$ . Hylkäysrajan valitseminen on tärkeä strateginen kysymys.

Katso kuva 15.4. Kuvassa hylkäysrajaksi on valittu  $h = 2,5\sigma$ , eli jos testisuure ylittää 2,5 kertaa oman keskivirheensä  $\sigma$ , hylätään nollahypoteesi  $H_0$  ja hyväksytään vaihtoehtoinen hypoteesi  $H_a$ .

Nyt strategia voi johtaa kahdenlaiseen virheeseen:

- o Nollahypoteesi hylätään, vaikka se onkin oikea. Tätä kutsutaan *ensimmäisen lajin virheeksi*<sup>11</sup>. Tämän virheen tapahtumisen todennäköisyys on  $\alpha$ .

11



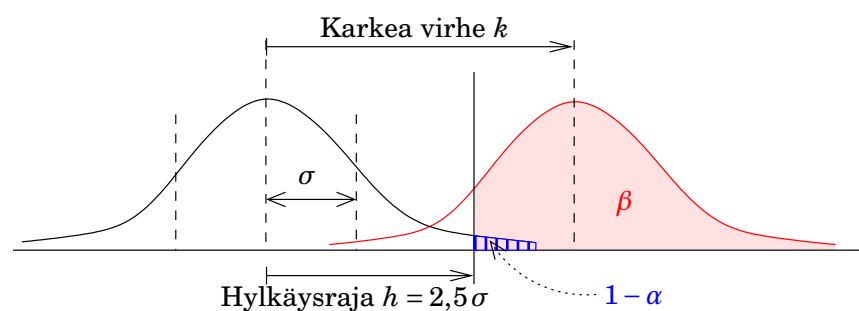
KUVA 15.3. Lineaarisen regression esimerkki, havainnossa 3 on simuloitu karkea virhe.



näköisyys on pystyviivatun (sinisen) alueen pinta-ala. Normaalijakauman tapauksessa se on  $1 - \alpha = 1,24\%$  (kaksipuolinen), jos hylkäysraja on  $h = 2,5\sigma$ , katso taulukko 15.7. Suuretta  $\alpha$  kutsutaan testin *merkitsevyystasoksi* eli *signifikanssiksi*.

- o Nollahypoteesi hyväksytään, vaikka kyse onkin karkeasta virheestä:  $H_0$  on väärä, vaihtoehtoinen hypoteesi  $H_a$  on totta. Tämä on *toisen lajin virhe*<sup>12</sup>. Sen tapahtumisen todennäköisyys riippuu karkean virheen koosta  $k$ , tarkemmin normalisoidun erotuksen

12



KUVA 15.4. Tilastollinen testaus normaalijakauman perusteella.

<sup>11</sup>Myös *hylkäämisvirhe*, ruotsiksi *fel av första slaget el. förkastelsefel*, engl. *error of the first kind or rejection error*.



TAULUKKO 15.7. Testin hylkäysraja  $h$  ja hylkäyksen todennäköisyys normaali-jakauman tapauksessa.  $\alpha_1$  on yksipuolisen,  $\alpha_2$  kaksipuolisen testin merkitsevyystaso.

$h/\sigma$	$1 - \alpha_1, \%$	$1 - \alpha_2, \%$
2,0	2,28	4,56
2,5	0,62	1,24
3,0	0,13	0,27
3,5	0,02	0,05

$(k - h)/\sigma$  koosta.

Sen ei-tapahtumisen eli hylkäyksen todennäköisyyttä kutsutaan testin erotuskyvyksi  $\beta$ <sup>13</sup>. Kuvassa 15.4 se on vaaleanpunaisen alueen pinta-ala.

*Testausstrategian* eli suureen  $h$  valitseminen on siis aina *kompromissi*. Se riippuu siitä, mitkä ovat ensimmäisen ja toisen lajin virheiden suhteelliset kustannukset — mukaan lukien ei-rahalliset ”kustannukset”, kuten maineen menetys.  $h = 3\sigma$  on usein käytetty ”kolmen sigman sääntö”.



## 15.8.2 Yleistestin ja havaintokohtaisen testin harmonisointi

Mittausaineiston testauksessa on olemassa *kytkentä* kokonaisvalidoinnin ja havaintokohtaisten testien välillä! Kytkeä menee *merkitsevyysta-*



TAULUKKO 15.8. Karkean virheen oletettu koko  $k$  ja testin vastaava erotuskyky  $\beta$  normaalijakauman ja hylkäysrajan  $h = 2,5\sigma$  tapauksessa.

$k/\sigma$	$(k - h)/\sigma$	$\beta, \%$
3,0	0,5	69,1
3,5	1,0	84,1
4,0	1,5	93,3
4,5	2,0	97,7
5,0	2,5	99,4
5,5	3,0	99,9
6,0	3,5	99,98

<sup>12</sup>Myös hyväksymisvirhe, ruots. *acceptansfel* el. *fel av andra slaget*, engl. *error of the second kind*, *acceptance error*.

<sup>13</sup>Eli toisen lajin virheen todennäköisyys, tosin jos havainnossa on karkea virhe, on  $1 - \beta$  eli  $100\% - \beta$ .

sojen kautta, katso kuva 15.5: jos  $\chi^2$ -testin merkitsevyystaso on  $\alpha_{\chi^2}$  ja yhden havainnon testin taso on  $\alpha$ , on yhteys

$$\alpha_{\chi^2} = \alpha^{n-m},$$

- <sup>14</sup> jossa  $n - m$  on taas vapausasteiden lukumäärä<sup>14</sup>. Toisin sanoen todennäköisyyden, että jokainen havainto läpäisee havaintokohtaisen testin, on oltava sama kuin todennäköisyys, että kokonaisvalidointi menee läpi. Vain sillä ehdolla voi odottaa, että jos yhteinen  $\chi^2$ -testi löytää jotakin ”mättää”, myös yksittäisten havaintojen testit tulevat osoittamaan ”syyllistä” havaintoa.

**Esimerkki** Jos  $\alpha_{\chi^2} = 95\%$  kymmenellä vapausasteella, seuraa, että

$$\alpha = \sqrt[n-m]{\alpha_{\chi^2}} = \sqrt[10]{0,95} \approx 0,99489 = 99,489\%,$$

\_\_\_\_\_ noin kymmenen kertaa lähempänä 100%.

”Syyllisen” havainnon poistamisen tai korjaamisen jälkeen testausmenet-

- <sup>15</sup> tely toistetaan kunnes  $\chi^2$ -testi menee läpi<sup>15</sup>.



## 15.9 Luotettavuus



### 15.9.1 Periaate

Mittausverkon *luotettavuus* tarkoittaa, että karkeat virheet löytyvät mittausverkosta helposti ja jopa vaikka ne olisivat suhteellisen pieniä.

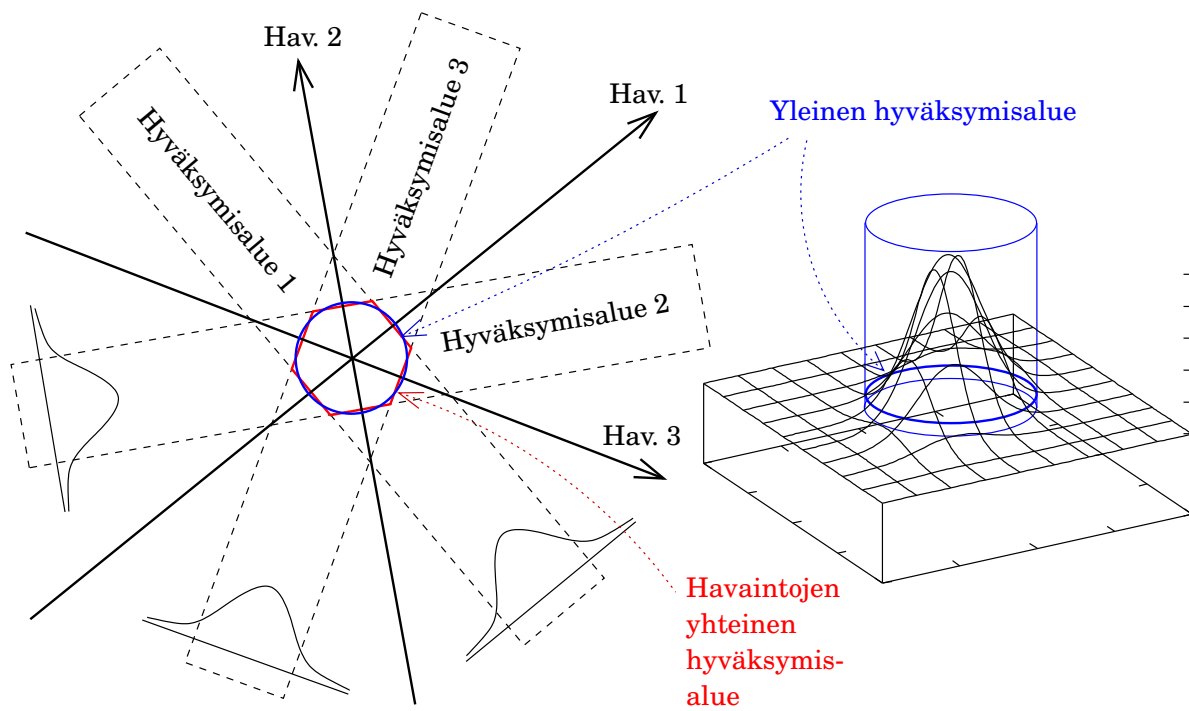
Luotettavuus vastaa sitä, että verkko on ”vahva”. Kyse ei ole kuitenkaan samanlaisesta vahvuudesta kuin jos verkko on tarkka.

Katso kuva 15.6. Pisteistä  $A$ ,  $B$  ja  $C$  mitataan suunnat neljanteen pisteeseen. Piirretty on virhe-ellipsit kolmessa eri tapauksessa:

- I** kun piste on kaukana pisteistä  $A$  ja  $B$
- II** kun piste on paikassa, jossa suunnat pisteisiin  $A$  ja  $B$  ovat kohtisuoria toisiinsa nähden, ja
- III** kun piste on pisteiden  $A$  ja  $B$  välillä.

<sup>14</sup>Menetelmä on samanlainen kuin tunnettu *Bonferronin korjaus*, [Wikipedia](#), [Bonferroni correction](#).

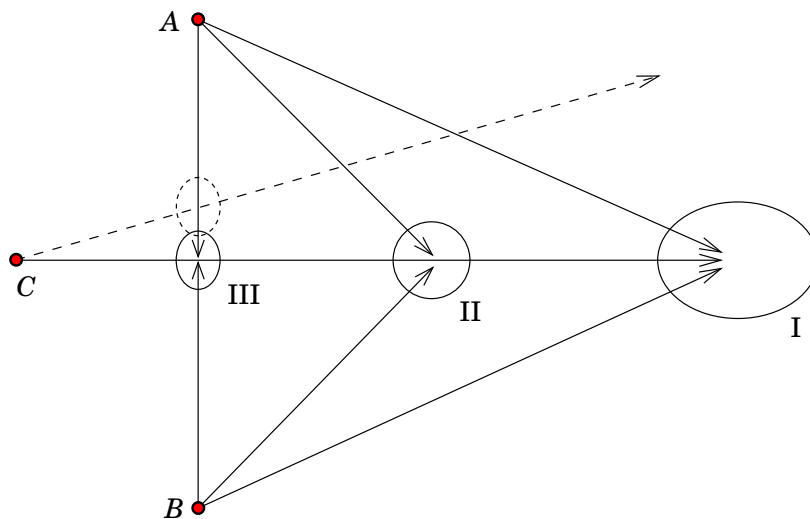
<sup>15</sup>Ellei testi mene vielä kukaan läpi, on syytä tarkistaa muut käytetyt mallit, kuten havaintojen tarkkuusoleutukset ja niin edelleen.



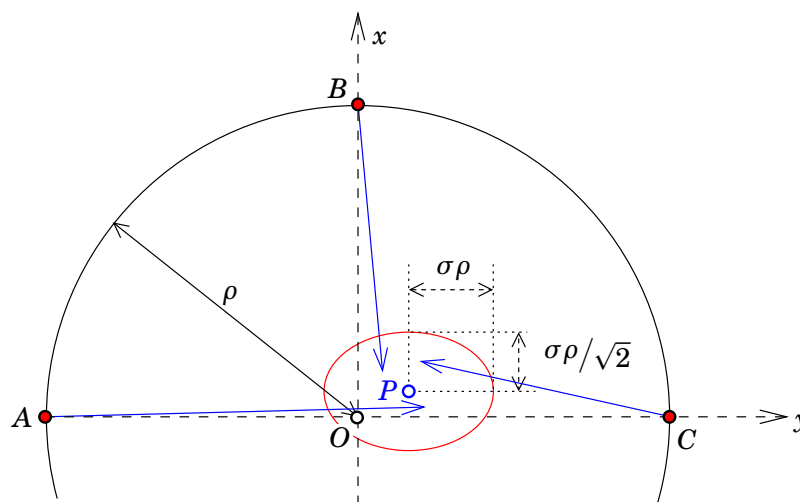
KUVA 15.5. Kokonaisvalidoinnin ja havaintokohtaisten testien merkitsevyystasojen harmonisointi.

Kuten nähdään, tarkin tulos saadaan tapauksessa III. Virhe-ellipsi on pienin.

Kuitenkin *luotettavuus on heikko* (olematon) tapauksessa III. Jos pisteestä *C* tehdyssä mittauksessa on karkea virhe (katkoviiva), saadaan tapauksessa III vielä näennäisesti hyvä — tarkka — mutta *virheellinen* tulos. Katso katkoviivalla piirretty virhe-ellipsi.



KUVA 15.6. Luotettavuuden esimerkki.



KUVA 15.7. Luotettavuuden toinen esimerkki.

Tapauksissa I ja II karkea virhe  $C$ -havainnossa johtaa ristiriitaiseen tulokseen. Ei ole mahdollista löytää tähtäyspisteen sijaintia, joka olisi yhteensopiva kaikkien kolmen suuntahavainnon kanssa. Tämähän on *hyvä asia*, koska se mahdollistaa karkean virheen löytämisen. Verkkoa kutsutaan silloin *luotettavaksi*.

Verkkojen suunnittelutyössä on kiinnitettävä huomiota luotettavuuteen, tietysti tarkkuuden lisäksi. Verkko on suunniteltava sopivasti redundantiksi: verkkoon on sisällytettävä riittävästi mittauksia, jotka kontrolloivat toisiaan. Terve järki auttaa paljon. Verkon luotettavuuden arvioimiseksi on olemassa myös matemaattisia ja ohjelmallisia työkaluja. Aina on kysyttävä itseltään, mitä jos tämä tai tuo havainto olisi virheellinen, huomaisinko sen.



### 15.9.2 Toinen esimerkki

Tässä esimerkissä, kuva 15.7, havaintopaikat  $A$ ,  $B$  ja  $C$  sijaitsevat ympyrän reunalla, ja piste  $P$ , jonka suunta havaitaan, sijaitsee origon eli ympyrän keskipisteen  $O$  lähistöllä.

Havaintoyhtälöt saadaan geometrisen tarkastelun avulla:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{AP} - \theta_{AO} \\ \theta_{BP} - \theta_{BO} \\ \theta_{CP} - \theta_{CO} \end{bmatrix}}_{\underline{\ell}} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \frac{1}{\rho} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_P \\ \hat{y}_P \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}}.$$

Symbolisesti

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{\mathbf{x}},$$



jossa

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ \underline{\ell}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_{AP} - \theta_{AO} \\ \underline{\theta}_{BP} - \theta_{BO} \\ \underline{\theta}_{CP} - \theta_{CO} \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pienimmän neliösumman ratkaisu on

$$\hat{\underline{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell} = \rho \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\ell}_3 - \underline{\ell}_1 \\ -\underline{\ell}_2 \end{bmatrix} = \rho \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\underline{\ell}_3 - \underline{\ell}_1) \\ -\underline{\ell}_2 \end{bmatrix}.$$

Tästä saadaan jäännösvirheet

$$\underline{v} = A\hat{\underline{x}} - \underline{\ell} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\underline{\ell}_3 - \underline{\ell}_1) \\ \underline{\ell}_2 \\ \frac{1}{2}(\underline{\ell}_3 - \underline{\ell}_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ \underline{\ell}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\underline{\ell}_1 - \frac{1}{2}\underline{\ell}_3 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\underline{\ell}_1 - \frac{1}{2}\underline{\ell}_3 \end{bmatrix}. \quad (15.4)$$

**Huomautus 1** Kuten näkyy, on havainto  $\underline{\ell}_2$  hävinnyt jäännösvirheistä!

Jos  $\underline{\ell}_2 = \underline{\theta}_{BP} - \theta_{BO}$  sisältää karkean virheen, emme tule koskaan huomaamaan sitä ylisuurena jäännösvirheenä.

**Huomautus 2** Jäännösvirheistä ei näe, tuleeko karkea virhe havainnosta  $\underline{\ell}_1$  vai havainnosta  $\underline{\ell}_3$ . Jäännösvirheissä niiden kertoimet ovat \_\_\_\_\_ identtisiä.

Voimme myös kirjoittaa yhtälön 15.4 muotoon

$$\underline{v} = A\hat{\underline{x}} - \underline{\ell} = A (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell} - \underline{\ell} = -R \underline{\ell},$$

jossa *redundanssimatriisi* on

$$R \stackrel{\text{def}}{=} I - A (A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Redundanssimatriisin jokainen lävistäjäalkio kelpaa karkeaksi mitaksi siitä, kuinka hyvin geometria kontrolloi karkean virheen esiintymistä vastaavassa havainnossa.  $R_{11} = R_{33} = \frac{1}{2}$  kertoo, että havainnot  $\underline{\ell}_1$  ja  $\underline{\ell}_3$  ovat jonkin verran kontrolloituja, mutta  $R_{22} = 0$  kertoo, että  $\underline{\ell}_2$  ei ole lainkaan kontrolloitu. Järkevä vaatimus on, että kaikki  $R_{ii} \gtrsim 0,5$ .

Lasketaan seuraavaksi siirtosuure

$$\frac{1}{\sigma^2} \underline{\mathcal{E}} = \underline{v}^T \Sigma_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}.$$



Tässä  $\Sigma_{\ell\ell}$  on havaintojen varianssimatriisi. Oletetaan, että havainnot eivät korreloi keskenään ja että niiden keskivirhe on  $\sigma$ . Silloin

$$\Sigma_{\ell\ell} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Saadaan ( $H_0$  on nollahypoteesi):

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} \Big| H_0 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 v_i^2 = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{\ell}_1 + \underline{\ell}_3)^2.$$

Koska sekä havainnon  $\underline{\ell}_1$  että havainnon  $\underline{\ell}_3$  keskivirheet ovat  $\sigma$  ja ne eivät korreloi, on summan  $\underline{\ell}_1 + \underline{\ell}_3$  keskivirhe  $\sigma\sqrt{2}$  ja sen varianssi  $2\sigma^2$ . Vapausasteiden lukumäärä on 1 ja suure  $\mathcal{E}/\sigma^2$  on jakautunut  $\chi_1^2$  mukaan, kuten teorian mukaan pitääkin olla.

*Vertaamalla havaintoaineiston laskettua arvoa  $\mathcal{E}/\sigma^2$   $\chi_1^2$ -taulukon arvojen kanssa, voidaan testata, onko havainnoissa mahdollisesti karkea virhe. Jos kaikki havainnot ovat vapaita karkeista virheistä, on lausekkeen  $\mathcal{E}/\sigma^2$  odotusarvo 1.*

Kuitenkaan, kuten yllä jo huomautettiin, emme voi havaita havainnossa  $\underline{\ell}_2$  olevia karkeita virheitä lainkaan. Sanotaan<sup>16</sup>, että mittausgeometria on *luotettava* havaintojen  $\underline{\ell}_1$  ja  $\underline{\ell}_3$  suhteen, mutta *epäluotettava* havainnon  $\underline{\ell}_2$  suhteen. Jos havainnossa  $\underline{\ell}_2$  olisi karkea virhe suuruudeltaan  $\nabla$ , vivahtaisi se *kokonaisuudessaan* koordinaattiin  $\hat{y}_P$  virheeksi  $-\rho \cdot \nabla$ ! Sanotaan myös<sup>17</sup>, että mittausgeometria on *epäluotettava* tuntemattoman  $\hat{y}_P$ , mutta *luotettava* tuntemattoman  $\hat{x}_P$  suhteen.

Riittävän suuri karkea virhe  $\nabla$  havainnoissa  $\underline{\ell}_1$  tai  $\underline{\ell}_3$  huomattaisiin siirtosuureen ylisuurena arvona (vaihtoehtoinen hypoteesi  $H_a$ ):

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} \Big| H_a = \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{\ell}_1 + \underline{\ell}_3 + \nabla)^2,$$

jonka odotusarvo on  $1 + \frac{1}{2} (\nabla/\sigma)^2$ , ja epäkeskisyysparametri on  $\lambda = \frac{1}{2} (\nabla/\sigma)^2$ , katso kuva 15.2. Jos  $\nabla \gg \sigma$ , tämä huomattaisiin kohtalaisen varmasti.

<sup>16</sup>Tätä kutsutaan sisäiseksi luotettavuudeksi.

<sup>17</sup>Ulkoinen luotettavuus.





**Huomautus** Luotettavuudella ei ole mitään tekemistä *tarkkuuden* kanssa! Tuntemattomien  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_P & \hat{y}_P \end{bmatrix}^T$  tarkkuutta kuvaa niiden varianssimatriisi

$$\text{Var}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \sigma^2 (A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} = \sigma^2 \rho^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

siis  $\hat{x}_P$ :n keskivirhe on  $\frac{1}{2}\sigma\rho\sqrt{2}$  ja  $\hat{y}_P$ :n keskivirhe on  $\sigma\rho$ , ja ne eivät korreloi keskenään. Katso virhe-ellipsi kuvassa 15.7.

Kuitenkaan hyvä keskivirhe ei lohduta, jos koordinaattiratkaisu  $\hat{y}_P$  sisältää karkean virheen...

### 15.9.3 Redundanssin merkitys

Vaikka mittausverkon luotettavuus olisi hyvä, onko helppo selvittää, missä havainnossa karkea virhe on tapahtunut? Jos se ei ole helppoa, joudutaan mittaamaan kaikki epäilyksenalaiset havainnot uudelleen tai heittämään ne pois. Tämä ei ole toivottavaa.

Sekä hyvän luotettavuuden että karkeiden virheiden erotettavuuden kannalta geodeettisen mittausverkon *redundanssiaste* ei saa olla liian pieni. Jos havaintojen lukumäärä on  $n$  ja tuntemattomien lukumäärä  $m$ , on ehtojen eli *vapausasteiden* lukumäärä  $n - m$ . Redundanssiaste on silloin  $(n - m)/n$ . Se ilmaistaan usein prosentteina. Esimerkiksi suoran lineaarinen regressio viiden pisteen kautta:  $n = 5$ ,  $m = 2$ , siis redundanssiaste on  $\frac{3}{5} = 60\%$ . Toisaalta kymmenen pisteen vaaituslinja kahden tunnetun pisteen välillä:  $n = 11$ ,  $m = 10$ , redundanssiaste on  $\frac{1}{11} = 9\%$ . Redundanssi on siis heikkoa, mutta valitettavan tavallista. Mittaamalla edestakaisin saadaan  $n = 22$ ,  $m = 10$  ja redundanssiaste on  $\frac{12}{22} \approx 55\%$ , mikä on jo hyvä. Hyvä nyrkkisääntö on, että 50% redundanssiaste on toivottava.

## 15.10 Muodonmuutosten analyysi

Muodonmuutosten analyysi on tilastollisen testauksen sovellus. Nollahypoteesi  $H_0$  näissä testeissä on, että ei ole tapahtunut havaittavaa deformaatiota. Vaihtoehtoisia hypoteeseja  $H_a$  voi olla useita, alkaen hypoteesista, että on tapahtunut yksi erittelemätön deformaatio, ja päättyen moniin hypoteeseihin, jotka konkreettisesti kuvaavat tapahtuneen deformaation vaihtoehtoisia kuvioita.

Muodonmuutosten analyysi on myös sovellus, jossa aika on mukana yhtenä ulottuvuutena: vertaillaan kahdella tai useammalla ajan hetkellä eli *epookilla* tehtyjä mittauksia. Tutkitut deformaatiot voivat olla luonnollisia, kuten maankuoren tektonisten liikkeiden tai vaihtelevien jääkuormitusten aiheuttamia, tai ne voivat olla ihmisen aiheuttamia, kuten raaka-aineen (öljyn, maakaasun, kasteluveden, ...) pumppauksen aiheuttamia maan vajoamisia. Tutkimuksen kohteena voi olla maankuori tietyllä alueella, rakennus tai rakennettu kohde, kuten vesialtaan pato. Mahdollisuudet ovat varsin laajat.

Deformaatioanalyysi esitetään oppikirjoissa [Cooper \(1987\)](#) sivut 331–352 ja [Vaníček ja Krakiwsky \(1986\)](#) sivut 611–659, ja suomen kielellä oppikirjassa [Kallio \(1998\)](#) sivut 95–101. [Ahola \(2001\)](#) kuvaa sovellusta.



### 15.10.1 Korkeusdeformaatioanalyysi

Yhdessä ulottuvuudessa *korkeusdeformaatioanalyysi* tutkii pystyliikkeitä vaikkapa vaaituksen avulla. Yksinkertaisimmassa tapauksessa sama vaaituslinja tai -verkko,  $n$  pistettä, on mitattu kaksi kertaa:

$$\underline{H}_i(t_1), \quad \underline{H}_i(t_2), \quad i = 1, \dots, n,$$

ja myös korkeuksien varianssimatriisit,  $\Sigma(t_1)$  ja  $\Sigma(t_2)$ , ovat tiedossa.

Ilmeisesti vertailu onnistuu vain, jos molemmat mittaukset redukoidaan ensin samaan lähtö- eli *datumipisteeseen*. Valitaan verkon ensimmäinen piste, piste 1, datumipisteeksi:

$$H_1^{(1)}(t_1) = H_1^{(1)}(t_2) \quad (= \text{joku sovittu arvo}).$$

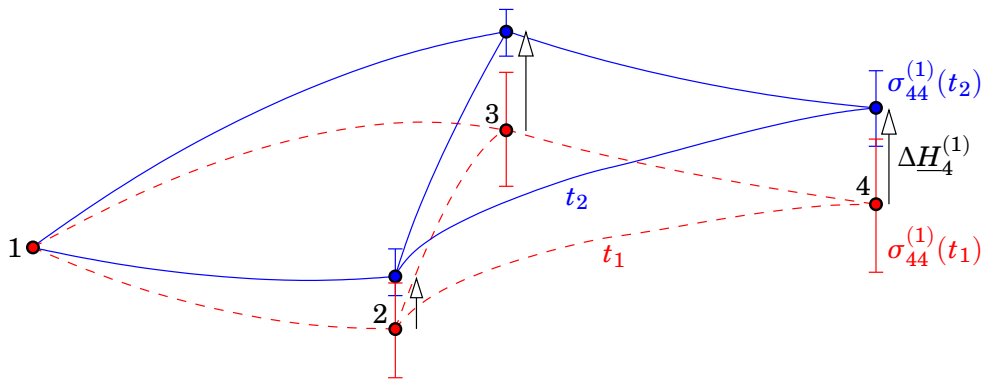
Tämän jälkeen molempien mittausaikojen eli *epookkien* varianssimatriisit ovat enää  $(n-1) \times (n-1)$  -kokoisia, koska nyt piste 1 on *tunnettu* ja ilman (ko-)varianssia.

$$\Sigma^{(1)}(t_1) = \begin{bmatrix} \sigma_{22}^{(1)}(t_1) & \sigma_{23}^{(1)}(t_1) & \cdots & \sigma_{2n}^{(1)}(t_1) \\ \sigma_{32}^{(1)}(t_1) & \sigma_{33}^{(1)}(t_1) & \cdots & \sigma_{3n}^{(1)}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n2}^{(1)}(t_1) & \sigma_{n3}^{(1)}(t_1) & \cdots & \sigma_{nn}^{(1)}(t_1) \end{bmatrix},$$

ja samalla tavalla matriisille  $\Sigma^{(1)}(t_2)$ . Tässä

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ii}^{(1)}(t_\ell) &= \text{Var}\{H_i^{(1)}(t_\ell)\}, \\ \sigma_{ij}^{(1)}(t_\ell) &= \text{Cov}\{H_i^{(1)}(t_\ell), H_j^{(1)}(t_\ell)\}, \end{aligned} \right\} \quad \ell = 1, 2; \quad i, j = 2, \dots, n.$$





KUVA 15.8. Korkeuden deformaation seurantaverkko epookeille  $t_1$  (punainen) ja  $t_2$  (sininen). Realistiset virhepalkit.

Lasketaan nyt kahden mittausepookin väliset korkeussiirtymät ja niiden yhteinen varianssimatriisi, olettaen että ajanhetkellä  $t_1$  ja ajanhetkellä  $t_2$  tehdyt mittaukset ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan:

$$\Delta \underline{H}_i^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{H}_i^{(1)}(t_2) - \underline{H}_i^{(1)}(t_1), \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\Sigma_{\Delta H \Delta H}^{(1)} = \Sigma^{(1)}(t_1) + \Sigma^{(1)}(t_2).$$

Tämän jälkeen on intuitiivisesti selvää, olettaen että molemmat korkeusmittausten joukot ovat moninormaalisti jakautuneet, että seuraava suure, *siirtosuure*, on jakautunut jakauman  $\chi_{n-1}^2$  mukaan:

$$\frac{1}{\sigma^2} \underline{\mathcal{E}} = \left( \Delta \underline{H}^{(1)} \right)^T \left( \Sigma_{\Delta H \Delta H}^{(1)} \right)^{-1} \Delta \underline{H}^{(1)},$$

jossa

$$\Delta \underline{H}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{H}_2^{(1)}(t_2) - \underline{H}_2^{(1)}(t_1) \\ \underline{H}_3^{(1)}(t_2) - \underline{H}_3^{(1)}(t_1) \\ \vdots \\ \underline{H}_n^{(1)}(t_2) - \underline{H}_n^{(1)}(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{H}_2^{(1)} \\ \Delta \underline{H}_3^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \underline{H}_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

on korkeuserojen (abstrakti) vektori.

Tilastollinen deformaatiotestaus perustuu tähän suureeseen  $\underline{\mathcal{E}}$ .

### 15.10.2 Tasodeformaatioanalyysi

Kahdessa ulottuvuudessa menetellään samalla tavalla kuin yksiulotteisessa tapauksessa, paitsi että

- 1) On houkuttelevaa kirjoittaa tasokoordinaatit *kompleksiluvuiksi*.



2) On *kaksi* datumipistettä, joiden koordinaatit katsotaan identtisiksi molemmalle epookille.

Siis jos on  $n$  pistettä, on varianssimatriisin koko nyt  $(n-2) \times (n-2)$ . Varianssimatriisikin on kompleksiarvoinen ja *hermiittinen*: sen transpoosi on samalla sen kompleksikonjugaatti eli *liittoluku*.

18 Testaussuure on taas siirtosuure<sup>18</sup>

$$\frac{1}{\sigma^2} \underline{\mathcal{E}} = \left( \underline{\mathbf{d}}^{(AB)} \right)^\dagger \left( \underline{\Sigma}_{\text{dd}}^{(AB)} \right)^{-1} \underline{\mathbf{d}}^{(AB)},$$

jossa  $\underline{\mathbf{d}}$  on kaikkien koordinaattierojen kompleksinen vektori eli *siirtymävektori*:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}^{(AB)} &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{x}_3^{(AB)}(t_2) - \underline{x}_3^{(AB)}(t_1) + i \left( \underline{y}_3^{(AB)}(t_2) - \underline{y}_3^{(AB)}(t_1) \right) \\ \underline{x}_4^{(AB)}(t_2) - \underline{x}_4^{(AB)}(t_1) + i \left( \underline{y}_4^{(AB)}(t_2) - \underline{y}_4^{(AB)}(t_1) \right) \\ \vdots \\ \underline{x}_n^{(AB)}(t_2) - \underline{x}_n^{(AB)}(t_1) + i \left( \underline{y}_n^{(AB)}(t_2) - \underline{y}_n^{(AB)}(t_1) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{z}}_3^{(AB)} \\ \Delta \underline{\mathbf{z}}_4^{(AB)} \\ \vdots \\ \Delta \underline{\mathbf{z}}_n^{(AB)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{z}}_i^{(AB)} &= \underline{\mathbf{z}}_i^{(AB)}(t_2) - \underline{\mathbf{z}}_i^{(AB)}(t_1) = \\ &= \left( \underline{x}_i^{(AB)}(t_2) - \underline{x}_i^{(AB)}(t_1) \right) + i \left( \underline{y}_i^{(AB)}(t_2) - \underline{y}_i^{(AB)}(t_1) \right), \quad i = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

$AB$  on valittu datumi eli lähtöpistepari molemmissa epookeissa  $t_1$  ja  $t_2$ . Muut pisteet on numeroitu 3, 4, ...,  $n$ . Symboli  $\dagger$  merkitsee sekä

19 transpoosia että kompleksikonjugaattia eli *hermitointia*<sup>19</sup>:

$$A^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$



### 15.10.3 Esimerkki

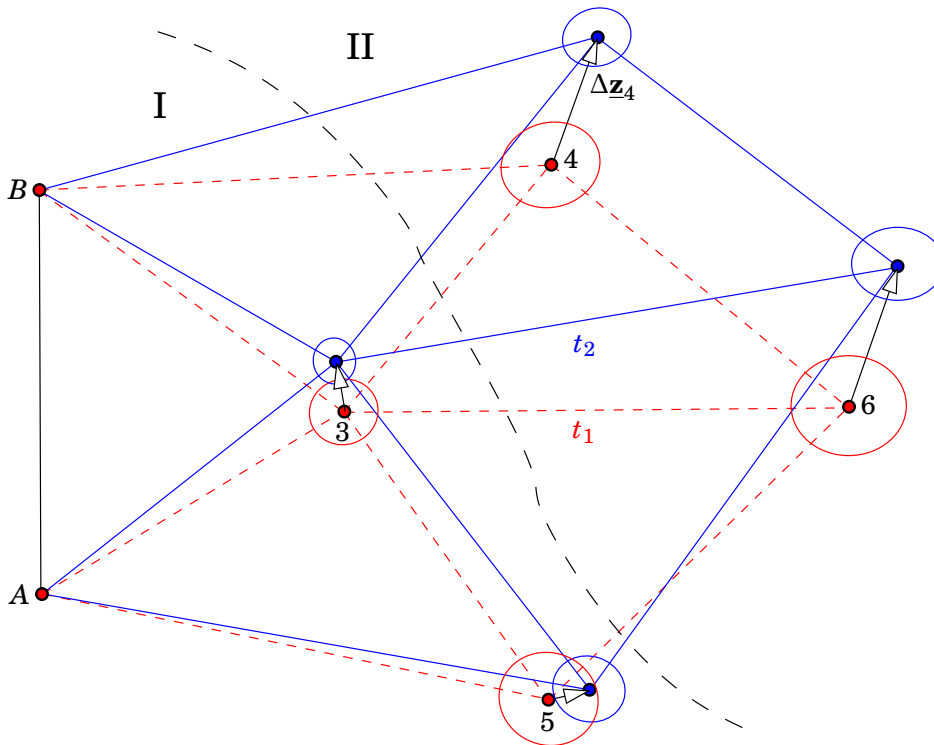
20 Deformaatiomittausverkon ensimmäisen mittausepookin tasoitettut koordinaatit  $\underline{\mathbf{x}}_i(t_1)$ ,  $i = 3, \dots, 6$  on annettuna<sup>20</sup> taulukossa 15.9a, ja toisen

<sup>18</sup>Varoitus: Cooperin kirjassa (Cooper, 1987, sivu 335) on kaavan (9.52) alapuolella virhe, oikea kaava on (käänteismatriisi eikä transpoosi):

$$\Omega = \hat{\mathbf{d}}^t Q_d^{-1} \hat{\mathbf{d}}.$$

<sup>19</sup>Charles Hermite (1822–1901) FRS FRSE oli ranskalainen matemaatikko ja lukuteoreetikko.





KUVA 15.9. Tasodeformaation seurantaverkko epookeille  $t_1$  (punainen) ja  $t_2$  (sininen). Realistiset virhe-ellipsit. Piirretty on myös vaihtoehtoinen hypoteesi, että alue II liikkuu suhteessa alueeseen I.

mittausepookin koordinaatit  $\underline{x}_i(t_2)$ ,  $i = 3, \dots, 6$  taulukossa 15.9b.

Lasketaan erotusten vektori  $\underline{d}$  epookkien välillä, taulukko 15.9c.

Käyttäen reaalitylukuja, määritelmällä

$$\underline{d} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1) = \begin{bmatrix} \underline{x}_3(t_2) - \underline{x}_3(t_1) \\ \underline{y}_3(t_2) - \underline{y}_3(t_1) \\ \underline{x}_4(t_2) - \underline{x}_4(t_1) \\ \underline{y}_4(t_2) - \underline{y}_4(t_1) \\ \underline{x}_5(t_2) - \underline{x}_5(t_1) \\ \underline{y}_5(t_2) - \underline{y}_5(t_1) \\ \underline{x}_6(t_2) - \underline{x}_6(t_1) \\ \underline{y}_6(t_2) - \underline{y}_6(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{x}_3 \\ \Delta \underline{y}_3 \\ \Delta \underline{x}_4 \\ \Delta \underline{y}_4 \\ \Delta \underline{x}_5 \\ \Delta \underline{y}_5 \\ \Delta \underline{x}_6 \\ \Delta \underline{y}_6 \end{bmatrix},$$

löydämme laskemalla

$$\underline{d}^T \underline{d} = \sum_{i=3}^6 \left( (\underline{x}_i(t_2) - \underline{x}_i(t_1))^2 + (\underline{y}_i(t_2) - \underline{y}_i(t_1))^2 \right) = 0,017771 \text{ m}^2.$$

<sup>20</sup>Nämä ovat *vain* testattavien pisteiden koordinaatit. Niiden oletetaan olevan sidottuja, molemmalle epookille, kahteen nimettömään datumipisteeseen — vaikkapa pisteet 1 ja 2, tai A ja B — alueen ulkopuolella, jotka oletetaan liikkumattomiksi.



TAULUKKO 15.9. Deformaatioanalyysi tasossa, koordinaatit. Yksikkö metri.

(a) Epookki 1			(b) Epookki 2			(c) Siirtymät		
$i$	$\underline{x}_i(t_1)$	$\underline{y}_i(t_1)$	$i$	$\underline{x}_i(t_2)$	$\underline{y}_i(t_2)$	$i$	$\Delta \underline{x}_i$	$\Delta \underline{y}_i$
3	1234,123	2134,453	3	1234,159	2134,448	3	+0,036	-0,005
4	1681,045	2507,487	4	1681,123	2507,516	4	+0,078	+0,029
5	755,495	2623,456	5	755,507	2623,487	5	+0,012	+0,031
6	1248,865	3051,775	6	1248,951	3051,807	6	+0,086	+0,032

Vastaavasti kompleksiluvuilla, määritelmällä

$$\underline{\mathbf{d}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_3(t_2) - \underline{\mathbf{z}}_3(t_1) \\ \underline{\mathbf{z}}_4(t_2) - \underline{\mathbf{z}}_4(t_1) \\ \underline{\mathbf{z}}_5(t_2) - \underline{\mathbf{z}}_5(t_1) \\ \underline{\mathbf{z}}_6(t_2) - \underline{\mathbf{z}}_6(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{z}}_3 \\ \Delta \underline{\mathbf{z}}_4 \\ \Delta \underline{\mathbf{z}}_5 \\ \Delta \underline{\mathbf{z}}_6 \end{bmatrix}$$

saamme samalla tavalla laskemalla

$$\underline{\mathbf{d}}^\dagger \underline{\mathbf{d}} = \sum_{i=3}^6 (\bar{\underline{\mathbf{z}}}_i(t_2) - \bar{\underline{\mathbf{z}}}_i(t_1)) (\underline{\mathbf{z}}_i(t_2) - \underline{\mathbf{z}}_i(t_1)) = 0,017771 \text{ m}^2.$$

Tässä  $\underline{\mathbf{z}}_i \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}_i + i \underline{y}_i$ , ja  $\bar{\underline{\mathbf{z}}}_i \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}_i - i \underline{y}_i$  on sen kompleksikonjugaatti eli liittoluku.

Olkoon ensimmäisenä epookkina mitattujen koordinaattien  $\underline{x}_i(t_1)$  ja  $\underline{y}_i(t_1)$  tarkkuudet (koordinaattikeskivirheet)  $\sigma_1 = \pm 5 \text{ cm}$  ja toisen epookin koordinaattien  $\underline{x}_i(t_2)$  ja  $\underline{y}_i(t_2)$  tarkkuudet  $\sigma_2 = \pm 1 \text{ cm}$  — jokaiselle pisteelle. Lisäksi koordinaatit oletetaan korreloimattomiksi<sup>21</sup>. Koordinaattivektorien varianssimatriisit ovat siis

$$\Sigma_1 = \sigma_1^2 I, \quad \Sigma_2 = \sigma_2^2 I.$$

Laskemme yhden koordinaattisiirtymän  $\Delta \underline{x}_i = \underline{x}_i(t_2) - \underline{x}_i(t_1)$ , tai vastaavasti  $\Delta \underline{y}_i = \underline{y}_i(t_2) - \underline{y}_i(t_1)$ , keskivirheen  $\sigma_\Delta$ . Varianssien kasautumislaki antaa

$$\sigma_\Delta^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = (25 + 1) \text{ cm}^2 = 26 \text{ cm}^2.$$

Nyt koordinaattisiirtymien varianssimatriisi on

$$\Sigma_{\text{dd}} = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \sigma_\Delta^2 I,$$

<sup>21</sup>Tämä on ilmeisen epärealistista: todellisissa verkoissa pistevirhe kasvaa samalla, kun etäisyys kasvaa datumpisteistä, ja koordinaattivirheet epookkien sisällä ovat vahvasti korreloituina.



jossa  $\sigma_{\Delta} = \sqrt{26} \text{ cm} = 5,1 \text{ cm} = 0,051 \text{ m}$ .

Nyt valitaan painoyksikön keskivirheeksi juuri tämä arvo:  $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\Delta}$ . Silloin voimme myös kirjoittaa

$$\Sigma_{dd} = \sigma_{\Delta}^2 Q_{dd} = \sigma^2 Q_{dd} = \sigma^2 I,$$

siis painokerroinmatriisi on yksikkömatriisi.

Laske deformaation *testisuure* eli siirtosuure:

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \underline{d}^T \Sigma_{dd}^{-1} \underline{d} = \frac{\underline{d}^T Q_{dd}^{-1} \underline{d}}{\sigma^2} = \frac{\underline{d}^T \underline{d}}{\sigma^2}.$$

Tässä  $\underline{d} = \underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1)$  on siirtymävektori, epookkien välisten koordinaattierojen abstrakti vektori. Koska oletetaan, että molemmat koordinaattijoukot ovat annettuina samassa, yhteisessä datumissa, jonka määrittämissä pisteet *eivät* kuitenkaan kuulu joukkoon 3–6, voimme olettaa, että kaikki koordinaatit ovat vapaita. Silloin vapausasteiden lukumäärä on  $b = 2n = 8$ , jossa  $n$  on pisteiden lukumäärä. Siirtovektorin  $\underline{d}$  komponenttien eli koordinaattierojen varianssimatriisi on  $\sigma^2 I$ . Saadaan

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \frac{1}{0,0026 \text{ m}^2} (\underline{d}^T \underline{d}) = \frac{0,017771 \text{ m}^2}{0,0026 \text{ m}^2} = 6,835.$$

**Kysymys** Suure  $\mathcal{E}/\sigma^2$  on jakautunut  $\chi^2_8$ -jakauman mukaisesti. Jos tämän jakauman 95 % merkitsevyystason raja-arvo on 15,51 (katso [Cooper \(1987\)](#) sivu 355), onko tässä verkossa luultavasti tapahtunut deformaatio?

**Vastaus** Ei ole.  $6,835 < 15,51$ .

**Kysymys** Jos oletetut tarkkuudet olisivat  $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm 1 \text{ cm}$ , olisiko silloin 95 %:n merkitsevyystasolla luultavasti tapahtunut deformaatio?

**Vastaus** Olisi.  $\sigma^2 = (1 + 1) \text{ cm}^2 = 0,0002 \text{ m}^2$  ja

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} = \frac{1}{0,0002 \text{ m}^2} (\underline{d}^T \underline{d}) = \frac{0,017771 \text{ m}^2}{0,0002 \text{ m}^2} = 88,9 > 15,51.$$



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on suhde ja ero havaintojen varianssimatriisiin  $\Sigma_{\ell\ell}$  ja painokerroinmatriisiin  $Q_{\ell\ell}$  välillä?
- 2) Mikä on suhde *a priori* painoyksikön varianssin  $\sigma^2$  ja *a posteriori* painoyksikön varianssin  $\hat{\sigma}^2$  välillä?



- 3) Mikä on ensimmäisen lajin virhe ja toisen lajin virhe?
- 4) Mikä on tilastollisen testin erotuskyky?
- 5) Mikä on suhde kokonaisvalidoinnin merkitsevyystason  $\alpha_{\chi^2}$  ja yksittäisten poikkeavien havaintoarvojen etsinnän merkitsevyystason  $\alpha$  välillä? Miksi?
- 6) Mikä on redundanssi ja miksi se on tärkeä?
- 7) Mikä on sisäinen ja mikä ulkoinen luotettavuus?
- 8) Mitkä ovat geodeettisen verkon suunnittelu- ja mittausprosessin vaiheet?
- 9) Mikä on matriisin hermitointi?
- 10) Heathrow'n lentokenttä Yhdistyneessä kuningaskunnassa ottaa vastaan noin 35 miljoonaa kansainvälistä matkustajaa vuodessa. Ehdotettu on uutta hienoa järjestelmää, joka tunnistaa videonauhalla ihmisten käyttäytymistä analysoimalla, ketkä ovat potentiaalisia terroristeja. "Väärrien hälytysten" eli ensimmäisen lajin virheiden määrä on  $1 - \alpha = 1\%$ . Toisen lajin virheiden eli ei-tehtyjen mutta aiheellisten hälytysten määrän,  $1 - \beta$ , uskotaan olevan pieni, alle 50%.

Taustaksi kerrottakoon, että vuoden 1970 jälkeen on Yhdistyneessä kuningaskunnassa kuollut noin 4000 ihmistä terroritekoihin.

Mitä tekisit järjestelmän osoittamille matkustajille ja miksi?

- (a) Tapatat heidät kaikki.
- (b) Pidätät ja tutkit jokaisen.
- (c) Lähetät heitä takaisin sinne, mistä he tulivat.
- (d) Juttelet heidän kanssaan ja tutkit diskreetisti taustat, ennen kuin teet mitään.
- (e) Toteat, että järjestelmä on kelvoton.





# Painovoima geodesiassa

## 16

Inmiddels was op 6 september 1943 ook het contact met de ‘goede’ Utrechtse hoogleraren tot stand gekomen en werden in nauwe samenwerking met hen hervormingsplannen voor het onderwijs (b.v. betreffende het studium generale) uitgewerkt. Naast prof. dr. J. Jongbloed was vooral prof. dr. ir. F. A. Vening Meinesz, te wiens huize in Amersfoort vele vergaderingen werden gehouden, hierbij een stuwende kracht. In verband met diens studiereizen per onderzeeër werd het contact aangeduid als K18. Vermeldenswaard is, dat tot en met 19 september 1944 33 vergaderingen met de hoogleraren werden belegd.

---

Hakuteos *De ondergrondse pers* ("Maanalainen lehdistö")  
1940–1945 (Winkel ja de Vries, 1989, hollanniksi)



### 16.1 Painovoiman mittaus

Gravitaatio on maailmankaikkeuden perusvoima. Se on vetovoima, joka toimii kaikkien taivaankappaleiden välillä. Newtonin gravitaatiolain mukaan voima on verrannollinen kummankin kappaleen massaan ja kääntäen verrannollinen kappaleiden välisen etäisyyden toiseen potenssiin.

Galileo Galilei (1564–1642) näytti ensimmäisenä kokeellisesti, että kaikki kappaleet putoavat yhtä nopeasti: niiden vapaan putoamisen kiihtyvyys on sama riippumatta niiden massasta  $m$ .

Asia voidaan ymmärtää niin, että massan  $m$  kasvaessa gravitaatiovoima  $F$  kasvaa, mutta samalla myös kappaleen *inertia*  $m$ , joka esiintyy yhtälössä  $F = ma$ , kasvaa ja kiihtyvyys  $a$  jää samaksi. Sanotaan, että kappaleen ”painava massa” on sama kuin sen ”hidas massa”.

Kuitenkin laajempi näkökulma, joka on teoreettisesti mielekkäämpi ja yleisempi, on, että painovoiman ja kaikenlaisten ei-tasaisten liikkeiden aiheuttamien *pseudovoimien* — kuten keskipakovoiman — välillä ei ole olemassa periaatteellista eroa. Jo unkarilainen paroni, geofyysikko <sup>1</sup> Loránd Eötvös<sup>1</sup> teki lukuisia hyvin tarkkoja kokeita tutkiakseen, onko löydettävissä eroja ”painavan massan” ja ”hitaan massan” välillä, esimerkiksi ainekoostumuksen yhteydessä. Vastaus oli johdonmukaisesti <sup>2</sup> ”ei”<sup>2</sup>.

Tästä Albert Einstein (1879–1955) teki loogisen päätelmänsä, että painovoima on aika-avaruuden *geometrinen* ominaisuus, joka liittyy sen kaarevuuteen, ja kehitti kuuluisat yleisen suhteellisuusteorian kenttäyhtälönsä, jotka kytkevät yhteen aika-avaruuden kaarevuustensorin ja aika-avaruuden sisältämän aineen energia-liikemäärätensorin. Paikallisesti, esimerkiksi pienen suljetun hissien sisällä, emme voi tietää, onko painovoima hissien sisällä Maan vetovoiman vai hissien pohjassa olevan rakettimoottorin tuottaman kiihdytyksen tulosta!

Painovoiman kiihtyvyyden mittaukseen ja tutkimukseen erikoistunut tieteenala on nimeltään gravimetria.

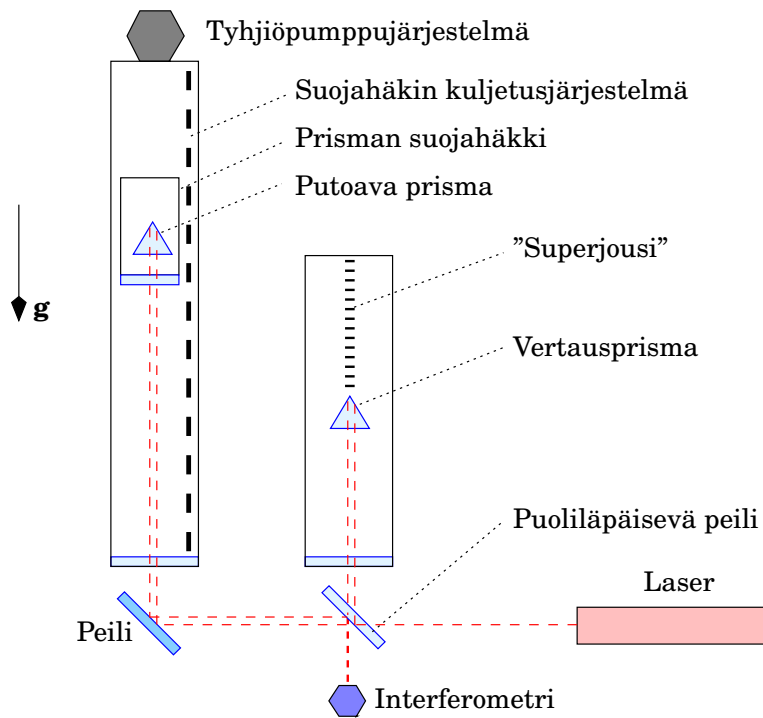
Painovoima on *vapaan putoamisen kiihtyvyys* ja se ilmaistaan SI-yksikössä  $\text{m/s}^2$ . Maan pinnalla painovoima on noin  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Kuitenkin gravimetriassa tarvitaan pienempiä yksiköitä, kuten milligal (mGal) ja mikrogal ( $\mu\text{Gal}$ ). Hyvin tarkassa työssä tavataan vielä nanogal (nGal).

Yksikkö	SI-yksiköissä ( $\text{m/s}^2$ )	Painovoiman murto-osana (noin!)
mGal	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$\mu\text{Gal}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$
nGal	$10^{-11}$	$10^{-12}$

Painovoiman mittaamiseen on rakennettu mittauskojeita, *gravimetreja*. Tavallinen kenttägravimetri on periaatteessa ”vain” erittäin herkkä jousivaaka (kuva 16.2). Sen mittaustarkkuus voi olla 0,01–0,1 mGal. Tämän lisäksi on olemassa *ballistisia* gravimetreja, jotka mittaavat putoavan kappaleen kiihtyvyyttä interferometrisesti, kuva 16.1.

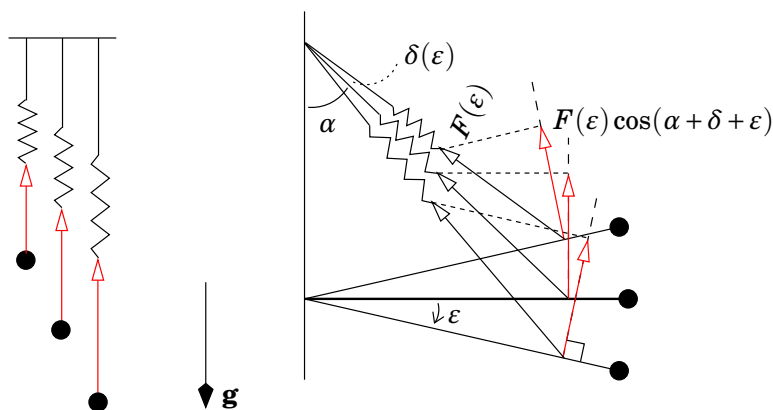
<sup>1</sup>Loránd paroni Eötvös de Vásárosnamény (1848–1919) oli unkarilainen geofyysikko ja painovoiman tutkija.

<sup>2</sup>Eötvösin kokeet on toistettu vielä paljon suuremmalla tarkkuudella. Vastaus ei muuttunut.

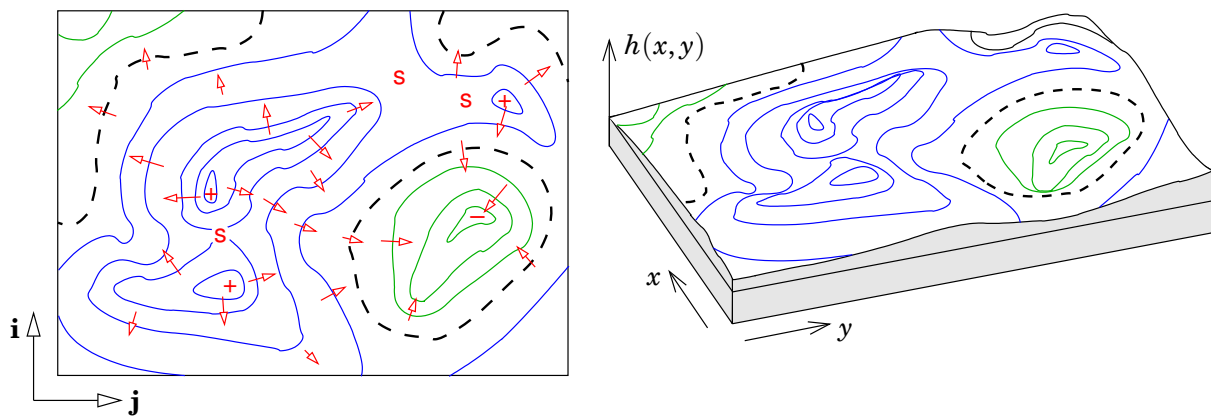


KUVA 16.1. Absoluuttinen eli ballistinen gravimetri.

Ballistiset gravimetrit ovat *absoluuttisia*. Kenttä- eli jousigravimetrit eivät ole absoluuttisia, ja niillä on *käynti*. Tämä merkitsee, että saman painovoimakiihtyvyyden tuottamat mittaustulokset muuttuvat hitaasti ajassa. Siksi kenttämittaukset suunnitellaan aina lähtemään tunnetusta pisteestä ja päättymään tunnettuun pisteeseen. Mittausarvot tasoitetaan päätepisteiden välillä ajan suhteessa näin määritetyn käynnin mukaan.



KUVA 16.2. Relatiivisen eli jousigravimetrin toimintaperiaate: herkkyyden lisäys vinoratkaisun avulla eli *astatisointi*.



KUVA 16.3. Maaston korkeus  $h(x, y)$  korkeuskäyrillä kuvattuna ja korkeusgradientit (nuolet). "+", "-", paikallinen maksimi, minimi, "s" satulapiste. Oikealla maaston perspektiivikuva.



## 16.2 Painovoima ja geopotentialiaali



### 16.2.1 Skalaarikentän gradientti

Kuvassa 16.3 nähdään, miten maaston muodot kuvataan kartalla korkeuskäyrillä. Kuvassa esimerkkinä olisi kelvannut mikä tahansa kahden muuttujan skalaarifunktio maaston korkeuden  $h(x, y)$  sijasta.

<sup>3</sup> Kuvaan on piirretty nuolina korkeuskentän *gradientti*, vektorikenttä<sup>3</sup>

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} = \partial_x h(x, y) \mathbf{i} + \partial_y h(x, y) \mathbf{j} \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } h = \nabla h,$$

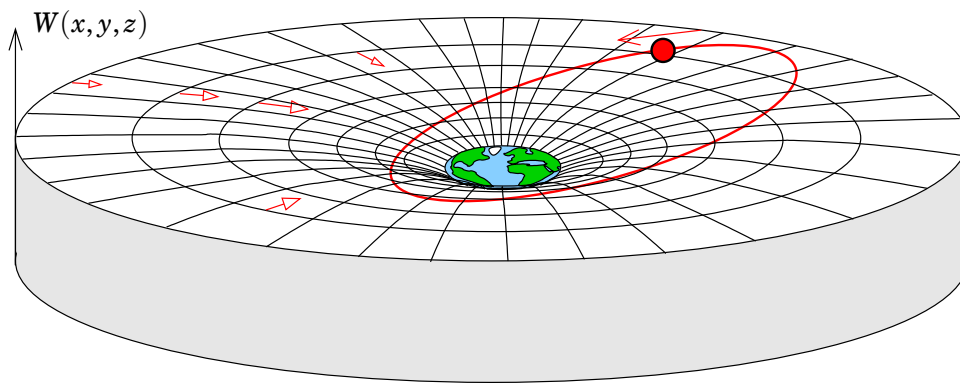
jossa  $\mathbf{i}$  ja  $\mathbf{j}$  ovat  $x$ - ja  $y$ -suuntaiset yksikkövektorit. Tämä on vektoriarvoinen kenttä, jonka arvo jokaisessa pisteessä  $(x, y)$  koostuu kahdesta komponentista. Nämä komponentit, korkeuskentän osittaisderivaatat koordinaattien suhteen tässä pisteessä, ovat Eulerin notaatiossa  $\partial_x h$  ja  $\partial_y h$ .

Gradienttivektori kuvaa maanpinnan *kaltevuutta*: se on sitä pidempi, mitä jyrkempi on maanpinnan kaltevuus. Ja vektorin suunta on tietenkin se suunta, mihin maasto viettää<sup>4</sup>.

Gradientti on aina kohtisuora korkeuskäyrää kohtaan, joka on samaa korkeusarvoa omaavien pisteiden joukko eli *tasa-arvokäyrä*. Sitä pitkin korkeusarvo on vakio.

<sup>3</sup>Symbolin  $\nabla$  nimi on *nabla*. Se lienee vanha kreikkalainen nimi foinikialaiselle harpulle, jonka muotoa se muistuttaa.

<sup>4</sup>Itse asiassa nuolet on piirretty "väärään" suuntaan, johon maanpinta menee alaspäin. Ne siis kuvaavat vektorikenttää  $-\mathbf{v}$ .



KUVA 16.4. Geopotentialipöytä. Tällaiset pöydät löytyvät tiedekeskuksista. Pöydän pinnan korkeus kuvaa Maan painovoimapotentialiaalia, tosin vain kahdessa ulottuvuudessa. Nuolet kuvaavat taas geopotentialin *gradienttia*, pöydän pinnan kaltevuutta. Geopotentialipöydällä lasikuula voidaan saada kiertämään ”maapallon” ympäri elliptisellä Keplerin radalla, jos pinnan muoto on riittävän realistinen eli Newtonin gravitaatiolain mukainen.

Korkeuskentän  $h(x, y)$  tavalla voidaan visualisoida myös *geopotentialia*  $W(x, y, z)$  kolmiulotteisessa avaruudessa ”korkeuskäyrien” eli *tasapotentialialipintojen* ja kolmiulotteisen gradientin avulla. Tasapotentialialipinnoilla geopotentialin arvo on vakio.

Kuva 16.4 on vastaava geopotentialin visualisointi pöydän kaarevana pintana. Pinnan etäisyys lattian tasosta vastaa geopotentialia eli pinnan päällä olevan kappaleen energiatasoa. Pöydälle piirretyt ympyrät kuvaavat Maan painovoimakentän tasapotentialialipintoja, jotka ovat todellisuudessa kaksiulotteisia. Maapallolta säteilevät kaaret taas kuvaavat ”voimaviivoja”, joita pitkin potentialin gradienttivektori eli painovoimavektori on kaikkialla suunnattu.

### 16.2.2 Normaalipainovoima ja häiriöpotentialiaali

Painovoima koostuu *kahdesta osasta*:

- Maan massojen vetovoima
- keskipakoisvoima, Maan pyörähdysliikkeen aiheuttama pseudo-voima.

Keskipakoisvoiman osuus koko painovoimasta on noin  $-0,3\%$  päiväntasaajalla: samaa suuruusluokkaa kuin painovoiman vaihtelu päiväntasaajan ja napojen välillä.

Maan painovoimakenttä sisältää kaikenlaisia epäsäännöllisiä vaih-

teluita paikasta toiseen. Suurin osa painovoimakentästä voidaan kuitenkin kuvata *pyörähdysellipsoidin* kenttänä. Tällaista matemaattisesti määriteltä, säännöllistä mallikenttää, jossa on otettu huomioon Maan litistyneisyys ja pyörähdysliike, kutsutaan *normaalikentäksi*.

Normaalipainovoimakentän voimaviivat ja tasapotentiaalipinnat on kuvattu kuvassa 16.5. *Vertausellipsoidi* on normaalipainovoimakentän eräs tasapotentiaalipinta, samalla tavalla kuin *geoidi* (osio 16.4) on todellisen painovoimakentän tasapotentiaalipinta.

Normaalipainovoimakentän potentiaali eli *normaalipotentiali* merkitään symbolilla  $U(x, y, z)$ . Itse *normaalipainovoima* on tämän potentiaalilin gradientti.

Painovoimavektori on geopotentialin  $W(x, y, z)$  gradientti:

$$\mathbf{g} = \nabla W = \text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k} = \partial_x W \mathbf{i} + \partial_y W \mathbf{j} + \partial_z W \mathbf{k},$$

jossa  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  ovat  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -suuntaiset yksikkövektorit.

Samalla tavalla on myös normaalipainovoimavektori

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla U = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \partial_x U \mathbf{i} + \partial_y U \mathbf{j} + \partial_z U \mathbf{k},$$

normaalipainovoiman potentiaalilin  $U$  gradientti.

Vähentämällä todellisesta painovoimapotentiaalista normaalipotentiali saadaan *häiriöpotentiali*:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} W - U.$$

Normaalipainovoiman *vahvuus* merkitään symbolilla  $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \|\boldsymbol{\gamma}\|$ , samalla tavalla kuin todellisen painovoiman vahvuus  $g \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{g}\|$ . Koska molemmat vektorit ovat melkein samansuuntaisia, suoraan alaspäin, voidaan myös kirjoittaa

$$g \approx -\frac{\partial W}{\partial h} = -\partial_h W, \quad \gamma \approx -\frac{\partial U}{\partial h} = -\partial_h U.$$

Normaalipainovoima voidaan laskea eksaktisti, jos on tiedossa pisteen  $P$  geodeettinen leveysaste  $\varphi_P$  ja korkeus vertausellipsoidista  $h_P$ :

$$\gamma_P = \gamma(\varphi_P, h_P).$$

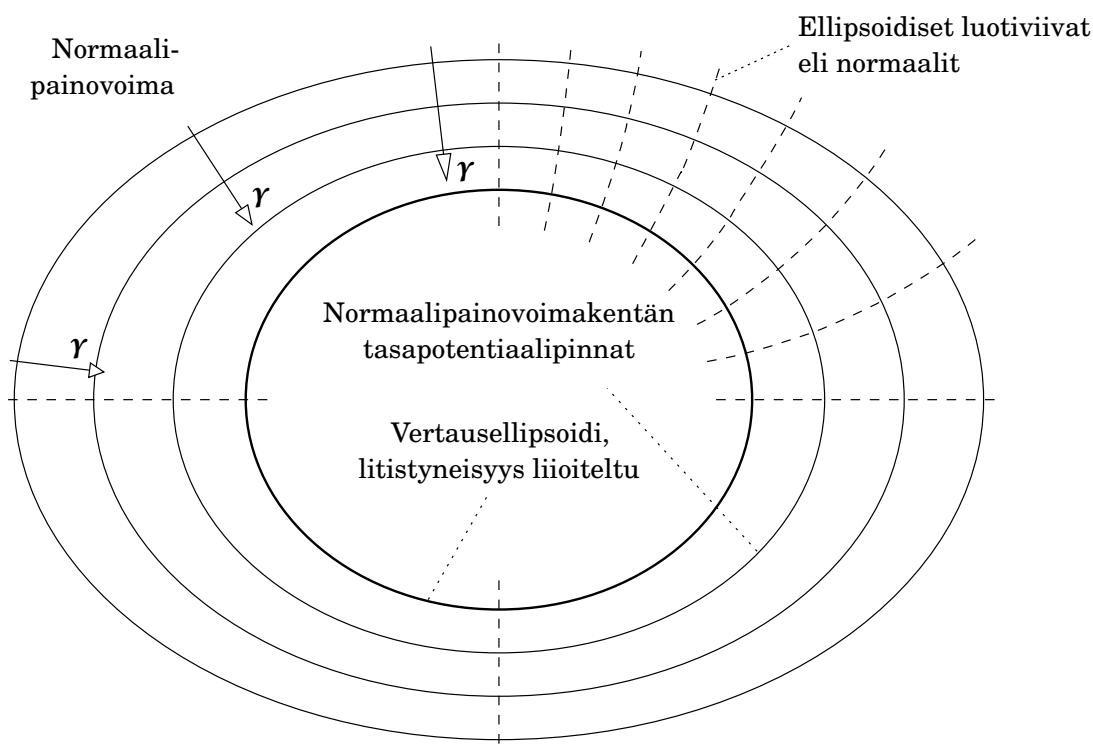
Normaalipainovoima, samalla tavalla kuin todellinen painovoima, vähenee nopeasti korkeuden mukaan. Vähennys on noin 0,3 mGal jokaista metriä kohti. Riippuvuus leveysasteesta on paljon heikompa.



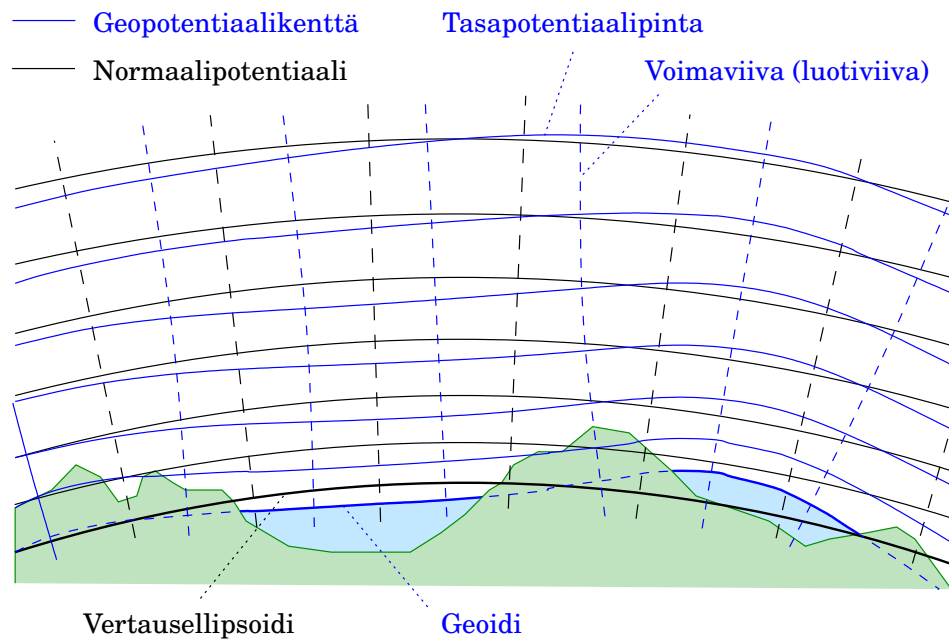


TAULU 16.1. Normaalipotentiaali ja -painovoima GRS80-järjestelmän mukaan (Heikkinen 1981, yksinkertaistettu). Yhtälöissä  $9,78\dots$  on itse normaalipainovoima ja  $0,0000030877\dots$  normaalipainovoiman pystygradientti päiväntasaajalla vertausellipsoidin pinnalla. Yksiköt m,  $\text{m/s}^2$  ja  $\text{m}^2/\text{s}^2$ .

$$\begin{aligned}
 U &= 62636860,8500 + \\
 &+ (-9,78032677 - 0,05163075 \sin^2 \varphi - 0,00022761 \sin^4 \varphi - 0,00000123 \sin^6 \varphi) h + \\
 &+ (+0,01543899 - 0,00002195 \sin^2 \varphi - 0,00000010 \sin^4 \varphi) \cdot 10^{-4} \cdot h^2 + \\
 &+ (-0,00002422 + 0,00000007 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-8} \cdot h^3 + 0,00000004 \cdot 10^{-12} \cdot h^4 + \dots, \\
 \frac{\partial U}{\partial h} &= -9,78032677 - 0,05163075 \sin^2 \varphi - 0,00022761 \sin^4 \varphi - 0,00000123 \sin^6 \varphi + \\
 &+ (+0,03087798 - 0,00004390 \sin^2 \varphi - 0,00000020 \sin^4 \varphi) \cdot 10^{-4} \cdot h + \\
 &+ (-0,00007265 + 0,00000021 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-8} \cdot h^2 + 0,00000015 \cdot 10^{-12} \cdot h^3 + \dots.
 \end{aligned}$$



KUVA 16.5. Maan normaalipainovoimakenttä.



KUVA 16.6. Geopotentialin ja normaalipotentiaalın tasapotentialiaalipinnat ja voimaviivat.



### 16.2.3 Tasapotentialiaalipintojen välinen etäisyys

Koska normaalipainovoimakenttä on tarkoitettu todellisen painovoimakentän idealisoiduksi esitystavaksi, kulkevat molempien saman potentiaalinarvon tasapotentialiaalipinnat  $W = \text{vakio}$  ja  $U = \text{vakio}$ , samalla vakioarvolla, lähellä toisiaan. Katso kuva 16.7. Pisteet  $P$  ja  $Q$  ovat samalla luotiviivalla:  $P$  sijaitsee  $W$ -kentän arvopinnalla  $W = W_P$ , kun  $Q$  sijaitsee  $U$ -kentän vastaavalla arvopinnalla  $U = U_Q = W_P$ . Siis

$$W_P = U_Q$$

ja linearisointi korkeuden  $h$  mukaan antaa

$$U_P \approx U_Q + \zeta \left. \frac{\partial U}{\partial h} \right|_P = U_Q - \zeta \gamma_P,$$

jossa  $\zeta$  on pisteiden  $P$  ja  $Q$  välinen matka.

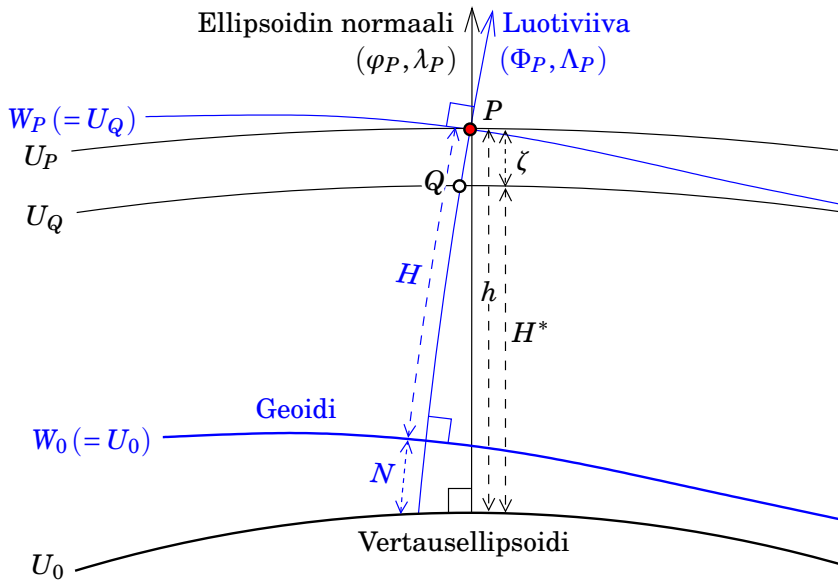
Vähentämällä saadaan *häiriöpotentialiaali*

$$T_P \stackrel{\text{def}}{=} W_P - U_P = U_Q - U_P = \zeta \gamma_P \implies \zeta = \frac{T_P}{\gamma_P}. \quad (16.1)$$

- <sup>5</sup> Yhtälö 16.1 on kuuluisa Brunsin<sup>5</sup> yhtälö. Suuretta  $\zeta$  kutsutaan (pisteen  $P$ ) *korkeusanomaliaksi*. Se on etäisyys Maan painovoimakentän tasapotentialiaalipinnan ja normaalikentän vastaavan eli saman potentiaalın







KUVA 16.7. Todellisen painovoimakentän ja normaalipainovoimakentän tasapotentialipinnat.

pinnan välillä. Brunsin yhtälö liittyy sen suoraan häiriöpotentiaaliin.

Kun piste  $P$  sijaitsee geoidilla, on  $W_P = W_0$  ja  $Q$  sijaitsee vertausellipsoidilla, siis  $U_Q = U_0 = W_0$ . Tässä tapauksessa käytetään merkinnän  $\zeta$  sijasta nimitystä  $N$ , *geoidin undulaatio*, geoidin korkeus, geoidin etäisyys vertausellipsoidista. Brunsin yhtälö tässä tapauksessa on

$$N = \frac{T_0}{\gamma_0},$$

jossa sekä häiriöpotentiaalin  $T_0$  että normaalipainovoiman  $\gamma_0$  arvo lasketaan geoidilla. Käytännössä  $N \approx \zeta$ , paitsi vuoristossa. Merenpinnalla  $N = \zeta$  eksaktisti.



### 16.3 Painovoima-anomaliat

Käytännössä pisteen korkeus  $h$  vertausellipsoidista on saatavissa empirisesti vain satelliittipaikannuksen<sup>6</sup> avulla. Siksi kirjoitetaan, käyttäen<sup>6</sup>

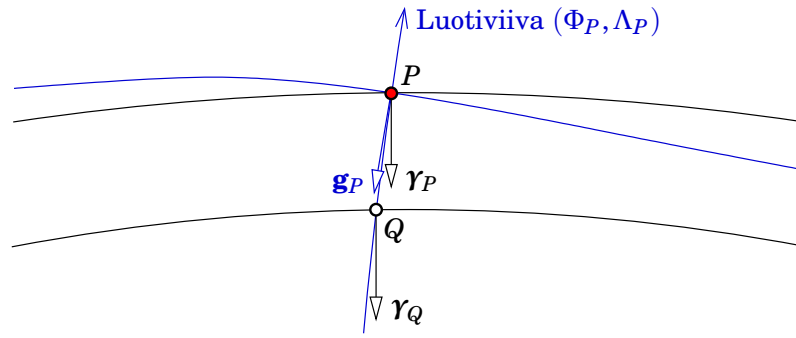
<sup>5</sup>Ernst Heinrich Bruns (1848–1919) oli etevä matemaatikko ja tähtitieteilijä, jonka suurimmat saavutukset liittyivät Maan painovoimakentän teoriaan.

<sup>6</sup>Nykyisin on GNSS:n ansiosta helpompi saada suure

$$\delta g_P \stackrel{\text{def}}{=} g_P - \gamma(\varphi_P, h_P),$$

jota kutsutaan *painovoimahäiriöksi*.





KUVA 16.8. Todellisen painovoiman ja normaalipainovoiman vektorit.

$h_P = H_P + N \approx H_P^* + \zeta$ , katso kuvat 16.7 ja 16.8:

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial h} \right|_P = g_P - \gamma(\varphi_P, h_P),$$

jossa (Taylorin sarjakehitelmä)

$$\gamma(\varphi_P, h_P) \approx \gamma(\varphi_P, H_P^*) + \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_P \cdot \zeta,$$

siis Brunsin yhtälön 16.1 kanssa saadaan

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial h} \right|_P \approx g_P - \gamma(\varphi_P, H_P^*) - \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_P \cdot \zeta = g_P - \gamma(\varphi_P, H_P^*) - \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_P \cdot \frac{T_P}{\gamma_P}.$$

Tästä

$$g_P - \gamma(\varphi_P, H_P^*) = -\left. \frac{\partial T}{\partial h} \right|_P + \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_P \frac{1}{\gamma_P} T_P. \quad (16.2)$$

Tätä lauseketta kutsutaan *painovoima-anomaliaksi*, määritelmänä

$$\Delta g_P \stackrel{\text{def}}{=} g_P - \gamma(\varphi_P, H_P^*). \quad (16.3)$$

Painovoima-anomalia  $\Delta g_P$  voidaan laskea, jos on mitattu kaksi suuretta<sup>7</sup>:

- pisteen  $P$  painovoima-arvo  $g_P$  gravimetrisesti
- pisteen korkeus  $H_P \approx H_P^*$  geoidilta eli ”merenpinnan yläpuolella”.

Useimmiten — ja ennen satelliittiaikakautta aina — määritetään painovoimamittauspisteen korkeus joko lukemalla kartalta, fotogrammetriseltä stereomallilta, käyttämällä ilmapuntaria tai linjavaaituksen avulla. Kaikissa tapauksissa saadaan juuri korkeus  $H_P$  *merenpinnan yläpuolella*. Korkeuksien mittaustarkkuus vaihtelee muutamasta senttimetristä noin metriin. Tämä epävarmuus kulkeutuu suoraan anomalia-arvoihin  $\Delta g$ , normaalipainovoiman pystygradienttiarvon  $\partial_h \gamma \approx -0,3 \text{ mGal/m}$  mukaan.

<sup>7</sup>Leveysasteelle  $\varphi_P$  riittää likimääräinen arvo.



*Painovoima-anomalia  $\Delta g$  on empiirinen, Maan pinnalla tehdyistä mittauksista laskettava suure.*

Tavallisimmin käytetty painovoima-anomalia on *ilma-anomalia*  $\Delta g$ , jonka määritelmä on annettu yhtälönä 16.3. Painovoima-anomaliat vaihtelevat arvoltaan välillä  $\pm 100$  mGal, harvemmin esimerkiksi vuoristoissa  $\pm 200$  mGal. Suomessa vaihteluväli on  $\pm 60$  mGal. Painovoima-anomaliat ja niiden vaihtelut paikasta toiseen kuvaavat Maan sisäisen massajakauman epäsäännöllisyyksiä ja ovat siksi geofysikaalisesti ja geologisesti kiinnostavia.

Kuriositeettina mainittakoon, että hollantilainen tutkija Felix A. Vening Meinesz<sup>8</sup> löysi, Jaavan saaren eteläpuolelta, Jaavan (nykyisin Sundan) syvänmeren haudan kohdalta suuren painovoimavajeen. Nykyisin tiedetään, että syvänmeren haudat ovat maanpinnalla paikkoja, joissa laattatektoniikan osana merellinen maankuori ”sukeltaa” Maan vaippaan geologiseen uusiokäyttöön: *alityöntö*, katso kuva 18.7.



## 16.4 Gravimetrinen geoidi

Yllä olevasta yhtälöstä 16.2 määritelmän 16.3 kanssa saadaan

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\gamma} T = -\partial_h T + \frac{\partial_h \gamma}{\gamma} T, \quad (16.4)$$

jota kutsutaan *fysikaalisen geodesian perusyhtälöksi* (engl. *fundamental equation of physical geodesy*), Heiskanen ja Moritz (1967) yhtälö 2-148. Siis:

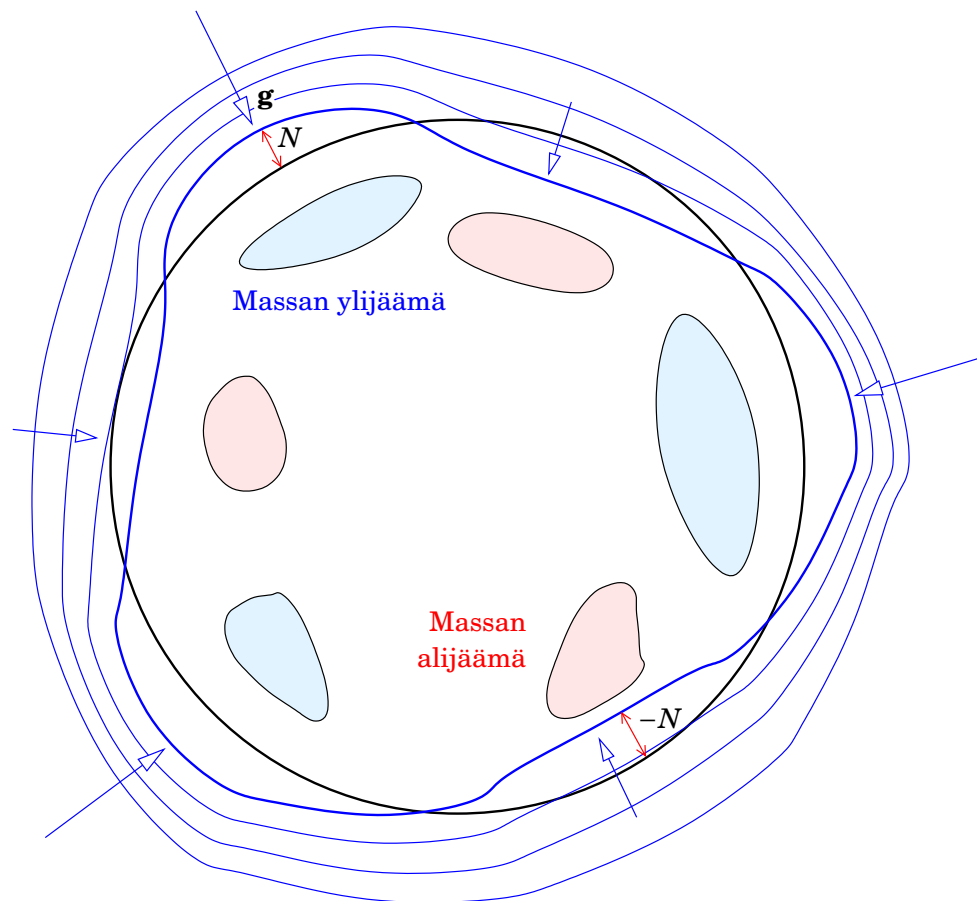
*Painovoima-anomalia  $\Delta g$  on häiriöpotentiaalin  $T$  ja sen pystysuuntaisen paikkaderivaatan  $\partial_h T$  lineaariyhdistelmä.*

Suure  $\partial_h \gamma \approx -0,3 \text{ mGal/m}$  on jo aiemmin mainittu *normaalipainovoiman pystygradientti*.

*Geoidi*, Maan painovoimakentän tasapotentiaalipinta, joka kuvaa koko kentän muotoa (”Maan matemaattista muotoa”, Gauss), voidaan määrittää gravimetrisin keinoin. Lähtökohtana on silloin fysikaalisen geodesian perusyhtälö 16.4. Oletetaan, että Maa on pallo. Silloin

$$\gamma = \frac{GM}{R^2}$$

<sup>8</sup>Felix Andries Vening Meinesz (1887–1966) oli alankomaalainen geofyysikko, geodeetti ja painovoimamittauksen tutkija. Hän laati yhdessä W. A. Heiskasen kanssa oppikirjan *The Earth and its Gravity Field* (1958).



KUVA 16.9. Maan painovoiman ja geoidin korkeuden vaihtelujen välinen yhteys.

ja differentioimalla

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -2 \frac{GM}{R^3},$$

josta seuraa

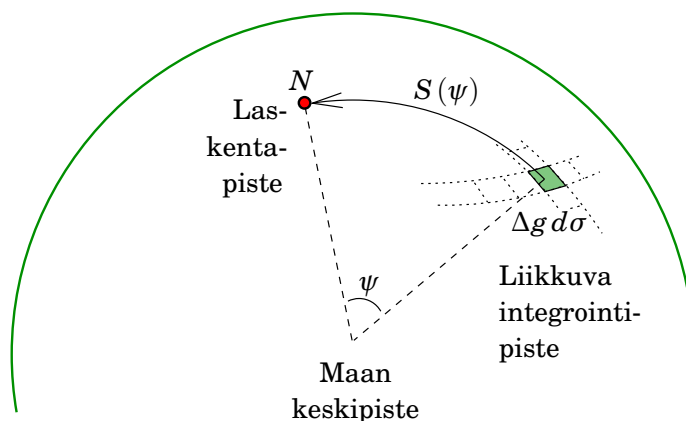
$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{2}{R}T,$$

yhtälö joka pätee pallon muotoisen Maan pinnalla.

Intuitiivisesti on selvää, että Maan pinnan painovoiman vaihteluiden ja geopotentialin vaihteluiden välillä on olemassa jonkinlainen yhteys. Molemmathan ovat seurausta Maan sisällä olevien massojen epätasaisesta jakaumasta. Kuten kuva 16.9 näyttää, Maan sisällä olevat ylimääräiset massat aiheuttavat sekä painovoiman ylijäämän (geopotentialin eri tasopinnat ovat lähempänä toisiaan) että geoidin nousemisen vertausellipsoidin pinnan yläpuolelle. Toisaalta Maan sisäisistä massavajeista seuraa sekä painovoiman alijäämä että geoidin painuminen ellipsoidin alapuolelle.

Kuitenkaan yhteys painovoima-anomalioiden  $\Delta g$  ja geoidin korkeuk-





KUVA 16.10. Stokesin integraaliyhtälön geometria.

sien  $N$  välillä ei ole yksinkertainen. Suureet yhdistää integraaliyhtälö, *Stokesin yhtälö*. George Gabriel Stokes<sup>9</sup> johti vuonna 1849 seuraavan klassisen integraaliyhtälön<sup>10</sup>:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint S(\psi) \Delta g d\sigma. \quad (16.5)$$

Yhtälön avulla voidaan laskea geoidin korkeuksia globaalista painovoima-anomaliakentästä. Yhtälössä  $R$  on maapallon säde,  $\gamma$  on Maan pinnan keskimääräinen painovoimakiihtyvyys ja  $S(\psi)$  on *Stokesin funktio* eli Stokesin ydin. Se riippuu vain geoidin korkeuden  $N$  laskentapisteen ja anomalian  $\Delta g$  mittauspisteen välisestä geosentrisestä kulmaetäisyydestä  $\psi$  Maan keskipisteestä katsottuna:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right).$$

Tutkitaan yhtälöä 16.5 lähemmin. Suure  $d\sigma$  on yksikkösäteisen pallon pinta-alkio eli *avaruuskulma-alkio*, pallokoordinaateissa  $d\sigma = \cos \phi d\phi d\lambda$ .

Kirjoitetaan yhtälö auki seuraavalla tavalla:

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} S(\psi(\phi, \lambda, \phi', \lambda')) \Delta g(\phi', \lambda') \cos \phi' d\phi' d\lambda'.$$

<sup>9</sup>George Gabriel Stokes (1819–1903) oli etevä englantilainen matemaatikko, fyysikko ja geofyysikko.

<sup>10</sup>Yhtälön johtaminen on vaikeaa ja käyttää fysikaalisen geodesian perusyhtälöä 16.4 *reunaehtona* Laplacen kenttäyhtälön ratkaisemisessa maapallon ulkopuolisessa avaruudessa. Katso Heiskanen ja Moritz (1967) luku 2.

Tässä  $(\phi, \lambda)$  ovat laskentapisteen koordinaatit, tarkasti ottaen sen *geosentrisen* leveys- ja pituusaste. Tässä pisteessä lasketaan geoidin korkeus  $N$ . Koordinaatit  $(\phi', \lambda')$  taas ovat integrointipisteen leveys- ja pituusaste. Tässä pisteessä painovoima-anomalia  $\Delta g$  on annettu. Piste liikkuu kaksoisintegraalin laskemisen myötä koko maapallon pinnan yli. Kulma  $\psi$  on kahden pisteen välinen kulmaetäisyys nähtynä maapallon keskipisteestä<sup>11</sup>.

Tästä nähdään, että yhdenkin  $N$ -arvon laskemiseksi tarvitaan *kaikialta Maan pinnalta*  $\Delta g$ -arvoja, jotta yllä oleva integraali saadaan evaluoitua kokonaan. Jaetaan maapallon pinta  $1^\circ \times 1^\circ$  -kokoisiin soluihin eli *blokkeihin* — yhteensä  $360 \times 180 = 64\,800$  kappaletta — ja lasketaan integraalin arvo numeerisesti summana

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \left( \frac{\pi}{180} \right)^2 \sum_{i=1}^{360} \sum_{j=-89}^{+90} S(\psi(\phi, \lambda, \phi', \lambda')) \Delta g(\phi', \lambda') \cos \phi', \quad (16.6)$$

jossa  $\lambda' = i^\circ - 0^\circ,5$  ja  $\phi' = j^\circ - 0^\circ,5$ . Koko Maan pinnan yli on laskettavana  $360 \times 180 = 64\,800$  eri  $N$ -arvoa, jos geoidimallin haluttu erotuskyky on myös  $1^\circ \times 1^\circ$ .

Näin ymmärretään, miksi tiivis kansainvälinen yhteistyö on niin olennaista Maan painovoimakentän tutkimuksessa!

Käytännössä suurin vaikutus geoidin laskettuun korkeuteen on *päikkäisillä* painovoima-anomaliaoilla, anomalia-arvot laskentapisteen välittömässä läheisyydessä. Funktio  $S(\psi)$  pienille kulman  $\psi$  arvoille on likimain

$$S(\psi) \approx \frac{2}{\psi}.$$

Kaukaisemmat alueet vaikuttavat nekin, mutta niiden huomioon ottamiseksi riittää satelliittigeodesian tuottama suurpiirteisempi *globaali geopotentialimalli*.

Maailmanlaajuisesti geoidi poikkeaa vertausellipsoidista noin  $\pm 100$  m. Maailmanlaajuinen keskimerenpinta puolestaan seuraa geoidia, koska se on tasapotentialiaali- eli tasapainopinta. Keskimerenpinta poikkeaa

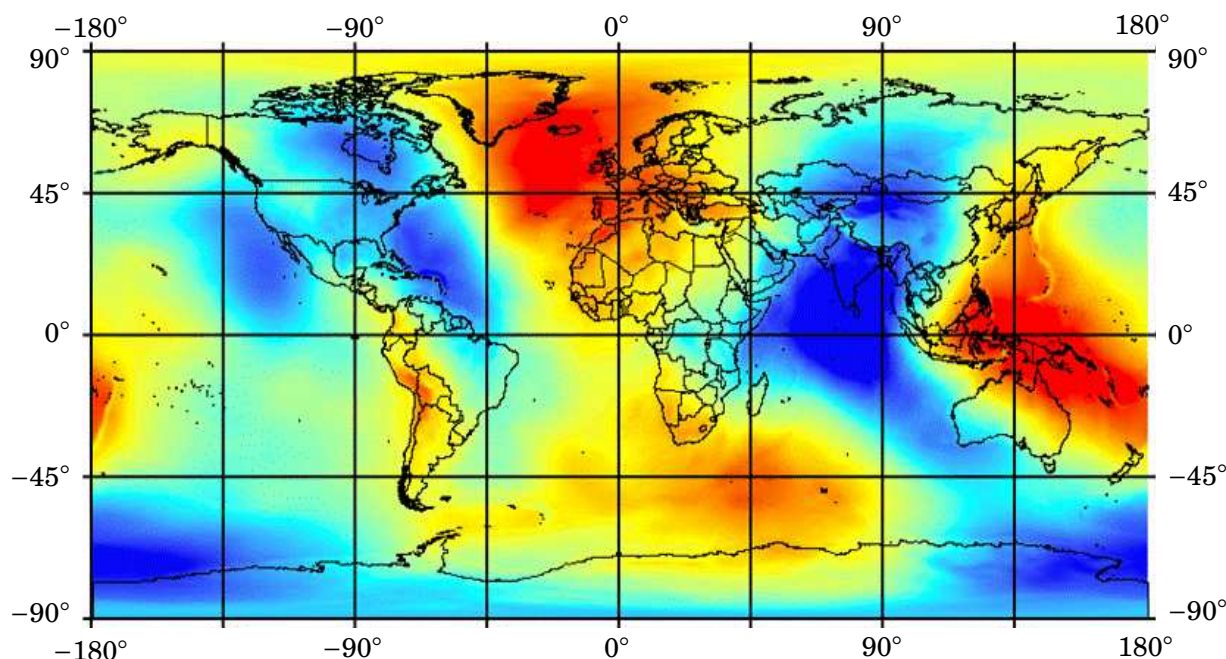
<sup>11</sup>Kulmaetäisyyden laskentayhtälö on

$$\cos \psi = \sin \phi \sin \phi' + \cos \phi \cos \phi' \cos(\lambda' - \lambda),$$

tai tarkemmin pienille kulmille  $\psi$ , puolikulmakaava 3.9:

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{\phi' - \phi}{2} + \cos \phi \cos \phi' \sin^2 \frac{\lambda' - \lambda}{2}.$$





KUVA 16.11. Maailman geoidimalli EGM2008. Geoidin korkeudet laskettuina GRS80-vertausellipsoidista ovat välillä  $-107\text{ m}$  (sininen) ja  $+86\text{ m}$  (punainen). © 2013 US National Geospatial-Intelligence Agency.

geoidista korkeintaan  $\pm 2\text{ m}$ . Poikkeaman pysyvää osaa kutsutaan *meritopografiaksi*, katso osio 1.6. Tämän lisäksi on olemassa ajassa vaihtelevia poikkeamia, kuten vuorovesi-ilmiö sekä tuulten ja ilmanpaineen vaihtelujen aiheuttamat poikkeamat.

## 16.5 Painovoimakenttä ja korkeudet

### 16.5.1 Geopotentialiaali ja gradientti

Kuvassa 16.3 nähdään, miten maaston muodot voidaan kuvata kartalla korkeuskäyrillä.

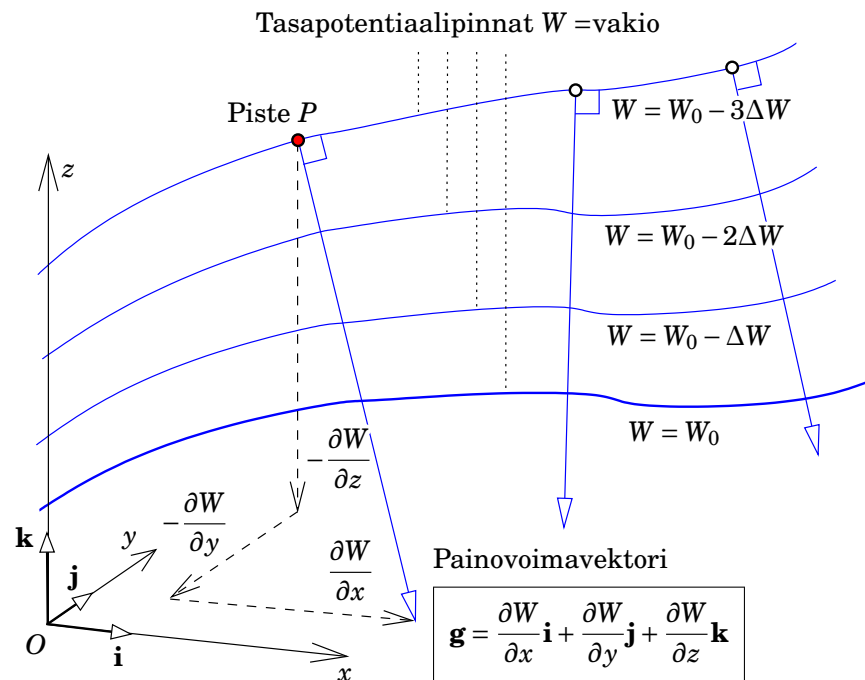
Kaiken luonnollisin korkeuden mitta, *geopotentialiaali*, ei ole metrinen suure. Se on *energian* mitta, joka kuvaa koekappaleen eli yksikkömassan potentiaalienergian tasoa Maan painovoimakentän sisällä. Siksi se on geofysikaalisesti järkevä suure.

Geopotentialiaali liittyy painovoimaan sillä tavalla, että painovoimavektori  $\mathbf{g}$  on geopotentialin  $W$  paikan derivaatta eli *gradientti*, katso kuva 16.12:

$$\mathbf{g} = \nabla W = \text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (16.7)$$

jossa  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  ovat  $(x, y, z)$ -koordinaatiston akseleiden suuntaiset yksik-





KUVA 16.12. Painovoimavektori on geopotentialin *gradientti* eli derivaatta kolmen paikkakoordinaatin mukaan.

kövektorit, jotka muodostavat *ortonormaal*in kannan.

Tästä syystä paikallinen painovoimavektori on

- aina *kohtisuora* tasapotentialipintoja (myös merenpintaa!) kohtaan
- sitä pidempi, mitä lähempänä toisiaan eri tasapotentialipinnat ovat.

Painovoimakenttä on *konservatiivinen* kenttä. Tämä merkitsee, että kun koemassa kuljetetaan suljetun polun ympäri, ei tehdä työtä. Konservatiivisessa voimakentässä voidaan voimavektori kirjoittaa aina potentiaalin gradienttina kuvassa 16.12 esitetyllä tavalla.

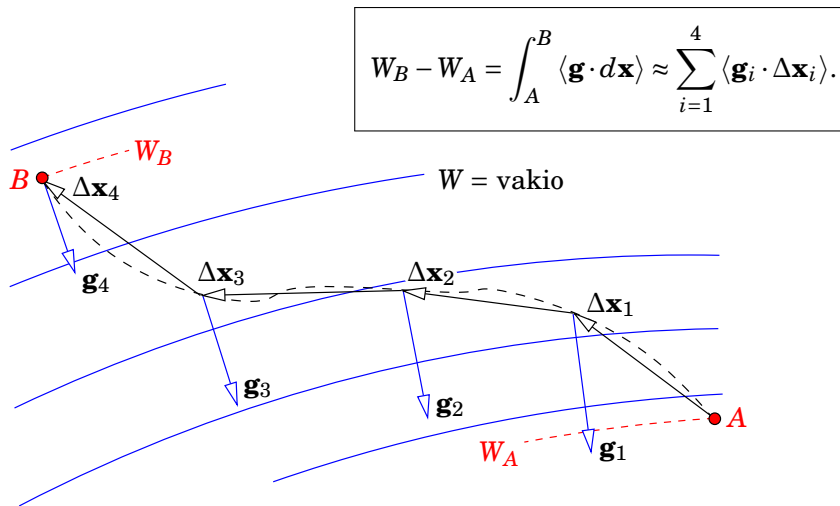
Potentiaaliero pisteiden  $A$  ja  $B$  välillä on nyt sama kuin yksikkömassan tekemä työ siirtyessä pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$ , ja seuraava integraali pätee ( $s$  on matka polkua  $AB$  pitkin):

$$\begin{aligned} W_B - W_A &= \int_A^B dW = \int_A^B \frac{dW}{ds} ds = \int_A^B \left( \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \right) = \\ &= \int_A^B \langle \text{grad } W \cdot d\mathbf{x} \rangle = \int_A^B \langle \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \rangle. \quad (16.8) \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että työ on painovoimavektorin  $\mathbf{g}$  ja polun suuntaisen matkavektorialkion  $d\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$  skalaaritulo.







KUVA 16.13. Työn polkuintegraali.

Käytännössä käytetään usein itse geopotentialin  $W$  sijasta sen eroa  $C \stackrel{\text{def}}{=} -(W - W_0)$  keskimerenpinnan (tai muun sopivan vertauspinnan) geopotentialista  $W_0$ . Tätä potentiaaliero, joka kasvaa ylöspäin, kutsutaan *geopotentialiluvuksi*<sup>12</sup>, ja yllä olevasta integraaliyhtälöstä tulee

$$C_B - C_A = - \int_A^B \langle \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \rangle.$$

Suljetun polun tapauksessa pätee

$$\oint \langle \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \rangle = 0.$$

Geopotentialilukuja lasketaan maan yli ulottuvan *vaaituksen* mittaustuloksista. Kaikki maastopisteiden metriset korkeudet, kuten ortometrinen korkeus, lasketaan pisteiden geopotentialiluvuista.



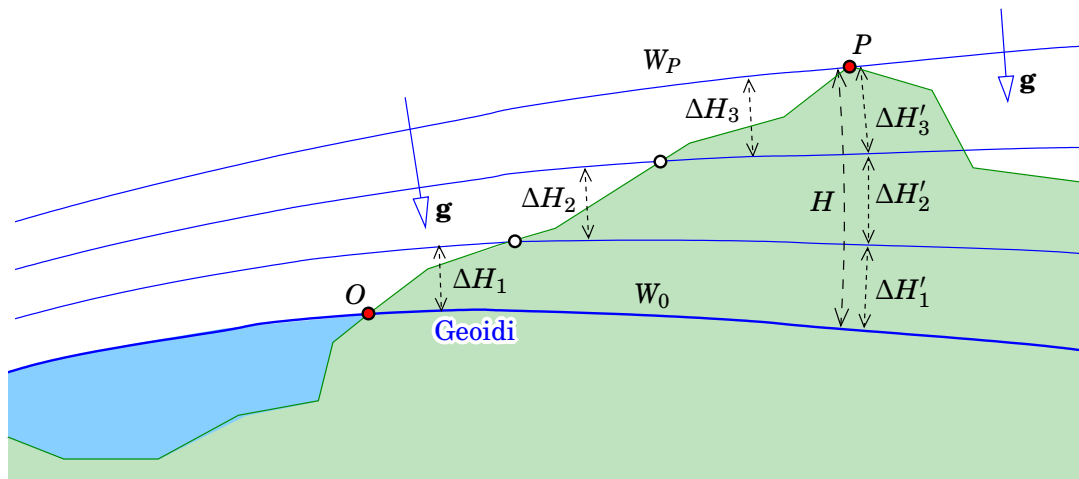
### 16.5.2 Geopotentialiyksikkö, GPU

Kuten osiossa 16.1 nähtiin, on painovoiman SI-yksikkö  $\text{m/s}^2$ . Geopotentialin mittayksikkönä käytetään taas *geopotentialiyksikköä* (GPU, *GeoPotential Unit*). Geopotentialin SI-yksikkö on  $\text{m}^2/\text{s}^2$ : matka  $\times$  voima/massa = matka  $\times$  kiihtyvyys, yksikkönä  $\text{m} \times \text{m/s}^2$ . Maan painovoimakentässä Maan pinnan lähellä, jossa painovoiman kiihtyvyys on  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ , vastaa yhden metrin korkeusero noin  $9,8 \text{ m}^2/\text{s}^2$  potentiaaliero.

Määritellään

$$1 \text{ GPU} \stackrel{\text{def}}{=} 10 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

<sup>12</sup>Saksaksi *geopotentielle* *Koten*, ranskaksi *cotes géopotentielles*.



KUVA 16.14. Korkeudet ja tasapotentiaalipinnat. Mitä suurempi (vahvempi) on painovoima  $g$  — aina kohtisuora tasapotentiaalipintoja kohtaan — sitä lähempänä toisiaan ovat tasapotentiaalipinnat.



niin yhden metrin korkeusero vastaa noin 0,98 GPU potentiaaliero, ja vastaavasti, 1 GPU potentiaaliero vastaa noin 1,02 m korkeuseroa.

Näin voidaan, kiitos siitä että  $g$  sattuu olemaan noin  $10 \text{ m/s}^2$ , ilmaista geopotentiaalierot yksikössä, joka on hieman intuitiivisempi kuin vastaava SI-yksikkö!



### 16.5.3 Ortometrisia korkeuksia

Ortometriset korkeudet  $H$  ovat jo tuttuja. Tutkitaan niitä siis lähemmin.

Kuvassa 16.14 pisteen  $P$  ortometrinen korkeus on  $H$ . Tässä yksinkertaisessa esimerkissä se on kolmen korkeuseron summa:

$$H = \Delta H'_1 + \Delta H'_2 + \Delta H'_3, \quad (16.9)$$

jossa  $\Delta H'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ovat tasapotentiaalipintojen väliset etäisyydet pisteen luotiviivalla.

Kuitenkin vaaitus antaa korkeuserot  $\Delta H_1$ ,  $\Delta H_2$  ja  $\Delta H_3$  maastossa, maanpinnalla pisteen ja rannikon välillä. Tässä tapauksessa on suoritettu vaaitus rannikkopisteestä  $O$ , jonka korkeus oletetaan nolaksi. Nyt

$$H \neq \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3!$$

*Vaaituksesta saatuja korkeuseroja ei saa noin vain summata yhteen pisteen korkeuden saamiseksi.*

Tästä opimme sen, että korkeus, vaikkakin metrinen suure, ei ole kovin kauniisti käyttäytyvä suure.

Siksi tieteellisessä työssä käytetään metrysten korkeuksien sijasta jo esitettyjä *geopotentialilukuja*  $C = -(W - W_0)$ .

Voidaan yksinkertaisesti kirjoittaa (huomaa, että yksikötkin täsmävät):

$$\frac{\Delta C}{[\text{m}^2/\text{s}^2]} = \frac{g}{[\text{m}/\text{s}^2]} \cdot \frac{\Delta H}{[\text{m}]}$$

jossa  $\Delta C$  on (kahden mielivaltaisen pisteen) *geopotentialiero*, työ joka on tehtävä yhden yksikkömassan kuljettamiseksi pisteiden välisen korkeuseron  $\Delta H$  yli.

Jos pisteessä  $O$  pätee  $W = W_0$ , seuraa, että  $C_O = 0$ . Silloin kuvan 16.14 pisteen  $P$  geopotentialiluku on

$$C = \Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta C_3 = g_1 \Delta H_1 + g_2 \Delta H_2 + g_3 \Delta H_3, \quad (16.10)$$

mikä on *laskettavissa*, jos vaaituslinjaa pitkin on mitattu myös paikallinen painovoima  $g$ .

Kuitenkin pätee myös<sup>13</sup>

13

$$C = g'_1 \Delta H'_1 + g'_2 \Delta H'_2 + g'_3 \Delta H'_3,$$

jossa  $g'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ovat painovoima-arvoja *kallion sisällä* pisteen  $P$  luotiviivalla.

Määritetään *luotiviivan keskipainovoima* seuraavalla yhtälöllä<sup>14</sup>:

14

$$\bar{g} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g'_1 \Delta H'_1 + g'_2 \Delta H'_2 + g'_3 \Delta H'_3}{\Delta H'_1 + \Delta H'_2 + \Delta H'_3} = \frac{C}{H}.$$

Seuraa, että

$$C = \bar{g}H \iff H = \frac{C}{\bar{g}},$$

<sup>13</sup>Yleisessä tapauksessa yhtälö on

$$C = \int_0^H g(z) dz,$$

jossa  $z$  on kaaren pituus luotiviivaa pitkin mitattuna.

<sup>14</sup>Yleinen yhtälö on

$$\bar{g} = \frac{C}{H} = \frac{1}{H} \int_0^H g(z) dz.$$



klassinen ortometrisen korkeuden määritelmä. Yhtälö kertoo, että työn määrä, joka tarvitaan yksikkömassan siirtämiseksi geoidista pisteeseen  $P$ , on voima  $\times$  matka:

$$C = \overset{\text{työ}}{\overline{g}} \cdot \overset{\text{voima}}{\overline{g}} \cdot \overset{\text{matka}}{H}.$$

Ongelmaksi tässä jää arvon  $\overline{g}$ , painovoiman keskiarvon luotiviivaa pitkin, määrittäminen. Arvojen  $g'_i$  mittaaminen maankuoren sisällä on tavallisesti mahdotonta. . . . Siksi määrittäminen lähtee käytännössä maanpinnalla mitatusta arvosta  $g_P$ , *olettamalla*, että painovoima kasvaa alaspäin maankuoren sisällä tietyn kaavan mukaisesti<sup>15</sup>. Näin saadaan ortometrisen korkeuden likiarvo, jonka tarkkuus ainakin Suomen alueella on täysin riittävä.

Ortometrinen korkeus on vain yksi tapa rakentaa metrinen korkeusjärjestelmä. Muitakin tapoja on olemassa, kuten normaalikorkeus ja dynaaminen korkeus. Kaikki ovat korkeuksia ”merenpinnan yläpuolella”, mutta määrittely- ja laskentatavat ovat hieman erilaisia. Ja kaikilla kolmella on omat hyöty- ja haittapuolensa.

Ortometriset korkeudet eivät ole ongelmattomia. Kuvan 4.2 tunneliverkostoa ei ole olemassa, ja painovoiman mittaus kallion sisällä — paikallista luotiviivaa pitkin — ei ole tavallisesti mahdollista. Käytännössä ortometriset korkeudet määritetään *vaaituksen* avulla rannikolta lähtien, maanpintaa pitkin. Jos vaaituksesta halutaan laskea tarkkoja ortometrisia korkeuksia, tarvitaan valitettavasti yksityiskohtaisia tietoja

- kallion tiheydestä korkeuspisteen alapuolella
- maaston muodoista korkeuspisteen ympärillä: *maastomalli*.

Siis vaikka ortometriset korkeudet ovat fysikaalisesti elegantteja, voi niiden tarkka määrittäminen olla käytännössä hankalaa. Tieteellisesti sanotaan, että ortometriset korkeudet eivät ole *hypoteesivapaita*. Vaadittavat hypoteesit ovat juuri maankuoren tiheys ja maaston paikalliset muodot. Käytännön laskuissa jätetään usein maaston vaikutus pois ja käytetään tiheysarvoja geologiselta kartalta. Näin tehty virhe on yleensä pieni.



#### 16.5.4 Normaalikorkeuksia

Normaalikorkeudet  $H^*$  ovat, yksinkertaisesti sanottuna, ortometriset korkeudet laskettuina geopotentialiluvuista  $C$  *niin kuin* Maan todellinen painovoimakenttä *olisi* säännöllinen pyörähdysellipsoidin matemaattinen mallikenttä eli *normaalipainovoimakenttä*. Siksi ei vaadita

<sup>15</sup>Esimerkiksi Poincaré-Prey-reduktio, katso Heiskanen ja Moritz (1967) osio 4-2.

todelliseen, monimutkaiseen painovoimakenttään liittyviä tietoja. Normaalikorkeudet lasketaan helposti ja tarkasti ilman mitään tietoa paikallisesta kallion tiheydestä tai maastomallia.

Normaalikorkeuden yhtälö on

$$H^* = \frac{C}{\bar{\gamma}},$$

jossa  $\bar{\gamma}$  on *normaalipainovoiman* keskiarvo laskettuna pisteen luotiviivaa pitkin<sup>16</sup>.

16

Toisin kuin ortometrisillä korkeuksilla, normaalikorkeuksilla ei ole suoraa fysikaalista tulkintaa.

Suurimmalla osalla Suomen aluetta erot ortometristen korkeuksien ja normaalikorkeuksien välillä ovat millimetrien luokkaa. Maailman vuoristoissa ne voivat olla useita desimetrejä.

Monessa maassa — muun muassa Venäjällä, Ruotsissa ja nykyisin myös Suomessa — käytetään normaalikorkeuksia ortometristen korkeuksien sijasta. Niiden tarkka laskenta on helpompaa. Kun ortometriset korkeudet tulkitaan korkeuksiksi geoidista, normaalikorkeudet lasketaan vastaavanlaisesta pinnasta nimeltä *kvasi-geoidi*. Merialueilla tämä pinta yhtyy geoidiin ja siis myös keskimerenpintaan, mutta mannerten, ja varsinkin vuoristojen, kohdalla se eroaa geoidista. Aiemmin esitetty vertauskuva tunneliverkostosta eli meriveden päästämisestä mannerten alle ei ole toimiva kvasi-geoidille.



### 16.5.5 Dynaamisia korkeuksia

Dynaamisia korkeuksia käytetään harvoin. Ne lasketaan yksinkertaisesti jakamalla geopotentiaalilukua  $C$  leveysasteen  $45^\circ$  nollakorkeuden normaalipainovoimalla  $\gamma_{45}$ , joka on vakio:

$$H^{\text{dyn}} = \frac{C}{\gamma_{45}}.$$



### 16.5.6 Eri korkeustyyppien ominaisuudet

Kaikilla korkeustyypeillä yhteistä on se, että metrinen korkeus saadaan *jakamalla* geopotentiaaliluku jollakin sopivalla *painovoima-arvolla*: geopotentiaalilukujen SI-yksikkö on  $\text{m}^2/\text{s}^2$ , painovoiman kiihtyvyyden yksikkö  $\text{m}/\text{s}^2$  ja metrisen korkeuden yksikkö on todella  $(\text{m}^2/\text{s}^2)/(\text{m}/\text{s}^2) = \text{m}$ , kuten pitääkin.

<sup>16</sup>Keskiarvo lasketaan nyt normaalikorkeuksien välin  $(0, H^*)$  yli.



TAULUKKO 16.2. Eri korkeustyyppien ominaisuudet.

Korkeustyyppi	Oikeellisuus		Hypoteesi- vapaus	Yhtälö
	Metrinen	Energeettinen		
Geopotentialiluku	--	+	+	$C$
Ortometrinen	+	–	–	$H = C/\bar{g}$
Normaali	–	–	+	$H^* = C/\bar{\gamma}$
Dynaaminen	--	+	+	$H^{\text{dyn}} = C/\gamma_{45}$

Korkeustyyppistä riippumatta kaikki metriset korkeudet lasketaan pisteen energiatasosta, jo mainitusta *geopotentialiluvusta*  $C$ . Ainoat ”korkeudet”, jotka saadaan mitattua ja laskettua tarkasti, ovat geopotentialilukuja  $C = -(W - W_0)$ . Kaikki muut korkeudet ovat *johdannaisuuksia*. Niiden laskemisessa menetetään, tarkkuuden lisäksi, aina joitakin hyödyllisiä ominaisuuksia, samalla tavalla kuin kaarevan pinnan projektiossa tasoon.

Korkeusarvojen käyttäjä toivoo käytännön korkeuksilta monia hyviä ominaisuuksia, jotka ovat tuttuja geometrisista korkeuksista pienen alueen sisällä:

**Metrinen oikeellisuus** Metrinen oikeellisuus merkitsee, että jos on kaksi pistettä  $P$  ja  $Q$  suoraan toinen toisensa yläpuolella ja niiden välinen etäisyys on 1 m, niin myös  $H_P - H_Q$  on tarkasti 1 m. Vain *ortometrisillä korkeuksilla* on tämä ominaisuus. Dynaamisten korkeuksien metrinen oikeellisuus on varsin heikko.

Metrinen oikeellisuus on sitä parempaa, mitä lähempänä *todellista* keskimääräistä painovoimaa luotiviivaa pitkin kaavan nimittäjässä oleva lauseke on.

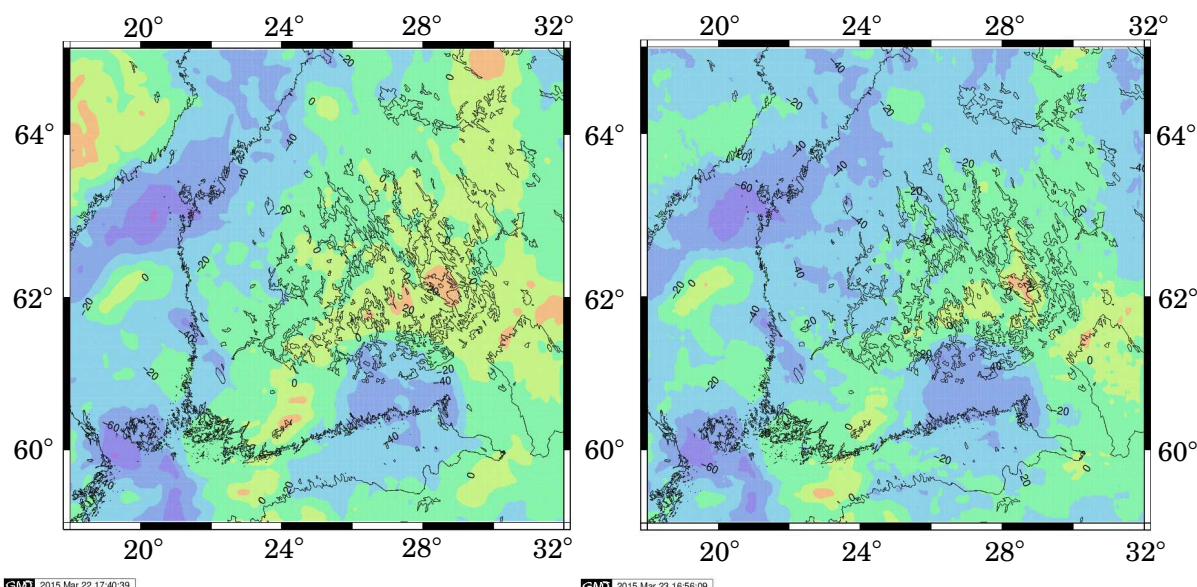
**Energeettinen oikeellisuus** Tämä merkitsee, että vesi virtaa aina ”alaspäin” kyseessä olevassa korkeustyyppissä. Kolmesta mainitusta tyyppistä vain *dynaamiset korkeudet* ovat energeettisesti oikeellisia, koska ne ovat suoraan verrannollisia geopotentialilukuihin  $C$ .

### Tarkka laskettavuus, riippuvuus epävarmoista hypoteeseista

Normaalikorkeudet ja dynaamiset korkeudet ovat teorian perusteella tarkasti laskettavissa. On kuitenkin ilmoitettava *mikä* normaalikenttä eli vertausellipsoidi on valittu laskennoissa.

Ortometriset korkeudet edellyttävät sekä todellisen painovoimakentän että topografian muodon ja tiheyden tuntemusta. Etenkin





KUVA 16.15. Ilma- ja Bouguer-anomaliat Etelä-Suomessa laskettuna [EGM2008](#)-geopotentialimallista. Data © Bureau Gravimétrique International (BGI) / International Association of Geodesy.

oletettu topografian tiheys on epävarma hypoteesi. Käytännössä näiden tekijöiden aiheuttama epävarmuus on melko pieni.

## 16.6 Bouguer-anomaliat

Aiemmin huomautettiin, että ilma-anomaliat — yhtälö 16.3 — kertovat jotain Maan sisäisestä massajakaumasta. Kuitenkin pisteen ilma-anomaliassa  $\Delta g$  vaikuttaa myös koko pisteen alla ja ympärillä oleva topografia. Topografian muodot merenpinnan yläpuolella ovat näkyvissä ja yleensä hyvin tunnettuja. Siksi tuntuu loogiselta *poistaa laskennallisesti* ilma-anomaliaista maastonmuotojen vaikutus, jotta jäisi suure, joka kertoo ainoastaan jotain Maan massajakaumasta merenpinnan tason alapuolella.

Näin syntyy *Bouguer-anomalia*:

$$\Delta g_B = \Delta g_{FA} - g_{top},$$

jossa  $\Delta g_{FA} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta g$  on ilma-anomalia,  $\Delta g_B$  Bouguer-anomalia ja  $g_{top}$  topografian aiheuttama, pisteessä toimiva pystysuuntainen vetovoima.

Bouguer-anomaliaita voidaan laskea tarkasti tai likimääräisesti. Ensimmäisessä tapauksessa käytetään topografian numeerista mallia eli *digitaalista maastomallia* (DTM, *digital terrain model*). Voidaan käyttää





myös maankuoren tiheysmallia, jos sellainen on saatavilla. Karkeassa laskennassa otetaan huomioon vain *Bouguer-laatan* vaikutus yksinkertaisena suljettuna kaavana:

$$g_{\text{top}} = 2\pi G\rho d,$$

jossa

$g_{\text{top}}$  laatan vetovoima, vain pystysuunnassa

$G$  Newtonin universaalinen gravitaatiovakio, katso osio 1.2

$\rho$  laatan aineen tiheys

$d$  laatan paksuus. Oletettu paksuus on paikallisen maaston korkeus \_\_\_\_\_  $H$ .

Laatan oletetaan olevan litteä ja ulottuvan äärettömyyteen kaikkiin suuntiin.

Jos tiheys on  $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3 = 2670 \text{ kg/m}^3$ , saadaan

$$g_{\text{top}} = 0,1119d,$$

jossa  $d$  on metreinä ja  $g_{\text{top}}$  milligalleina. Milligal-yksikkö selostettiin luvun alussa.



## 16.7 Tähtitieteellinen paikanmääritys

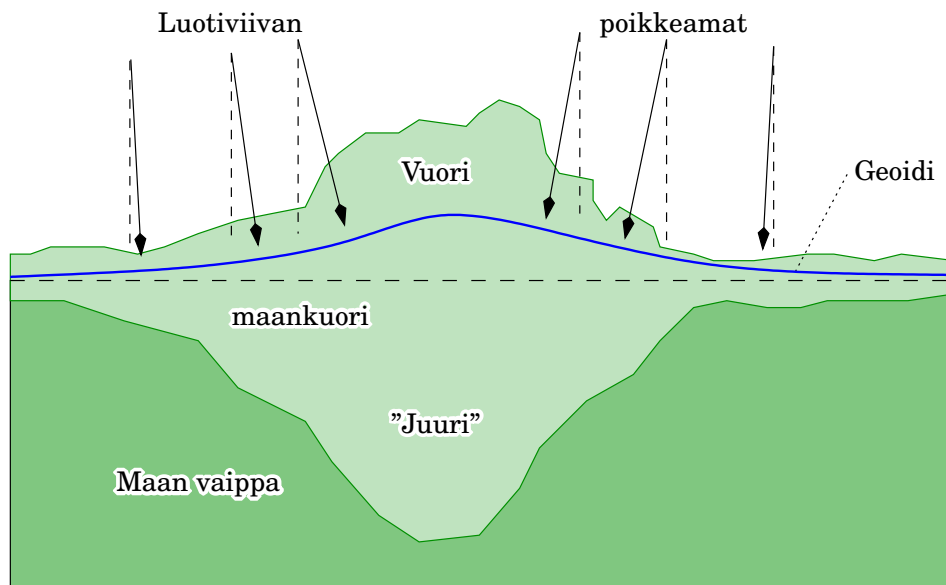
Paikallinen luotiviiva eli paikallisen painovoimavektorin suunta on kohtisuora tasapotentiaalipintoja kohtaan. Luotiviivan suunnan määrittäminen absoluuttisesti on ollut mahdollista jo perinteisillä tähtitieteen keinoilla.

Puhutaan *tähtitieteellisestä paikanmäärityksestä*, koska menetelmän ensimmäinen käytännön sovellus oli tuntemattoman paikan määrittäminen, erityisesti merellä. Myöhemmin menetelmää käytettiin luotiviivan suunnan geofysikaalisesti mielenkiintoisten vaihtelujen (luotiviivan poikkeamien) tutkimiseen maalla. Jo mainittu Pierre Bouguer huomasi Etelä-Amerikassa, kuten George Everest Intiassa, että vuoristojen lähistöllä luotiviiva taipuu vuoristoon päin, ja tulkitsi tämän oikein vuoriston massan oman gravitaation aiheuttamaksi.

Yritys arvioida vuoriston massan vaikutusta johti tulokseen, joka oli paljon suurempi kuin todellisuudessa havaitut luotiviivan poikkeamat. Syynä tähän tiedetään nykyisin olevan *isostaattinen kompensatio*: vuoriston alla on *juuri*, joka koostuu kevyemmästä kiviaineesta, jonka varassa vuoristo ”kelluu” plastisesti deformeituvan Maan vaipan päällä.







KUVA 16.16. Vuoriston juuri ja sen vaikutus luotiviivaan.

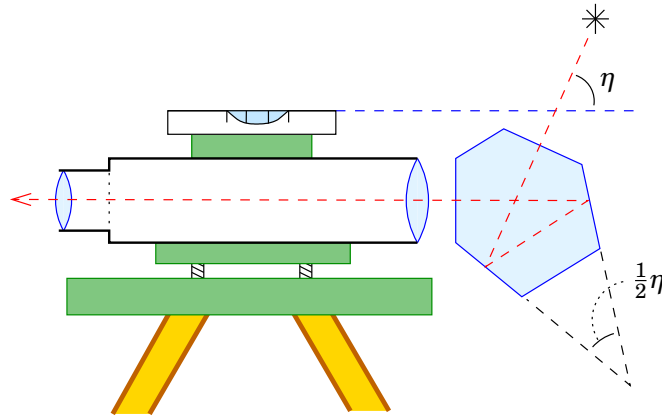
Tähtitieteellisessä paikanmäärityksessä käytetään erilaisia laitteita, kuten *ohikulkukone*, *astrolabi* ja *zeniittiputki*.

Astrolabin optinen akseli osoittaa aina vakiikulman verran ylöspäin. Zeniittiputken optinen akseli taas osoittaa aina suoraan ylöspäin, zeniitiin, korkeuskulmaan  $\eta = 90^\circ$ . Siksi havaitsemalla zeniitin läpi kulkevia tähtiä, joiden deklinaatio  $\delta$  tunnetaan, saadaan paikan tähtitieteellinen leveysaste  $\Phi$  seuraavasti:  $\Phi = \delta$ . Samalla mitataan meridiaanin läpikulun aika, josta saadaan tähtitieteellinen pituusaste  $\Lambda$  — zeniitin suuntaan on meridiaanitasossa. Zeniittiputki on tavallaan sekä ohikulkukoneen että astrolabin erikoistapaus.

Havaintoja varten laaditaan *tähtiohjelma*, lista tähdistä, jotka tulevat kulkemaan meridiaanin, tietyn korkeuskulmapiirin<sup>17</sup>, tai zeniitin läpi. Astrolabin tapauksessa on huolehdittava siitä, että tähdet ovat jakautuneet tasaisesti koko horisontin ympäri. Näin saavutetaan tarkka sekä leveysasteen  $\Phi$  että pituusasteen  $\Lambda$  määrittäminen ja minimoidaan ilmakehän refraktion vaikutus.

Astrolabi voidaan rakentaa helposti vaaituskojeesta lisäämällä kuudenkymmenen asteen kulmaprisma objektiivin eteen, katso kuva 16.17. Tarkimmat (Danjonin) astrolabit käyttävät elohopeapeiliä yhdessä kuudenkymmenen asteen prisman kanssa.

<sup>17</sup>Arabiksi *almucantar*.



KUVA 16.17. Astrolabiksi muunneltu vaaituskoje.



## 16.8 Painovoimagradientin mitta

Olemme jo useaan otteeseen maininneet painovoiman *potentiaalia*, joka on painovoimakentässä olevan koekappaleen *potentiaalienergian* (paikkaan liittyvän energiasisällön) mitta. Painovoiman eli vapaan putoamisen kiihtyvysvektori on määritelty tämän geopotentiaalın  $W$  *gradientiksi*, sen muuttumisnopeudeksi paikan mukaan:

$$\mathbf{g} = \text{grad } W = \nabla W =$$

$$= g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k} = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k} = \partial_x W \mathbf{i} + \partial_y W \mathbf{j} + \partial_z W \mathbf{k},$$

jossa *grad-operaattori* on

$$\text{grad} \cdot = \nabla \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \cdot}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \cdot}{\partial z} \mathbf{k} = \partial_x(\cdot) \mathbf{i} + \partial_y(\cdot) \mathbf{j} + \partial_z(\cdot) \mathbf{k}.$$

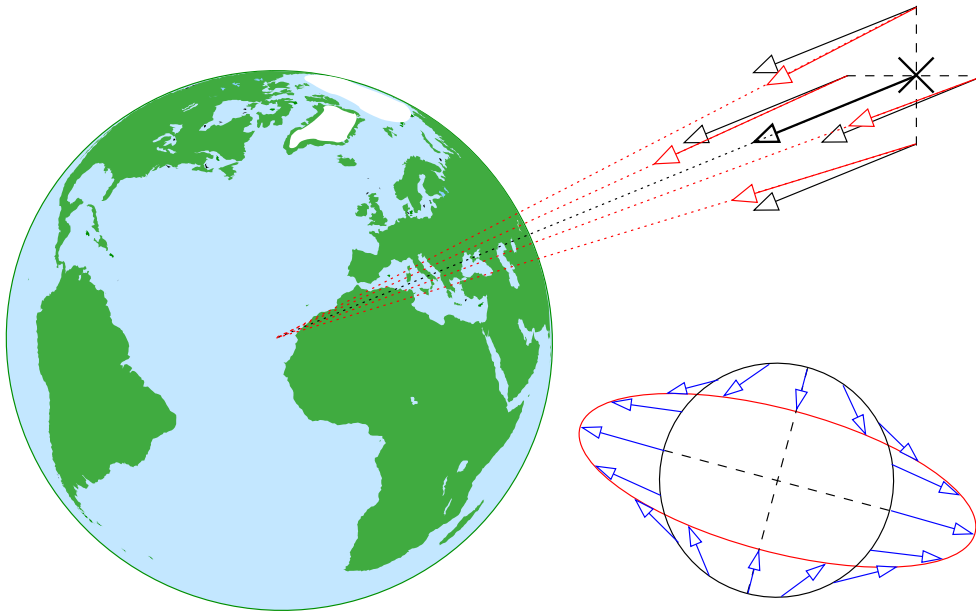
Tässä  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  on ortogonaalinen yksikkövektoreiden kolmikko eli *ortonormaali kanta* orientoituna akseleiden  $(x, y, z)$  suuntaiseksi.

Painovoiman kiihtyvysvektori on siis *geopotentiaalın gradientti*. Tämä vektorisuure vaihtelee paikan mukaan. Tiedämme, että painovoima kasvaa alaspäin mennessä, ainakin vapaassa ilmassa. Ylöspäin painovoima vähenee noin 0,3 mGal jokaista korkeusmetriä kohti.

Vektorina painovoima vaihtelee monimutkaisemmalla tavalla massojen lähistöllä, jos mittalaitteet ovat vaan riittävän tarkkoja. Puhutaan *painovoimagradienttitensorista* eli Eötvösın tensorista. Kirjoitetaan tensori sekä perinteisessä että kompaktimmassa Eulerin notaatiossa:

$$\mathcal{M}^{\text{def}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} \partial_{xx} & \partial_{xy} & \partial_{xz} \\ \partial_{yx} & \partial_{yy} & \partial_{yz} \\ \partial_{zx} & \partial_{zy} & \partial_{zz} \end{bmatrix} W.$$





KUVA 16.18. Gravitaation gradientti eli vuoroveden voimakenttä: gravitaation vaihtelu paikan mukaan. Alempi kaavio on gravitaatiogradientti-tensorin *kuvaajaellipsoidi*: se kuvaa voimakenttää vapaasti putoavan kappaleen sisällä, esimerkiksi satelliitissa.

Toposentrisessä koordinaatistossa, jossa  $x$  osoittaa pohjoiseen,  $y$  itään ja  $z$  ylöspäin, on tämän matriisin likimääräinen muoto

$$\mathcal{M} \approx \begin{bmatrix} -0,15 & & \\ & -0,15 & \\ & & 0,3 \end{bmatrix} \text{ mGal/m}, \quad (16.11)$$

jossa

$$\partial_{zz}W = \frac{\partial^2}{\partial z^2}W = \frac{\partial}{\partial z}g_z = 0,3 \text{ mGal/m}$$

on todella ”vapaan ilman” standardipainovoimagradientti eli normaali-painovoiman pystygradientti: jos kirjoitetaan Newtonin mukaisesti (huomaa, että vektorin  $\mathbf{g}$  suunta on alaspäin, kun  $z$ -koordinaatti kasvaa ylöspäin, siksi miinusmerkki):

$$g_z = -\frac{GM}{(R+z)^2},$$

saadaan derivoimalla

$$\frac{\partial}{\partial z}g_z = 2\frac{GM}{(R+z)^3}\frac{\partial(R+z)}{\partial z} = -\frac{2g_z}{(R+z)} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2/\text{m} = 0,3 \text{ mGal/m}.$$

Suureet  $\partial_{xx}W$  ja  $\partial_{yy}W$  taas kuvaavat tasapotentiaalipintojen kaarevuudet  $x$ - ja  $y$ -suunnassa seuraavalla geometrisesti intuitiivisella tavalla:

$$\partial_{xx}W = \frac{\partial^2}{\partial x^2}W = -\frac{g}{r_x}, \quad \partial_{yy}W = \frac{\partial^2}{\partial y^2}W = -\frac{g}{r_y},$$



jossa  $r_x$  ja  $r_y$  ovat  $x$ - ja  $y$ -suunnan *kaarevuussäteet*. Sijoittaminen  $r_x = r_y = R \approx 6378 \text{ km}$  (kokeile!) antaa

$$\partial_{xx}W = \partial_{yy}W = -1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2/\text{m} = -0,15 \text{ mGal/m}.$$

Jo mainittu unkarilainen tutkijaparoni Loránd Eötvös teki useita neuvokkaita kokeita (Eötvös, 1998) painovoimagradientti- eli Eötvösin tensorin komponenttien mittaamiseksi rakentamallaan *torsiovaaoilla*. Menetelmää käytetään edelleen geofysikaalisissa tutkimuksissa, koska painovoimagradientti on mittasuureena hyvin herkkä maankuoren paikallisille massatiheysvaihteluille.

Yleisessä tapauksessa evaluoidaan Eötvösin tensori suorittamalla osittaisderivoinnit. Tehdään näin keskisen voimakentän tapauksessa:

$$W = \frac{GM}{r},$$

jossa  $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  on etäisyys Maan massakeskipisteestä. Koordinaatit  $(X, Y, Z)$  ovat nyt geosentrisiä. Saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} \partial_X & \partial_Y & \partial_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial X} \\ \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \frac{\partial W}{\partial Z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \partial_X & \partial_Y & \partial_Z \end{bmatrix} \left( -\frac{GM}{r^3} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{GM}{r^5} \begin{bmatrix} 3X^2 - r^2 & 3XY & 3XZ \\ 3YX & 3Y^2 - r^2 & 3YZ \\ 3ZX & 3ZY & 3Z^2 - r^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Eötvösin tensori on painovoiman kiihtyvyyssvektorin

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^3} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

osittaisderivaattojen matriisi paikan suhteen, kuten näkyy yllä olevassa yhtälössä:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \partial_X & \partial_Y & \partial_Z \end{bmatrix} \left( -\frac{GM}{r^3} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \partial_X & \partial_Y & \partial_Z \end{bmatrix} \mathbf{g}.$$



Eötvösin kunniaksi painovoimagradientin yksikkönä käytetään eötvös, symboli E:

$$1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ m/s}^2/\text{m} = 10^{-4} \text{ mGal/m}.$$

Yllä annettu tensori 16.11 Maan pinnan lähellä, taas paikallisissa toposentrisissä  $(x, y, z)$ -koordinaateissa on nyt

$$\mathcal{M} \approx \begin{bmatrix} -1500 & & \\ & -1500 & \\ & & 3000 \end{bmatrix} \text{ E}.$$

Aina

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \partial_{xx} W + \partial_{yy} W + \partial_{zz} W = 0.$$

Tämä ehto, *Laplacen kenttäyhtälö*<sup>18</sup>, pätee painovoimapotentiaalille tyhjiössä<sup>19</sup>. 18  
19

Kuun ja Auringon gravitaatiogradienttikenttä tunnetaan maan päällä *vuoroveden voimakenttänä*, joka aiheuttaa merten vuorovesi-ilmiön pääperiodina Maan pyörähdysliikkeen takia kahdesti vuorokaudessa.



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mitkä ovat erot absoluutti- ja relatiivigravimetrin välillä?
- 2) Montako milligallia vähemmän painovoima on lentokorkeudella (10 km) kuin maanpinnalla? Montako prosenttia ero on koko painovoimasta?
- 3) Samat kysymykset Kansainväliselle avaruusasemalle, keskikorkeus 400 km.
- 4) Kansainvälisen avaruusaseman videoissa näyttää siltä, että ihmiset ovat painottomassa tilassa, jossa ei siis ole painovoimaa. Kuitenkin aseman kiertorata on vain noin 400 km maanpinnan yläpuolella, jossa Maan gravitaatio on vielä vahva. Miten tämä on mahdollista?

<sup>18</sup>Pierre-Simon Laplace (1749–1827) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja tähtitieteilijä, yksi Eiffel-tornin 72 nimestä ja varmaan heistä etevin ([Eiffel Tower, 72 names](#)).

<sup>19</sup>Tässä on jätetty huomioimatta ilmakehän lisäksi myös Maan pyörähdysliikkeen keskipakovoima, joka aiheuttaa sen, että Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa Laplacen kenttäyhtälö ei päde tarkasti edes tyhjiössä. Korjaustermi on kuitenkin tarkasti laskettavissa. Ja *häiriöpotentiaalille*  $T = W - U$  Laplacen kenttäyhtälö pätee taas eksaktisti.

- 5) Mikä on geopotentialiaali ja mikä on sen yhteys painovoimaan?
- 6) Miten määritellään normaalipainovoimakenttä?
- 7) Missä tilanteissa käyttäisit Bourguer-anomalioita mieluummin kuin ilma-anomalioita?
- 8) Mitkä ovat luotiviivan poikkeamat, ja miten ne määritetään?
- 9) Mikä aiheuttaa luotiviivan poikkeamat vuoristojen lähellä, ja miksi ne ovat pienempiä kuin teoreettisesti odotettiin?
- 10) Mitä suuretta eötvös-yksikkö (E) kuvaa?



### Harjoitus 16–1: Gravimetrisen geoidin laskenta

Tutki osion 16.4 laskennallista järjestelyä, tarkemmin laskentayhtälöä 16.6:

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \left( \frac{\pi}{180} \right)^2 \sum_{i=1}^{360} \sum_{j=-89}^{+90} S(\psi(\phi, \lambda, \phi', \lambda')) \Delta g(\phi', \lambda') \cos \phi', \quad (16.6)$$

jossa  $\lambda' = i^\circ - 0^\circ,5$  ja  $\phi' = j^\circ - 0^\circ,5$ .

- 1) Montako *peruslaskutoimitusta* — kertolasku, jonka jälkeen mahdollisesti yhteen- tai vähennyslasku — olisi suoritettava *yhteensä* globaalin geoidimallin laskemiseksi erotuskyvyllä  $5^\circ \times 5^\circ$  painovoima-anomaliadatasta, jonka erotuskyky olisi  $1^\circ \times 1^\circ$ ?

Saa olettaa, että Stokesin funktio  $S(\psi)$ , leveysasteen  $\phi'$  kosinit ja anomalia-arvot ovat esilaskettuja. Karkea arvio, vaikka kymmenen prosentin sisällä, riittää arvioimaan tämän laskennan tietokone-ajon kesto peruslaskutoimituksissa ilmaistuna.

- 2) Vaihda keskenään silmukoiden järjestys ja siirrä  $\cos \phi'$  sisäisen silmukan ulkopuolelle. Millä tavalla vastauksesi muuttuu?



# Avaruusgeodesia

## 17

**1462 Zamenhof**, provisional designation 1938 CA, is a carbonaceous Themistian asteroid from the outer regions of the asteroid belt, approximately 27 kilometers in diameter.

It was discovered on 6 February 1938, by Finnish astronomer Yrjö Väisälä at the Iso-Heikkilä Observatory in Finland. The asteroid was named after L. L. Zamenhof, the creator of Esperanto. It is a recognized Zamenhof–Esperanto object.

---

[Wikipedia, 1462 Zamenhof](#)



### 17.1 Maan pyörähdysliike, rataliike ja tähtiaika

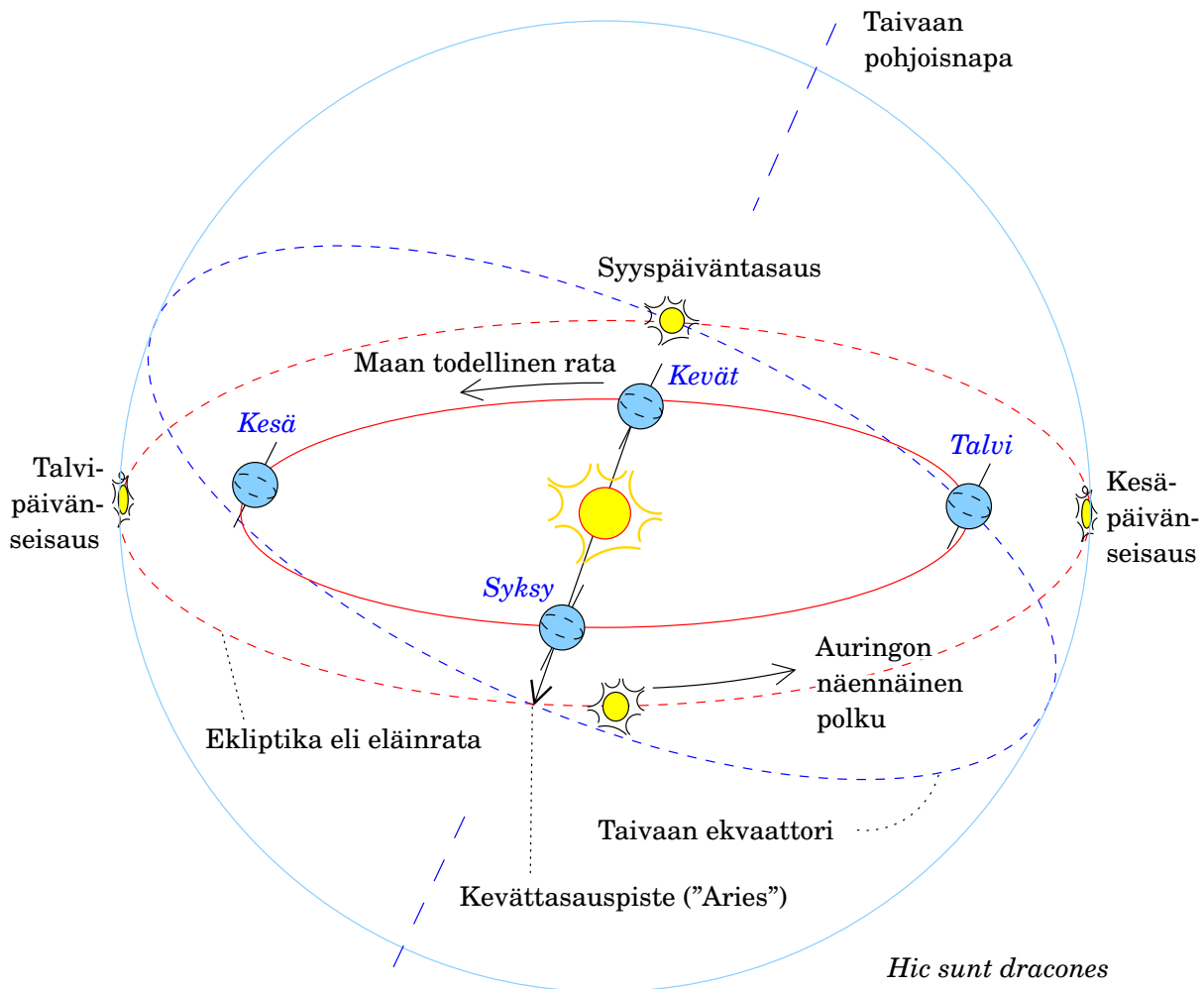
Maapallo kiertää Auringon 365,25 päivässä. Samalla se pyörii oman akselinsa ympäri kerran vuorokaudessa. Kuva 17.1 esittää sekä fyysikaalista tilannetta, maaplaneetan kiertorataa Auringon ympäri, että näennäistä tilannetta Maasta katsottuna, jossa Aurinko kulkee vuoden mittaan eläinrataa eli ekliptikaa pitkin.

Siviilivuorokauden, 24 tunnin, aikana maapallo pyörii kerran akselinsa ympäri *Keski-Aurinkoon nähden*. Kuitenkin tähtitaivaaseen nähden pyörimisaika on hieman lyhyempi: kun maapallo on pyörinyt vuodessa 365,25 kertaa akselinsa ympäri Aurinkoon nähden, on se tähtitaivaaseen nähden tehnyt 366,25 pyörähdystä. Yhden pyörähdysksen kesto on näin ollen

$$\frac{365,25}{366,25} 24^{\text{h}} = 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4^{\text{s}}.$$

Tämän jakson nimi on *tähtivuorokausi*.

Maan pyörähdysliike tähtitaivaaseen nähden — tai vastaavasti, tähtitaivaan näennäinen pyörähdysliike Maahan nähden — mitataan kul-



KUVA 17.1. Maan kiertorata Auringon ympäri ja Auringon näennäinen polku taivaanpallolla. Vuodenaikojen nimet ovat boreaalisia, siis viittaavat pohjoiseen pallonpuoliskoon.

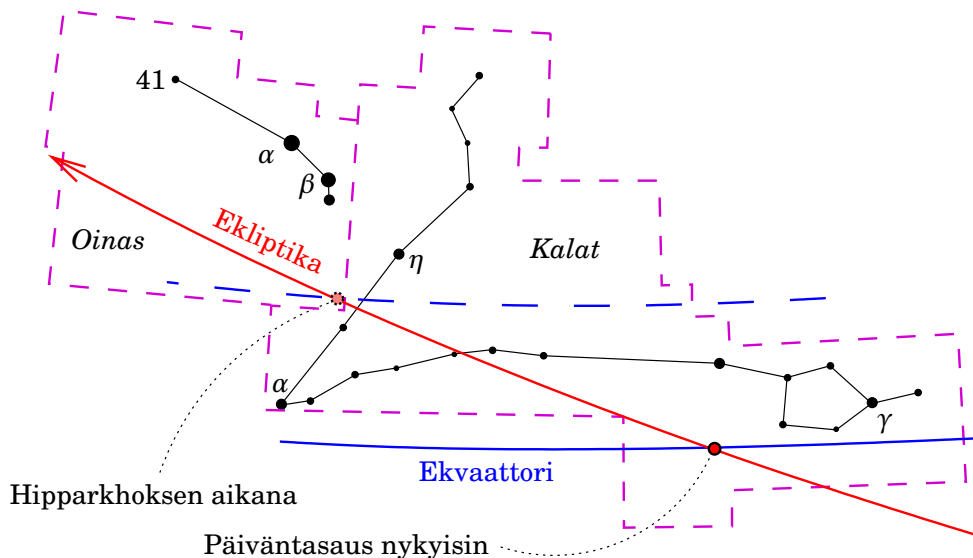
mallalla nimeltä *tähtiaika* (engl. *sidereal time*). Se lasketaan kelloajasta ja kalenteripäivämäärästä käyttämällä tähän tarkoitukseen laadittuja taulukoita. Tähtitorneissa käytetään myös *tähtikelloja*, jotka näyttävät tähtiaikaa ja kulkevat tavallisia kelloja noin  $\frac{1}{365,25}$  eli 0,27 % nopeammin.

Maan vuotuisen liikkeen takia illalla näkyvät tähdistöt siirtyvät hitaasti eteenpäin vuodenaikojen mukaan. Jokaisella vuodenajalla on omat "tunnustähdistönsä", jotka ovat iltahämärässä näkyvissä: talvella Orion, tähdet Sirius ja Procyon, kesällä tähdistöt Lyyra, Joutsen ja Kotka.

Maasta katsottuna Aurinko kulkee vuotuista polkua, eläinrataa ([Wikipedia, Eläinrata](#)) eli *ekliptikaa*<sup>1</sup> pitkin. Kevään alkaessa Aurinko siirtyy

<sup>1</sup>Nimi "ekliptika" juontaa juurensa siihen, että samalla radalla tapahtuvat myös





KUVA 17.2. Kevätpäiväntasauspiste ja sen liike, päiväntasausten aikaistuminen eli *prekessio*.

eteläiseltä pallonpuoliskolta pohjoiselle pallonpuoliskolle, pisteessä nimeltä *kevätpäiväntasauspiste*. Muinaisten kreikkalaisten aikana tämä piste oli Oinaan tähdistössä, siksi perinteinen nimi ”Aries-piste” — vaikka prekession myötä se on nykyisin Kalojen tähdistössä. Samalla tavalla aikanaan Aurinko oli kesäpäivänseisauksen hetkellä Ravun tähdistössä ja talvipäivänseisauksen hetkellä Kauriin tähdistössä, joten tähdistöt antoivat nimensä *kääntöpiireille*. Prekession ansiosta nykyiset päiväntasaukset tapahtuvat Härän ja Jousimiehen tähdistöissä...

Koko maapallon absoluuttinen asento tähtitaivaaseen nähden kuvataan *Greenwichin näennäisen tähtiajan* (GAST, *Greenwich Apparent Sidereal Time*) avulla. Paikallinen näennäinen tähtiaika (LAST, *Local Apparent Sidereal time*) saadaan tähtitieteellisen pituusasteen avulla:

$$\text{LAST} = \text{GAST} + \Lambda,$$

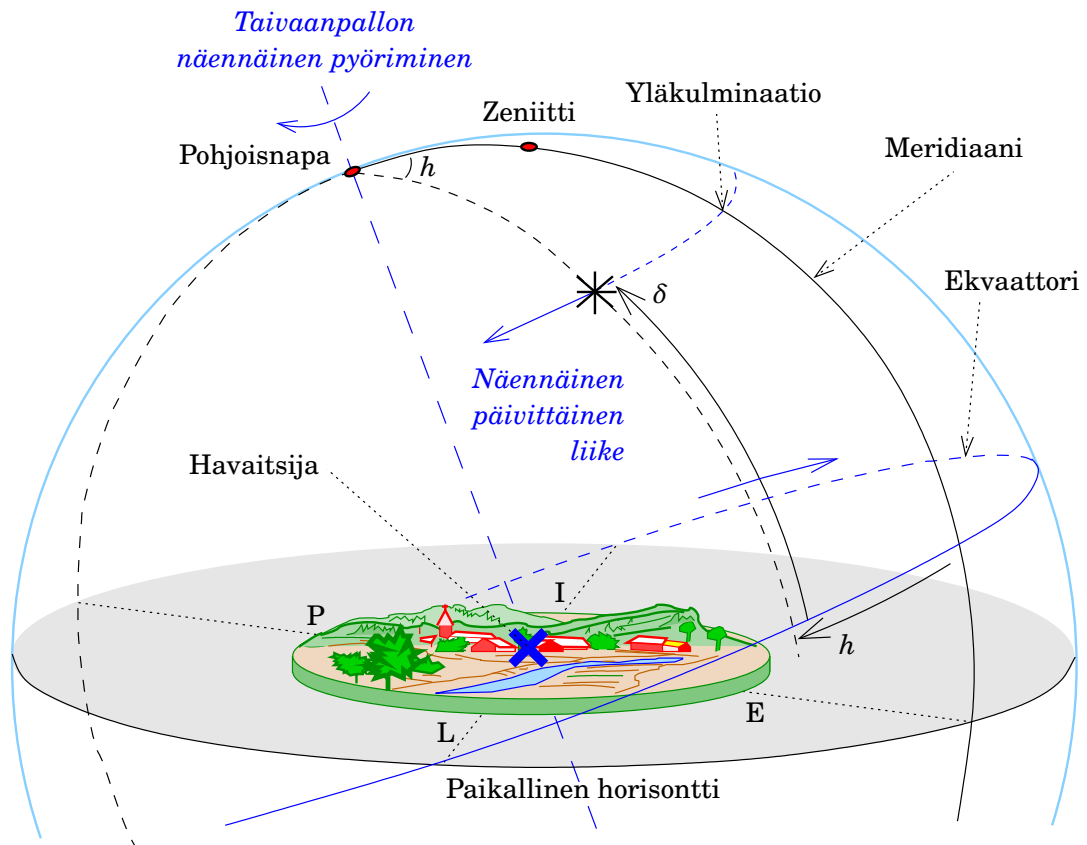
jossa  $\Lambda$  on paikan pituusaste *itään*, tietysti muunnettuna aikayksiköihin ( $15^\circ \rightarrow 1^h$ ,  $1^\circ \rightarrow 4^m$ , jne.).

## 17.2 Taivaan ja Maan koordinaatit

Taivaan koordinaatit ovat *rektaskensio*  $\alpha$  ja *deklinaatio*  $\delta$ . Rektaskensio on pituusaste, kuitenkin mitattuna itään päin kevätpäiväntasauspistees-

aurion- ja kuunpimennykset. Tietenkin, koska pimennykset edellyttävät, että Aurinko, Kuu ja Maa ovat samalla suoralla.





KUVA 17.3. Tuntikulma  $h$  ja deklinaatio  $\delta$  taivaanpallolla.

tä, jonka rektaskensio siis on 0.

Paikallisella taivaalla käytetään koordinaatteja *tuntikulma*  $h$  ja deklinaatio  $\delta$ . Katso kuva 17.3. Pari  $(h, \delta)$  on suoraan laskettavissa atsimuutista ja korkeuskulmasta, jos paikan tähtitieteellinen leveysaste  $\Phi$  on tiedossa.

Tähtivuorokauden aikana tähti liikkuu näennäisesti idästä länteen ja kulkee meridiaanitason läpi kaksi kertaa: *ylä-* ja *alakulminaatio*. Alakulminaatio jää näkemättä, jos tähden deklinaatio on liian pieni paikalliseen leveysasteeseen nähden. Etelän tähdistöistä jopa yläkulminaatio jää meiltä näkemättä!

Tähtiajan  $\theta$  (= LAST), tuntikulman  $h$  ja tähden rektaskension  $\alpha$  välillä on seuraava yhteys:

$$h = \theta - \alpha.$$

Jos kirjoitetaan Greenwichin tähtiajaksi (GAST)  $\theta_0$  ja havaintopaikan tähtitieteelliseksi pituusasteeksi itään  $\Lambda$ , saadaan

$$h = \theta_0 + \Lambda - \alpha.$$



Jos neljästä suureesta kolme on annettu, voidaan neljäs laskea. Puhutaan

- 1) *Ajanmäärittämisestä*, jos tuntematon on  $\theta_0$ . Aikanaan tämä oli tähtitieteen palvelu yhteiskunnalle, siviiliajan ylläpito. Tänäpä kello ovat niin paljon tarkempia, että kyse on Maan pyörähdysliikkeen seurannasta.
- 2) *Paikan pituuden määrittämisestä*, jos tuntematon on  $\Lambda$ . Tämä oli kriittinen merinavigoinnissa (Sobel, 1998).
- 3) *Tähden rektaskension määrittämisestä*, jos tuntematon on  $\alpha$ . Näin konstruoidaan tähtikatalogeja.

Näissä tapauksissa mittaus suoritetaan yleensä hetkellä, jolloin  $h = 0$ : *meridiaanin läpikulku*. Tapaukset 2 ja 3 edellyttävät tarkan kellon käyttöä, tapaus 1 edellyttää oman pituusasteen ja käytetyn tähden rektaskension tuntemista.

Usein käytetty laite on meridiaaniympyrä eli *ohikulkukone*, jolla mitataan tähden tarkka meridiaanin läpikulkuhetki. Ohikulkukone on teleskooppi jolla on vain vaaka-akseli, joka on kiinteästi rakennettu länsi-itäsuuntaan niin, että teleskoopin tähtäysakseli on aina paikallisessa meridiaanitasossa. Okulaarissa havaitaan, miten tähti kulkee hiusviivan alitse. Tarkka hetki tallennetaan sähköisesti yhdessä aikamerkkien kanssa.

Akseliin on kiinnitetty jaottu kehä, josta luetaan tähden elevaatio eli korkeuskulman  $\eta$  arvo läpikulun hetkellä. Tästä voi laskea tähden deklinaation  $\delta$ : sen, paikan leveysasteen  $\Phi$  ja elevaatiokulman  $\eta$  välillä on yhteys (pohjoisen pallonpuoliskon yläkulminaation tapauksessa)

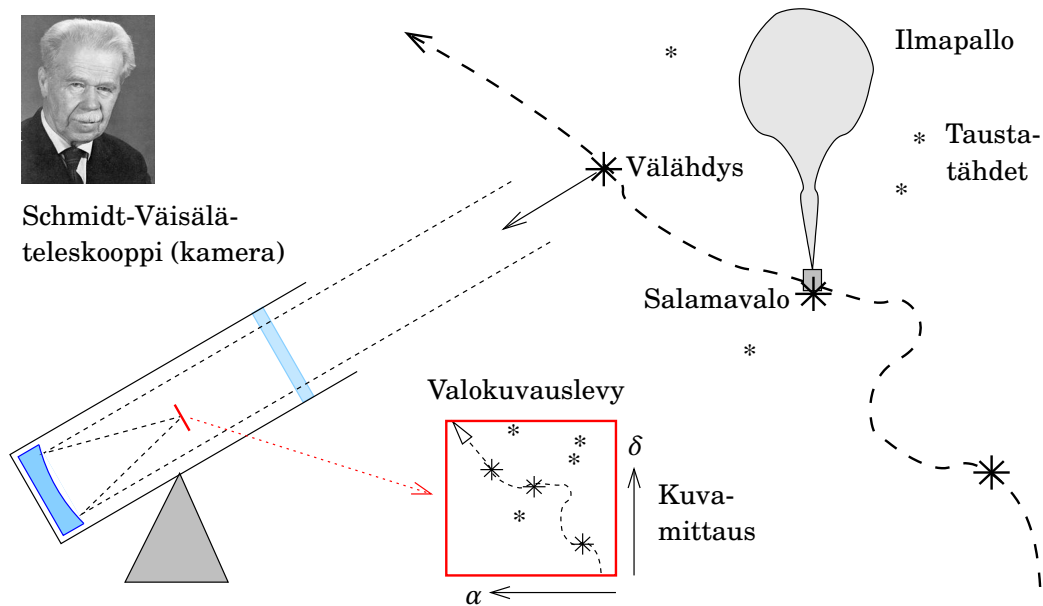
$$\eta + \Delta\eta_{\text{refr}} = (90^\circ - \Phi) + \delta,$$

jossa  $\Delta\eta_{\text{refr}}$  on korjaus ilmakehän refraktion vaikutuksesta. Refraktio-korjaus on tehtävä huolellisesti paikallisen ilmanpaineen, lämpötilan ja kosteuden mittausten perusteella, joiden avulla määritetään paikallisen ilman taitekerroin.

Yhdistämällä yllä mainitut menetelmät 1–3 voidaan rakentaa sekä tähtien paikkojen  $(\alpha, \delta)$  että havaintoasemien paikkojen  $(\Phi, \Lambda)$  katalogit ja samalla seurata tähtiajan — siis Maan pyörähdysliikkeen — kulkua  $\theta_0$ . Tämä kaikki pitää tehdä johdonmukaisella tavalla.

Sobel (1998) on hieno kirja ajan roolista paikanmäärittäksessä merellä.





KUVA 17.4. Yrjö Väisälän tähtikolmiomittaus. Käytetty laitteisto ja valokuvauksen ja suunnanmäärityksen periaate. (a) Mittauksessa käytetty laitteisto.

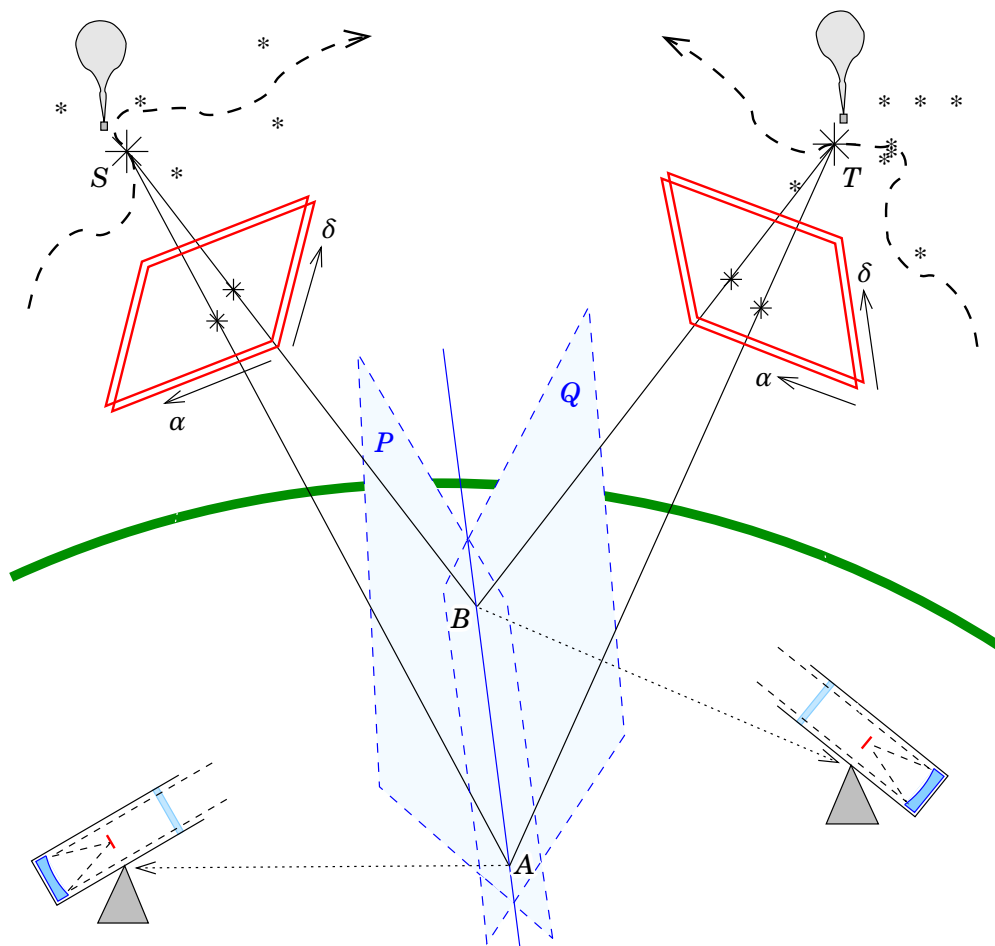


### 17.3 Väisälän tähtikolmiomittaus

Menetelmän keksi Yrjö Väisälä sotien aikana katsellessaan ilmatorjuntakranaattien räjähdyskuja Turun yläpuolella. Vuoden 1946 artikkelissaan ”Maan toinen kuu” (Väisälä, 1946) hän kuvasi, miten korkealla taivaalla olevat kohteet voitaisiin kuvata eri paikasta Maan pinnalla ja näin rakentaa geodeettinen verkko jopa pisteistä, joiden välillä ei ole suoraa näköyhteyttä.

Menetelmä käyttää ilmatieteellisiä ilmapalloja, joiden alle ripustetaan voimakas välähdysvalo. Välähdysarja kuvataan tähtitaivasta vasten, kuvat kehitetään ja välähdysten paikat tähtitaivaalla mitataan ja lasketaan. Näin saadaan kuvauspaikan ja ilmapallon välinen hetkellinen suuntavektori tähtitieteellisessä koordinaatistossa (Kakkuri, 1973). Tätä ilmapallomenetelmää on kokeiltu tuotantomielessä Suomessa ja Unkarissa (Czobor ja Németh, 1981). Verkkojen sivunpituudet olivat useita satoja kilometrejä.

**Lyhyesti,** kahdesta havaintopaikasta  $A$  ja  $B$  Maan pinnalla valokuvataan taivaalla näkyvissä olevaa *kahta korkeaa tähystä*  $S$  ja  $T$  tähtitaivaan taustaa vasten. Kameroina käytetään tehokkaita katadioptrisia Schmidt<sup>2</sup>-Väisälä-teleskooppeja (Wikipedia, Schmidt camera). Jokaisen kameran kuvatasoon laitetaan valoherkän



KUVA 17.5. Yrjö Väisälän tähtikolmiomittaus. Käytetty laitteisto ja valokuvauksen ja suunnanmäärityksen periaate. **(b)** Mittauksen geometria.

\_\_\_\_\_ emulsion peittämä lasilevy kuvalevyksi.

Kehittämisen jälkeen kuvalevyistä<sup>3</sup> mitataan tarkassa mittauslaitteessa sekä tähysten — välähdysten — että valittujen taustatähtien paikat ”levykoordinaateissa”. Koska kiintotähtien paikat taivaan koordinaateissa rektaskensio ( $\alpha$ ) ja deklinaatio ( $\delta$ ) ovat jo tiedossa, voidaan kaikille levyille johtaa muunnosyhtälö, joka antaa myös *tähysten* eli välähdysten paikat taivaalla ( $\alpha, \delta$ ) molemmasta havaintopaikasta katsottuna.

<sup>2</sup>Bernhard Schmidt (1879–1935) oli nerokas virolaissyntyinen teleskooppien rakentaja ja suunnittelija.

<sup>3</sup>Ennen käytettiin lasilevyjä filmien sijasta niiden geometrisen vakauden takia. Välähdysten paikat mitataan levykoordinaatistossa, kuten myös levyille kuvattujen kiintotähtien paikat. Kiintotähtien tunnettujen paikkojen avulla ratkaistaan välähdysten paikat tähtitaivaan koordinaateissa ( $\alpha, \delta$ ).

Nämä ”paikat” taivaanpallolla ovat todellisuudessa *suuntia* kolmiulotteisessa avaruudessa. Suunnista rakennetaan tasot  $P = SAB$  ja  $Q = TAB$ . Tasojen leikkausviiva on  $AB$ . Näin on saatu pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen suuntavektori kolmiulotteisessa avaruudessa.

Itse asiassa taso  $P$  on taivaanpallolla sama kuin isoympyrä välähdyksen  $S$  pisteissä  $A$  ja  $B$  otettujen kuvapisteen läpi, ja  $Q$  on isoympyrä välähdyksen  $T$  kuvien läpi. Isoympyröiden leikkauspiste on yhdysviivan  $AB$  *suunta* avaruudessa: tähtikolmionmittaus on suuntamittaus käyttäen taivaallisia apupisteitä.

Kun on saatu kokoon riittävästi maa-asemien välisten viivojen suuntia, voidaan suorittaa *verkkotasointus*. Alkuperäissuuntien muuntaminen tähtitieteellisestä koordinaatistosta Maan mukana pyörivään koordinaatistoon Maan pyörähdysliikemallin avulla (”Greenwichin tähtiaika”) edellyttää välähdysten tarkkaa ajanmäärittystä.

Kuten jo Väisälän artikkelin nimestä voi päätellä, hänen ideansa oli käyttää stratosfäärin ilmapallojen sijaan Maan kiertoradalla olevia keinotekoisia *satelliitteja*. Tätäkin menetelmää kokeiltiin: aktiivinen geodeettinen satelliitti [ANNA 1B](#) (”Army, Navy, [NASA](#), Air Force”) vuodesta 1962 oli varustettu voimakkailla välähdysvaloilla. Toisaalta passiivinen satelliitti [PAGEOS](#) (Passive Geodetic Earth Orbiting Satellite) vuodesta 1966 oli halkaisijaltaan yli 30 metrin kokoinen ilmapallo, joka oli tehty ohuen ohuesta aluminisoidusta Mylar<sup>®</sup>-kalvosta, 4000 km korkealla radalla. Satelliitti näkyi selvästi paljain silmin, ennen kuin hajosi kappaleiksi 1970-luvulla, luultavasti Auringon ultraviolettisäteilyn syövyttävästä vaikutuksesta<sup>4</sup>.

<sup>5</sup> Maailmanlaajuisen viidestätoista valtavasta Baker-Nunn-kamerasta<sup>5</sup>

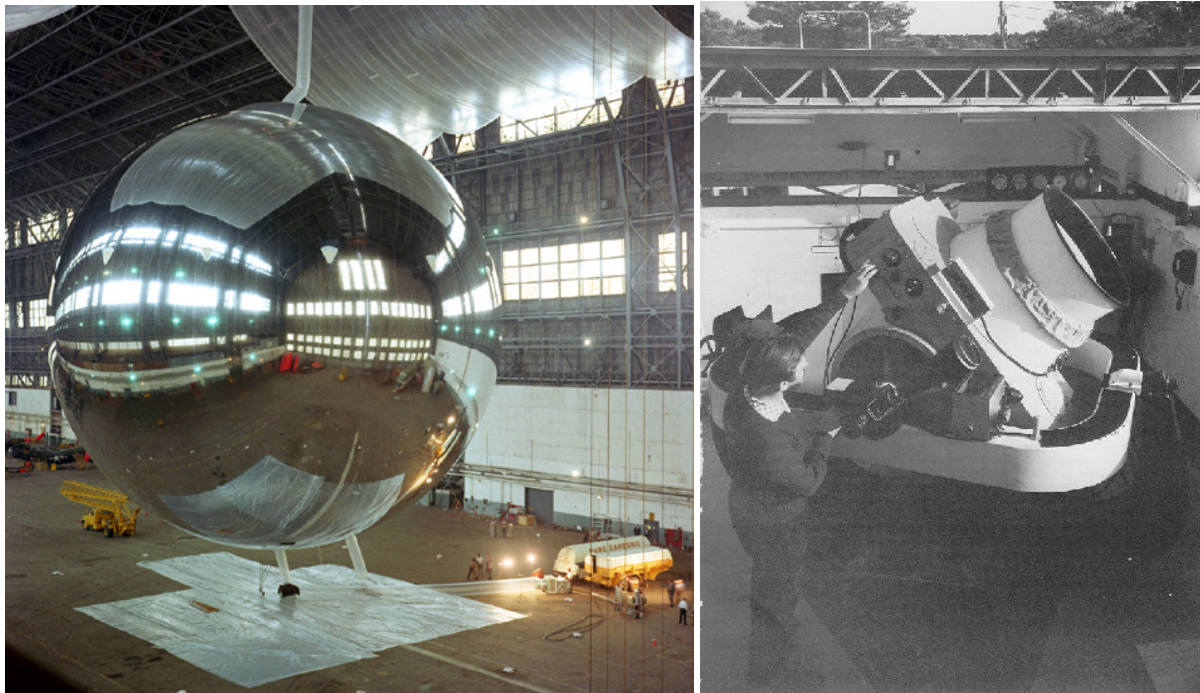
<sup>4</sup>DuPont kirjoittaa asiakirjassa *Mylar<sup>®</sup> polyester film — Safe Handling*: ”Mylar<sup>®</sup> is not recommended for applications requiring prolonged exposure to direct sunlight due to degradation when exposed to ultraviolet rays [...]” ([DuPont Teijin Films](#)).

<sup>5</sup>Baker-Nunn-kamera oli Schmidt-kameran variantti, joka oli optimoitu satelliittien havaitsemiseen. Se käytti 55 mm leveää Cinemascope-elokuvafilmiä ja sillä oli kolmiakselinen, nopeaan seurantaan kykenevä jalusta. Aukko oli 50 cm, koko laitteen paino 3,5 tonnia. Keksijät olivat Harvardin yliopiston tähtitieteilijä-optikko James Baker (1914–2005) ja koneinsinööri Joseph Nunn (1905–1968). Satelliittien seurantaverkko koostui viidestätoista asemasta. [Boller and Chivens](#), [Baker Nunn](#), kuva-arkisto, rakensi kaksitoista kameraa Smithsonian Astrophysical Observatorylle ja kolme Yhdysvaltojen ilmavoimille.

Ainakin kolme täysinpalvellutta Baker-Nunn-kameraa toimii tai on toiminut tähtitieteellisenä ”sky survey” -kamerana ([Carter ym., 1992](#); [Fors ym., 2013](#); [Mondal ym., 2009](#)).







(a)

PAGEOS-satelliitti, koepuhallus (NASA)

(b)

Baker-Nunn-kamera (NASA)

KUVA 17.6. Satelliittigeodesiaa [NASA](#)n arkistosta.

koostuvan havaintoverkon avulla onnistuttiin rakentamaan ensimmäiset mannertenväliset geodeettiset kolmiomittausverkot, jotka ovat kuitenkin modernien, niin paljon tarkempien menetelmien (GNSS, VLBI, satelliittilaseretäisyysmittaus) myötä jääneet tieteen kunniakkaaseen historiaan.



## 17.4 Maan pyörähdysliikkeen vaihtelu

Maan pyörähdysliike vaihtelee sekä nopeudeltaan että suunnaltaan.

Maan hetkellinen pyörähdysakseli, eli vastaavasti napa, liikkuu kiinteän maankuoren suhteen. Liikettä kutsutaan *napaliikkeeksi*. Se sisältää kaksi ympyrämaista liikettä:

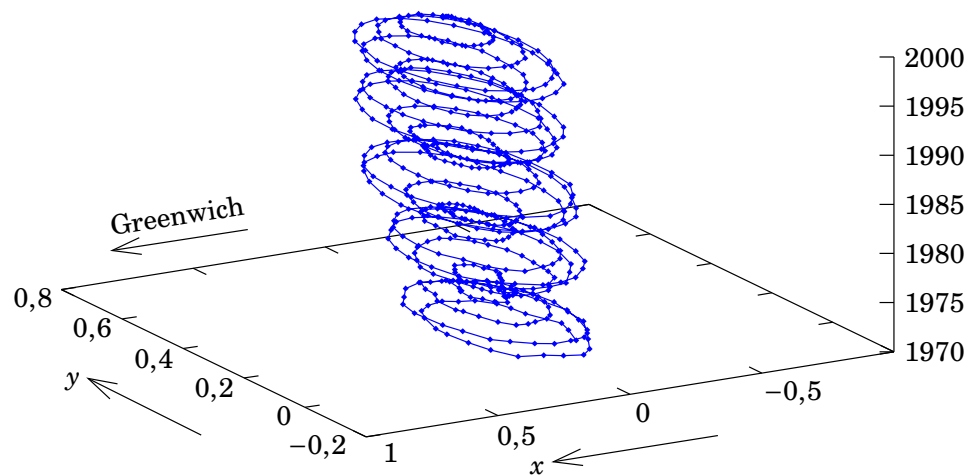
- Vuosittainen liike, periodi 365 vuorokautta. Tämä on pakotettu liike, pääosin ilmakehän aiheuttama.
- ”Chandlerin<sup>6</sup> huojunta”, periodi noin 435 vuorokautta.
- Näiden lisäksi on havaittu navan hidas vaellus, joka liittyy kiin-

<sup>6</sup>

Katso myös [BakerNunn.org](#)).

<sup>6</sup>Seth Carlo Chandler, Jr. (1846–1913) oli amerikkalainen tähtitieteilijä.





KUVA 17.7. Napaliike vuosien 1970–2000 aikana, yksikkö kaarisekunti. Lähde: [IAG International Earth Rotation and Reference Systems Service IERS.](#)



teän Maan massajakauman muutoksiin, kuten postglasiaaliseen maannousuun.

Molempien ympyräliikkeiden amplitudi eli säde on noin  $0'',1$ – $0'',2$ , maanpinnalla noin 3–6 m.

Chandlerin huojunta on teoreettisesti ymmärretty niin, että kyseessä on *vapaa nutaatio*, jo Leonhard Eulerin ennustama litistyneen, jäykän maapallon liike. Huojunta on vaimennettu, koska Maa ei olekaan jäykkä vaan (elastisesti ja plastisesti) deformatuiva. Se, että huojunta jatkuu, vaatii selitystä. Selitys on, että valtamerten ja ilmakehän paineen vaihtelut ovat sen liikkeelle paneva voima ([Gross, 2000](#)).

Myös Maan pyörähdysliikkeen *nopeus* (*length of day*, [LoD](#), vuorokauden pituus) vaihtelee. Ilmiötä seurataan samanlaisella tavalla kuin napaliikettä. Se liittyy kiinteästi Maan ilmakehän *pyörähdysmomentin* vaihteluun. Pyörähdysmomentti on suure, jonka numeeriset säämallit ([NWP](#)) osaavat hyvin laskea.

Napaliikkeen ja vuorokauden pituuden seuranta, historiallisesti ja tänään:

- Mittaamalla leveysasteen vaihteluita tähtitieteellisin keinoin. Tämän menetelmän käyttö aloitettiin vuonna 1899 (International Latitude Service, alkaen 1987 International Polar Motion Service), kuudessa observatoriossa (Misuzawa, Japani; Chardzhui, Turkستان, myöhemmin Kitab, Uzbekistan; Carloforte, Italia; Gaithersburg, Ukiah, Cincinnati, Yhdysvallat), jotka sijaitsivat eri mante-





telmässä ajan funktioina. Tästä voidaan laskea Maan hetkellisen pyörähdysakselin suunta samassa järjestelmässä ja jopa Maan koko hetkellinen asento. Tarkkuus on GNSS-menetelmää vieläkin parempi, millikaarisekunnin murto-osa.

Napaliikkeen laskennan *origo* eli CIO, *Conventional International Origin*, oli alussa navan keskimääräinen paikka vuosina 1900–1905. Nykylaskennan käytännön origo on lähellä tätä.

Napaliikettä ja vuorokauden pituuden vaihtelua kutsutaan yhdessä precession ja nutaation kanssa Maan asentoparametreiksi eli *Earth orientation parameters*, EOP. Niiden seuranta ja julkaiseminen on IERS:n (International Earth Rotation and Reference Systems Service'n) tehtävä. Tarkassa geodeettisessa GNSS-laskennassa EOP on otettava huomioon! Tarvittavat korjaustiedot löytyvät Internetistä.

Vasta 1930-luvulla havaittiin, että maapallon pyörähdysliike on hie-man epäsäännöllinen, ja etsittiin tasaisempi aikaskaala. Ensimmäinen yritelmä oli ET, *ephemeris time* eli efemeridiaika, joka perustui planeettojen, lähinnä Kuun, rataliikkeeseen. Kun käyttöön saatiin riittävän tarkkoja atomikelloja, siirryttiin niihin, mikä loi *atomiajan* (TAI), joka soveltuu vaativaankin tieteelliseen käyttöön, jossa tarvitaan tarkka ja tasainen aikaskaala.

Nykyinen siviiliaika on UTC, Universal Time Co-ordinated. Sen yhtenä tarkoituksena on seurata kaikkialla maapallolla päivittäistä elämää <sup>7</sup> hallitsevia päivänvalon vaihteluja. Sen on seurattava riittävän tarkasti <sup>7</sup> Maan pyörähdysliikkeen vaihteluja. UTC, joka perustuu TAI:hin, seuraa maapallon pyörähdysten vaihtelua korkeintaan 0,9s virheellä. Tätä varten kaksi kertaa vuodessa, joulukuun lopussa ja kesäkuun lopussa, UTC suorittaa tarvittaessa *karkaussekunnin* tai -sekunteja, Wikipedia, *Karkaussekunti*. Ero UTC:n ja TAI:n välillä sekunteina, kokonaisluku, taulukoidaan almanakoissa.

GPS-aika eroaa sekä UTC:stä että TAI:stä. Kuten TAI, se on tasainen eikä suorita koskaan karkaussekunteja. Vuonna 1980, kun GPS:n ajanlasku alkoi, GPS-aika oli identtinen UTC:n kanssa. Tästä syystä

$$\text{GPS} = \text{TAI} - 19\text{s}$$

<sup>7</sup>Viime vuosina on aika-alalla käyty julkista keskustelua siitä, ovat karkaussekunnit niiden aiheuttamien haittojen arvoisia, kun UTC:hen sidottu aikavyöhykejärjestelmän aika yhtyy paikalliseen aurinkoaikaan kuitenkin vain puolen tunnin tarkkuustasolla.



ja ero GPS – UTC sisältää UTC:n karkaussekunnit. Ero sisältyy GPS:n navigointiviestiin.



## 17.5 Maan prekessio ja nutaatio

Kuun ja Auringon vetovoima yhdessä Maan litistyneisyyden kanssa aiheuttaa Maan pyörähdysakselin hitaan liikkumisen avaruudessa. Tätä kartiomaista liikettä kutsutaan *prekessioksi*. Sanan ”prekessio” alkuperäinen merkitys on *päiväntasausten* aikaistaminen. Päiväntasaukset ovat ne vuoden ajanhetket, jolloin päivä ja yö ovat yhtä pitkiä. Hipparkhoksen ensimmäisenä havaitsema ilmiö aikaistaa kevät- ja syyspäiväntasauksia vuosisatojen vieriessä<sup>8</sup>: ilmiö siirtää Auringon paikkaa taivaalla tähtien keskellä päiväntasauksen hetkellä taaksepäin eläinrataa pitkin<sup>9</sup>. Katso kuva 17.2.

Itse asiassa Maan pyörähdysakseli kiertää noin 25800 vuodessa akselin ympäri, joka on kohtisuorassa maapallon kiertoradan tasoon nähden. Tätä tasoa, näennäistä Auringon ratatasoa Maasta katsottuna, kutsutaan myös eläinradaksi eli *ekliptikaksi*, katso yllä.

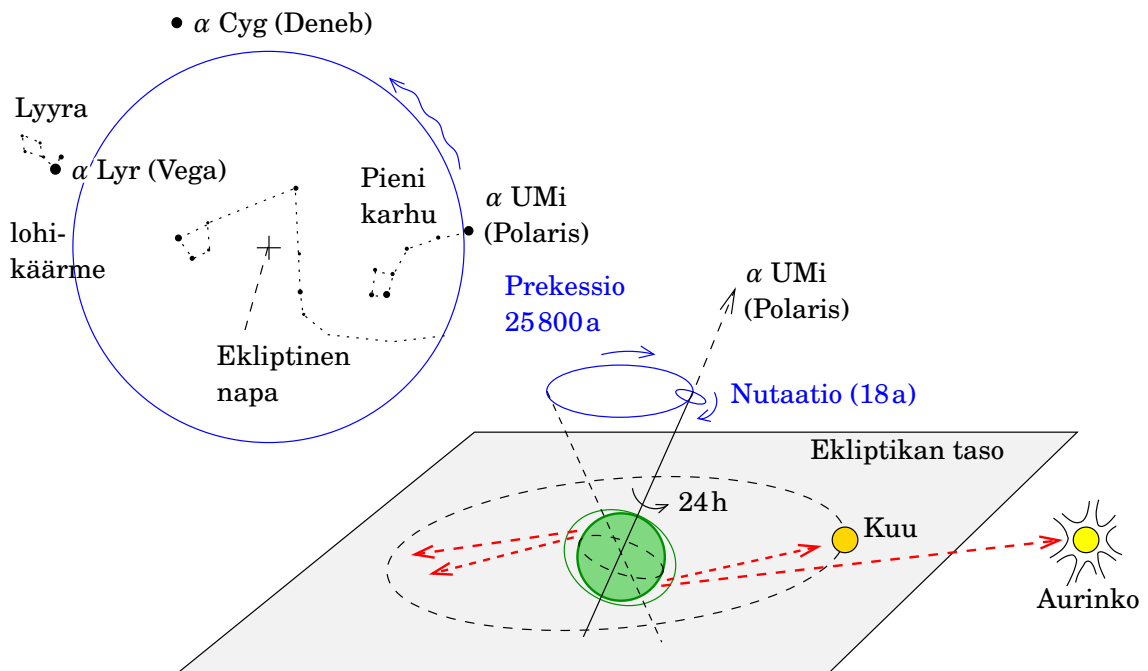
Prekessio *ei ole* sama kuin napaliike. Napaliike on Maan pyörähdysakselin liikkuminen *kiinteän Maan* suhteen. Sen suuruus on alle kaarisekunnin, maanpinnalla joitakin metrejä.

Prekession lisäksi Maan pyörähdysakseli suorittaa pienen periodisen liikkeen nimeltä *nutaatio*. Sen pääperiodi on 18 vuotta, ja sen aiheuttavat Kuun radan jaksolliset muutokset, jotka vaikuttavat Kuun vetovoiman kautta. Ilmiö on tarkasti laskettavissa ja löytyy almanakoista, kuten prekessiokin.

Prekessio saa Maan pyörähdysakselin suunnan — siis vastaavasti taivaannavan paikan tähtitaivaalla — kulkemaan hitaasti suurta ympyrää. Nutaatio taas aiheuttaa tähän säännölliseen liikkeeseen pieniä ”nykäyksiä”. Kun tänään taivaannavan lähellä on Pohjantähti eli  $\alpha$  UMi, on se hamassa tulevaisuudessa  $\alpha$  Lyr eli Vega, kuten oli kaukaisessa menneisyydessäkin.

<sup>8</sup>Se *ei* kuitenkaan aikaista kalenterin päivämäärät, koska kalenteri itse perustuu vuodenaikarytmiin!

<sup>9</sup>Sittemmin sana on otettu käyttöön merkitsemään muidenkin pyörivien kappaleiden akselien kiertoliikettä, kuten hyrrän, gyroskoopin ja atomiytimen magneettikentässä. Viimemainittu ilmiö, Larmorin prekessio, tekee mahdolliseksi muun muassa magneettikuvauksen (MRI).



KUVA 17.9. Maan prekessioliike. Vasemmalla on kuvattu, miten precession seurauksena taivaannapa kiertää tähtitaivasta noin 25800 vuoden ajan.

Toisin kuin napaliike, ovat prekessio ja nutaatio Maan pyörahdyksellin liikkeitä *tähtitaivaaseen* nähden.



## 17.6 Avaruussää

Aurinko on tähti, joka tuottaa sisällään ydinenergiaa ”polttamalla” vetyä heliumiksi. Auringon keskipisteessä lämpötila on noin 15 miljoona kelviniä. Auringon ytimen lämpöenergia kulkee pinnalle eri kaasukerrosten läpi hyvin hitaasti, aluksi säteilynä<sup>10</sup>, lähempänä pintaa konvektiovirtausten mukana ja lopulta taas näkyvästä pinnasta eli *fotosfääristä* lähtevänä säteilynä, valona, josta häviävän pieni osa saapuu myös Maahan.

Auringon ulkoinen kerros, paksuus noin 27 % Auringon säteestä, on konvektion ansiosta jatkuvassa kiehumistilassa. Tämän seurauksena energiaa kulkee jatkuvasti Auringon ilmakehän ylimpään, ohueeseen plasmakerrokseen, *koronaan*, ja lämmittää tätä miljooniin asteisiin<sup>11</sup>. Tämän energiavirran tarkka muoto — akustinen, magneettinen, ... —

<sup>10</sup>Lämpösäteilyä, korkean lämpötilan ansiosta röntgensäteilyä.

<sup>11</sup>Vertailun vuoksi Auringon visuaalisen pinnan eli fotosfäärin lämpötila on ”vain” noin 5700K.



KUVA 17.10. Auringon korona täydellisen pimennyksen aikana (kuva käsitelty), Adler (2017). Kuvassa näkyvät magneettisten kenttäviivojen muodostamat kuviot koronassa ja avaruuteen pakeneva aurinkotuuli.



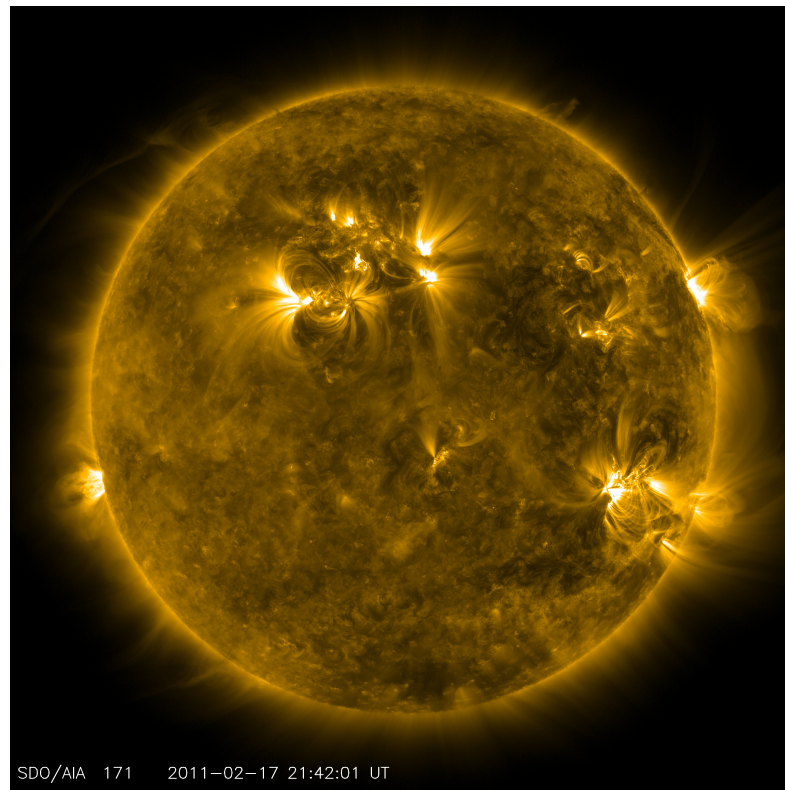
on aktiivisen tutkimuksen kohteena.

Korona, joka näkyy vain täydellisen auringonpimennyksen aikana, on niin kuuma, että se vuotaa jatkuvasti avaruuteen. Tämä plasma- eli hiukkasvirta voidaan maapallon lähellä havaita *aurinkotuulena*.

Auringon konvektiokerroksen sisällä ”elää” monimutkainen magneettikenttä, hieman samalla tavalla kuin Maan ytimen sulassa ulkoisessa kerroksessa. Aurinko ei pyöri kiinteän kappaleen tavoin, vaan korkeampien leveysasteiden vyöhykkeet laahaavat selvästi ekvaattorialueen perässä. Tämä, yhdessä magneettikentän kanssa, toimii monimutkaisena luonnollisena dynamona. Kuten Maan magneettikenttä, myös Auringon magneettikenttä voi kääntää suuntansa, mikä tapahtuu jaksollisesti, kerran noin 11 vuodessa.

Auringon kaasu on ionisoitua *plasmaa*, joka johtaa sähköä melkein suprajohtimen tavoin. Siksi kaasu ja magneettikenttä ovat kietoutuneet toisiinsa (*”frozen in”*) erottamattomalla tavalla. Aihetta tutkii tieteenala nimeltä *magnetohydrodynamiikka* (MHD), jonka rautaisannos esitetään liitteessä B.





KUVA 17.11. Auringonpilkkuja ja niiden magneettisia kenttäviivoja UV-valossa auringonpinnan yläpuolella. Auringonpilkut esiintyvät aina pareittain, magneettisina pohjois- ja etelänapoina. [NASA Solar Dynamics Observatory, Atmospheric Imaging Assembly](#).



Aktiivisen Auringon aikana näkyy sen pinnalla *auringonpilkkuja*, vahvan magneettikentän alueita, joissa konvektiokerroksen kenttä nousee pintaan. Pilkut syntyvät ja esiintyvät aina pareittain, magneettisina pohjois- ja etelänapoina. Pilkkujen magnetismi jarruttaa luonnollista konvektioliikettä ja näin estää energian pääsyä Auringon pintaan. Lämpötila on pilkkujen keskellä jopa pari tuhatta astetta alhaisempi kuin Auringon pinnalla keskimäärin<sup>12</sup>, noin 3000–4000 K.

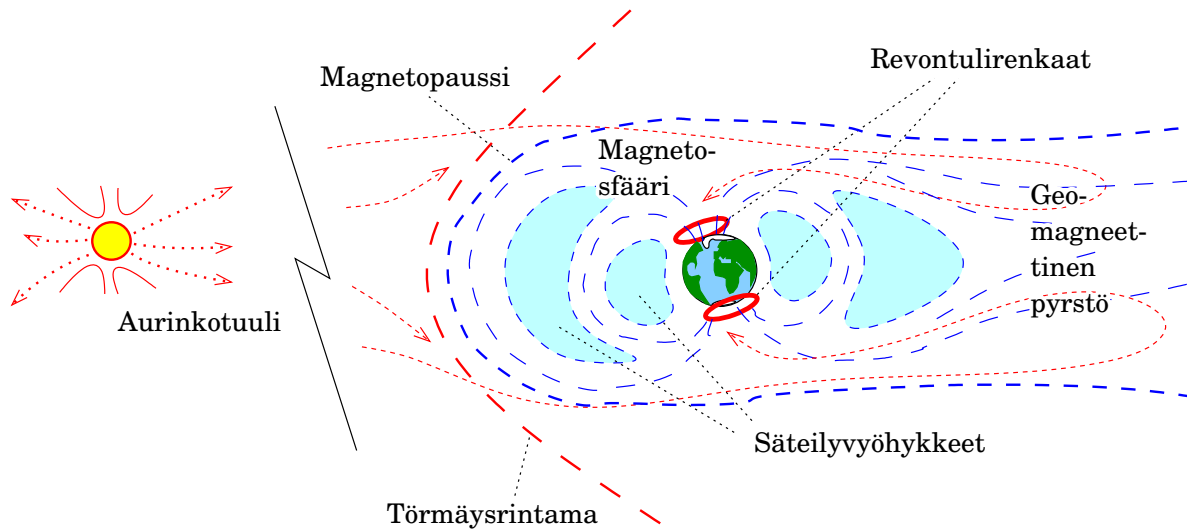
12

Auringonpilkkujen magneettikenttä ulottuu avaruuteen pilkkujen yläpuolella ja vaikuttaa siellä plasman liikkeisiin. Erikoiskuvauslaitteella<sup>13</sup> kentän voimaviivat saadaan näkyviin valoisina kaasujuovina. Kentän topologia voi yhtäkkiä muuttua (*reconnection*), jolloin kentältä vapautuva energia heittää kuumaa plasmaa avaruuteen. Auringonpurkauksen

13

<sup>12</sup>Kuitenkin yksikin suuri auringonpilkku, öiseen tähtitaivaaseen siirrettynä, olisi edelleen kirkkaampi kuin täysikuu!

<sup>13</sup>Kauniita kuvia ja videoita löytyy: [SOHO images](#); [SOHO MPEG movies](#).



KUVA 17.12. Avaruussää, magnetosfääri ja revontulet.

aikana syntyy ylimääräistä ultraviolettia- ja röntgensäteilyä, joka aiheuttaa Maan ionosfäärin alimmissa kerroksissa ylimääräistä ionisaatiota. Tämä lisää lyhyiden radioaaltojen imeytymistä ja näin häiritsee radioliikennettä.

Noin vuorokausi myöhemmin itse plasma saapuu Maan läheisyyteen, ja sen vuorovaikutus Maan oman magneettikentän ja ionosfäärin kanssa synnyttää revontulia. Nekin vaikuttavat radioliikenteeseen ja GPS-mittausten laatuun. Purkauksen aikana voi olla mahdotonta tehdä käyttökelpoisia GPS-mittauksia. Yleensäkin Auringon aktiivisuuden maksimin aikana GPS-havaintojen laatu on heikompi kuin ”rauhallisen” Auringon aikana.

Myös Maan säteilyvyöhykkeet koostuvat kuumasta plasmasta, nopeista, sähköisesti varatuista hiukkasista, joita Maan magneettikenttä pitää sullottuna ”magneettisessa pullossa”, [Wikipedia, Magnetosfääri](#).



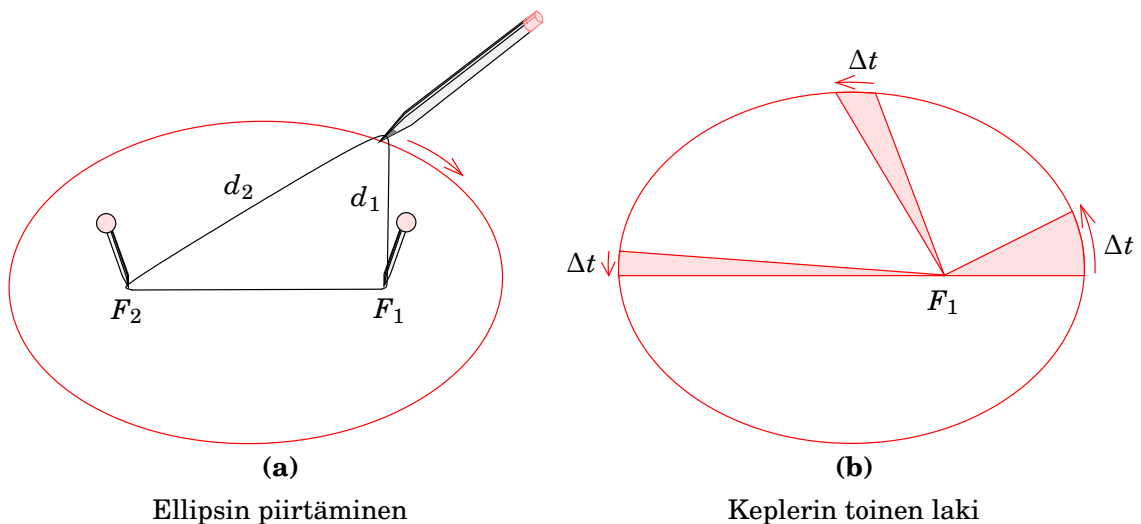
## 17.7 Satelliitin rataliike

Kuten maapallo kiertää Auringoa, satelliitin rataliike maapallon ympäri tapahtuu Keplerin<sup>14</sup> lakien mukaisesti. Asia sivuttiin jo [GPS-osuudessa](#) <sup>14</sup>  
**12.10.** Keplerin lait ovat:

- I** Satelliitti liikkuu Maan ympäri *elliptisellä* radalla *tasossa*. Maan massakeskipiste sijaitsee rataellipsin yhdessä polttopisteessä.

<sup>14</sup>Johannes Kepler (1571–1630) oli saksalainen tähtitieteilijä, matemaatikko ja mystikko.





KUVA 17.13. ← Ellipsi on sellaisten pisteiden joukko, joiden etäisyyksien summa  $d_1 + d_2$  kahdesta polttopisteestä  $F_1$  ja  $F_2$  on vakio. Tämä ominaisuus — seuraus siitä, että ellipsi on kartioleikkaus — todistetaan helpoiten Dandelinin pallojen avulla, [Wikipedia, Dandelin spheres](#).

Se myös merkitsee, että jos asettaa lampun elliptisen peilin toiseen polttopisteeseen, lampun kuva ilmestyy toiseen pisteeseen. Tästä polttopisteet saivat nimensä.

→ Keplerin toisen lain mukaisesti planeetan sädeviiva pyyhkii samassa ajassa  $\Delta t$  aina samansuuruisen alueen yli.

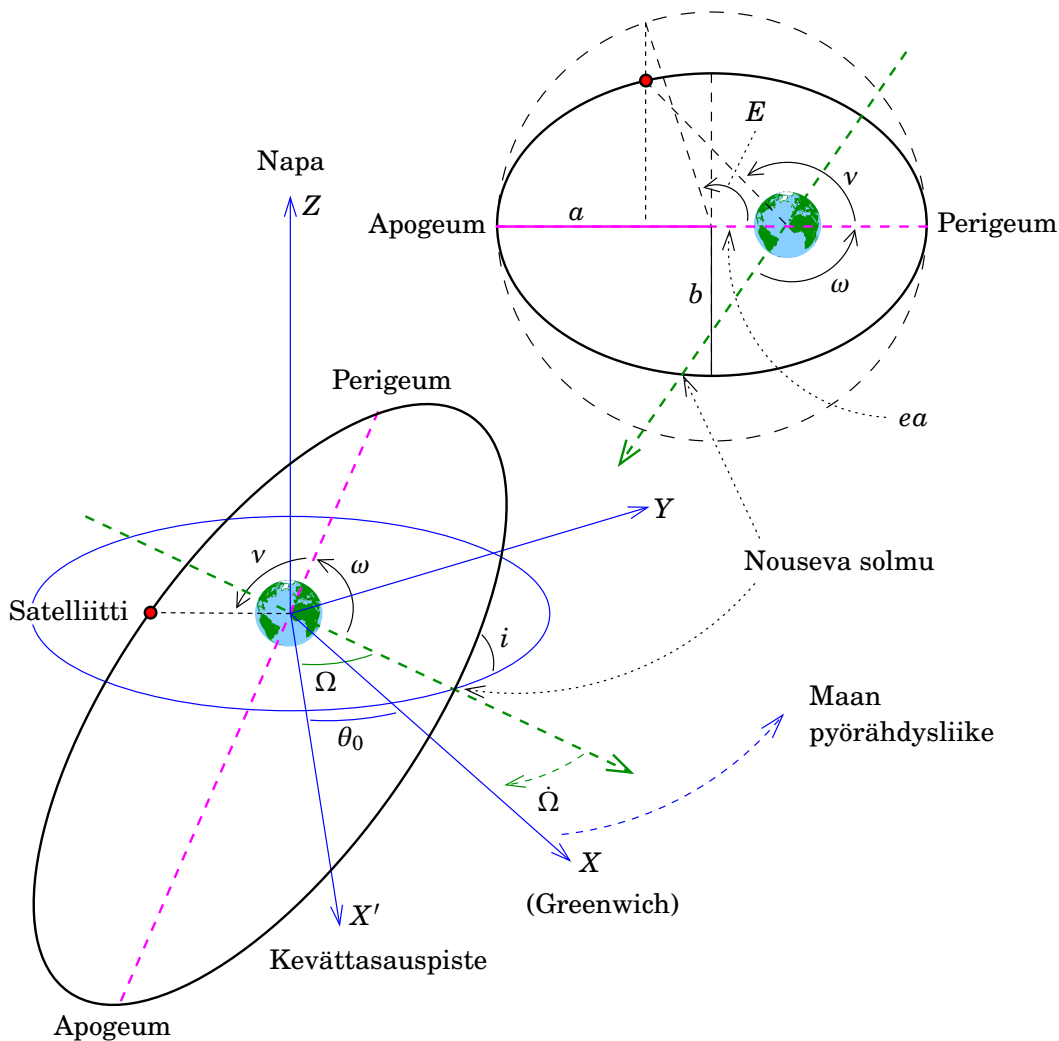


- II**    Satelliitin ja Maan keskipisteen välinen sädeviiva pyyhkii samassa ajassa aina saman pinta-alan yli (*pintalaki*).
- III**    Eri satelliittien kiertoaikojen (periodien) *neliöt* ovat samassa suhteessa kuin niiden rataellipsien isoakselien puolikkaiden *kuutiot*.  
 \_\_\_\_\_ Katso alla, yhtälö 17.1.

Satelliittirataa kuvaa kuusi *Keplerin rata-alkiota*, kuva 17.14. Liitteessä **C** rata-alkiot kuvataan yksityiskohtaisemmin. Kulma  $\theta_0$  on Greenwichin tähtiaika, joka kuvaa maapallon asentoa tähtitaivaaseen nähden.

Keplerin lait pätevät etenkin matalan radan tapauksessa vain likimäärin. Maapallon epätasainen massajakauma ja etenkin sen litistyneisyys aiheuttavat *ratahäiriöitä*. Niitä käytetään hyväksi Maan sisäisen massajakauman tutkimuksessa. Näin satelliittigeodesiasta on tullut verraton kiinteän Maan tutkimuksen apuväline.





KUVA 17.14. Keplerin rata-alkiot.

## 17.8 Satelliittiradan valinta

Satelliittiradan tason kaltevuus päiväntasaajan tasoon nähden eli *inkli-naatio* on tärkeä parametri satelliitin käyttötarkoituksen kannalta. Inkli-naatio on käytännössä sama kuin suurin mahdollinen pohjoinen tai eteläinen leveysaste, jonka yli satelliitti voi lentää. Jos esimerkiksi tiedetään, että tietyn satelliitin radan inkli-naatio on  $55^\circ$ , voidaan päätellä, että satelliitti ei koskaan tule putoamaan Suomen alueelle<sup>15</sup>.

15

Matalalla lentävien sää- ja kaukokartoitussatelliittien kannalta inkli-naation merkitys on se, että alue, jonka satelliitti voi kunnolla kartoittaa, on suunnilleen näiden leveysasteen ääriarvojen välillä.

<sup>15</sup>Oletetaan, että satelliitti ei kykene aerodynaamiseen lentoon ilmakehään palaamisen jälkeen.



TAULUKKO 17.1. Keplerin kolmas laki Maan satelliiteille.

Korkeus (km)	Periodi	Huomautus
0	84 <sup>m</sup> 29 <sup>s</sup>	Schulerin periodi
400	92 <sup>m</sup> 34 <sup>s</sup>	
800	100 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup>	
20 183	11 <sup>h</sup> 58 <sup>m</sup>	GPS
35 785	23 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup>	Geostationaarinen
376 603	27 <sup>d</sup> 07 <sup>h</sup>	Kuu

Korkealla lentävien satelliittien kohdalla tämä rajoitus ei päde. Esimerkiksi geostationaariset satelliitit voivat hyvinkin kuvata pohjoismaista aluetta. Kuvauskulma ei kuitenkaan ole hyvä.

Satelliittiradan korkeuden valinta tapahtuu Keplerin rataliikelakien avulla. Keplerin kolmas laki kuuluu:

$$GMP^2 = 4\pi^2 a^3, \quad (17.1)$$

jossa  $a = a_e + h$  on satelliittiradan isoakselin puolikas, keskimääräinen etäisyys Maan keskipisteestä. Suuretta  $h$  taas kutsutaan satelliitin keskikorkeudeksi.  $P$  on radan kiertoaika eli periodi.

Peri- ja apogeumin *korkeudet* Maan pinnasta lasketaan muodollisesti seuraavasti:

$$h_P = (1 - e)a - a_e, \quad h_A = (1 + e)a - a_e \quad \implies h_A - h_P = 2ea.$$

Tässä  $a_e$  on Maan päiväntasaajan säde, [GRS80](#)-vertausellipsoidin mukaan 6378 137 m.

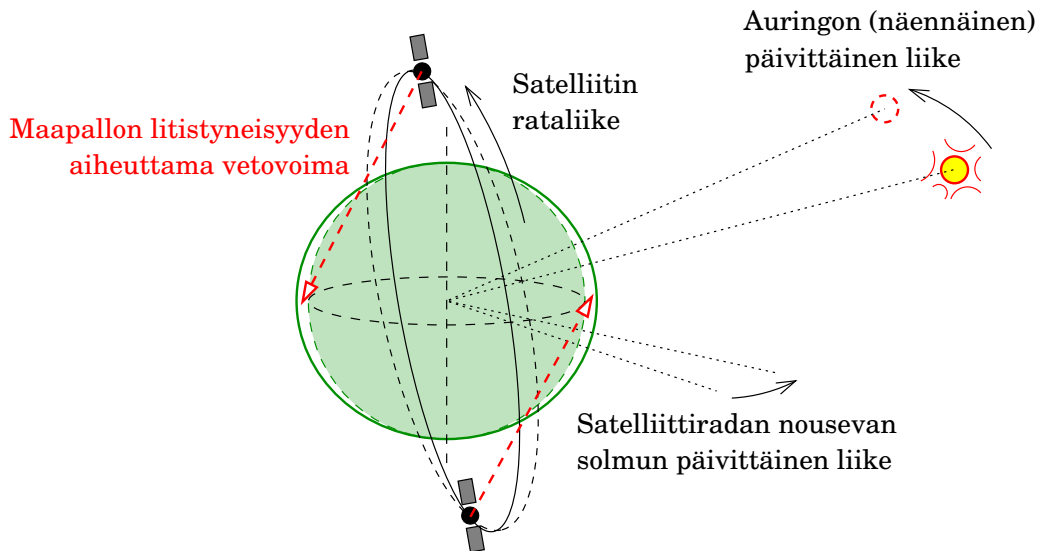


## 17.9 Satelliittiradan prekessio ja aurinkosynkrooni rata

Maan muoto vaikuttaa satelliitin rataliikkeeseen. Esimerkiksi suure  $J_2$ , *dynaaminen litistyneisyys*, jonka arvo on  $J_2 = 1082,6267 \cdot 10^{-6}$ , on suurin näistä monesta pallofunktio kertoimesta, jotka yhdessä kuvaavat Maan muotoa ja vaikuttavat satelliittien liikkeisiin. Kertoimen  $J_2$  tapauksessa yksi tärkeä vaikutus on se, että satelliitin ratataso kiertää tietyllä nopeudella Maan pyörähdysakselin ympäri. Ilmiö on nimeltään *ratatason prekessio*. Tämän takia, jos satelliitti lentää joka päivä saman paikan yli, se tekee näin joka päivä useita minutteja aikaisemmin. Prekession nopeutta kuvaava yhtälö on ympyrän muotoiselle  $a$ -säteiselle radalle

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 J_2 \cos i,$$





KUVA 17.15. Aurinkosynkrooni rata.

jossa  $a_e$  on Maan päiväntasaajan säde ja  $i$  radan inkliinaatio- eli kaltevuuskulma päiväntasaajan suhteen. Numeroarvojen sijoitus antaa

$$\frac{d\Omega}{dt} = -1,31894 \cdot 10^{18} [\text{m}^{3,5} \text{s}^{-1}] \cdot \frac{\cos i}{a^{3,5}}.$$

Jos laskuesimerkiksi sijoitetaan tähän satelliitin korkeudeksi

$$h = 800 \text{ km} \implies a = 6378137 \text{ m} + 800000 \text{ m} = 7178137 \text{ m},$$

saamme

$$\frac{d\Omega}{dt} = -1,33102 \cdot 10^{-6} [\text{rads}^{-1}] \cdot \cos i = -6,589 [\text{vrk}^{-1}] \cdot \cos i. \quad (17.2)$$

Käytännön syistä (aurinkopaneelit!) valitaan satelliittirata usein niin, että ratataso kiertää Auringon vuosittaisen näennäisliikkeen mukana:

$$\frac{360^\circ}{365,25 \text{ vrk}} = 0,9856 [\text{vrk}^{-1}].$$

Jos ratatason inkliinaatio valitaan välissä  $96^\circ - 102^\circ$ , korkeudesta riippuen, Maan dynaaminen litistyneisyys  $J_2$  aiheuttaa juuri sopivan ratatason kiertoliikkeen (*no-shadow-rata*, aurinkosynkrooni rata).

Korkeus (km)	Kriittinen inkliinaatio
500	97°,4
750	98°,4
1000	99°,5
1500	102°,0



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Tähtivuorokausi on  $23^h56^m4^s$ . Miksi se on siviilivuorokautta, 24h, lyhyempi?
- 2) Mikä on ekliptika? Mistä nimi tulee?
- 3) Mikä on kevätpäiväntasaus?
- 4) Mikä on neljän vuodenajan mekanismi?
- 5) Mikä on prekessio, mikä nutaatio? Mikä ne aiheuttaa?
- 6) Mistä Ravun ja Kauriin kääntöpiirit saivat nimensä?
- 7) Mitä geometrasta suuretta Greenwichin näennäinen tähtiaika (GAST) edustaa?
- 8) Kuvaile taivaanpallon koordinaatit, rektaskensio ja deklinaatio.
- 9) Mikä on taivaankappaleen tuntikulma? Miten se liittyy sen rektaskensioon?
- 10) Mitä merkitsee tähden ylä- ja alakulminaatio? Voidaanko ne molemmat havainnoida aina (jos taivas on kirkas)?
- 11) Mikä on meridiaanin läpikulku ja miten se havainnoidaan?
- 12) Selosta Väisälän tähtikolmiomittaus.
- 13) Kuvaile napaliikkeen komponentit ja vuorokauden pituuden vaihtelut. Miten ne havainnoidaan, historiallisesti ja nykyisin?
- 14) Millä tavalla prekessio ja nutaatio eroavat napaliikkeestä?
- 15) Mikä on plasma?
- 16) Mikä on aurinkotuuli? Onko se sub- vai supersoninen virtaus? Miksi?
- 17) Mikä on *Carringtonin tapahtuma*? Kysy Googlelta.
- 18) Putoaisiko Kansainvälisen avaruusaseman hylky (jos sitä ei hallitusti ajeta alas) koskaan Suomen alueelle? Miksi / miksei?
- 19) Miten saadaan aikaan aurinkosynkrooni rata? Miksi se on käyttökelpoinen?



# Geodesia ja geofysiikka

## 18

Satellites have revolutionized oceanography. This is not so much because of the instrument packages (remarkable as they are) but the ability to sample adequately, and to sample globally (two different things). Take the US–French altimetry mission TOPEX/POSEIDON that sampled the topography of the sea surface at about 7 km intervals to an astonishing precision of one-inch [...]. When you go over the list of accomplishments, you find that what really made the difference was the sampling. I consider this the most successful ocean experiment of all times. [...]

---

Walter Munk (2002)<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Walter Heinrich Munk (1917–2019) oli vaikutusvaltainen yhdysvaltalainen fyysisen meritiiteen tutkija.



### 18.1 Geodynamiikka

*Geodynamiikka* on geofysiikan tutkimusala, joka tutkii Maassa tapahtuvia liikkeitä, kuten laattatektoniikkaa, postglasiaalista maannousua ja muita maankuoren paikallisia tai globaalisia, luonnollisia tai ihmisten aiheuttamia liikkeitä. Tavallisesti myös Maan pyörähdysliikkeen tutkimus lasketaan geodynamiikkaan.

Geodynamiikan tutkimukseen soveltuvista havaintotekniikoista käsiteltiin aikaisemmin jo satelliittipaikannus. Kaikki GNSS-menetelmät — GPS, GLONASS, BeiDou ja Galileo — soveltuvat tarkkoihin geodynamiikan mittauksiin.

Kuitenkin tieteellisessä tutkimuksessa halutaan aina käyttää mahdollisimman monia erilaisia tekniikoita saman ilmiön tutkimiseksi niin

monipuolisesti kuin suinkin mahdollista. Siksi geodynamiikan tutkimuksessa käytetään myös joitakin hyvin tarkkoja, mutta myös hyvin kalliita, tutkimusmenetelmiä:

- satelliittilasertutka
- laseretäisyysmittaus Kuuhun
- VLBI, pitkäkantainterferometria radioteleskooppien avulla
- DORIS, Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite (IAG:n DORIS-palvelu [International DORIS Service](#)), ranskalainen satelliittiratojen määrittäjäjärjestelmä, joka palvelee geodesian ja geodynamiikan tutkimusta.

Satelliittilasertutka ja kuulasertutka ovat hyvin samanlaisia tekniikoita. Lasersatelliitit ovat painavia ja tiheitä pronssista tai köyhdytetystä uraanista tehtyjä massiivisia palloja, jotka ovat heijastusprismojen (kuutioprismojen) peitossa. Kuun pinnalle jäi Apollo-astronauttien jäljiltä muutama prismojen peitossa oleva heijastuspaneeli, jotka palvelevat samaa tarkoitusta. Myös Neuvostoliiton miehittämättömien kuulentojen jäljiltä on Kuun pinnalle jäänyt heijastusprismoilla varustettuja kulkuneuvoja (Lunohod 1 ja 2).

Matka satelliittiin tai Kuuhun määritetään mittaamalla valopulssin edestakainen kulkuaika, kertomalla se valon nopeudella ja jakamalla kahdella. Ilmakehän vaikutus signaalin kulkuun on otettava huomioon. Toisin kuin GNSS, laseretäisyysmittaustekniikka mittaa *oikeita etäisyyksiä*, ilman kellotuntemattomia, eikä pseudoetäisyyksiä. Tästä syystä maailmanlaajuinen laserasemaverkko on geometrisesti jonkin verran vahvempi kuin globaali GNSS-verkko. Näin se antaa arvokkaan lisän globaalin seurantaverkon geometriseen vahvuuteen.

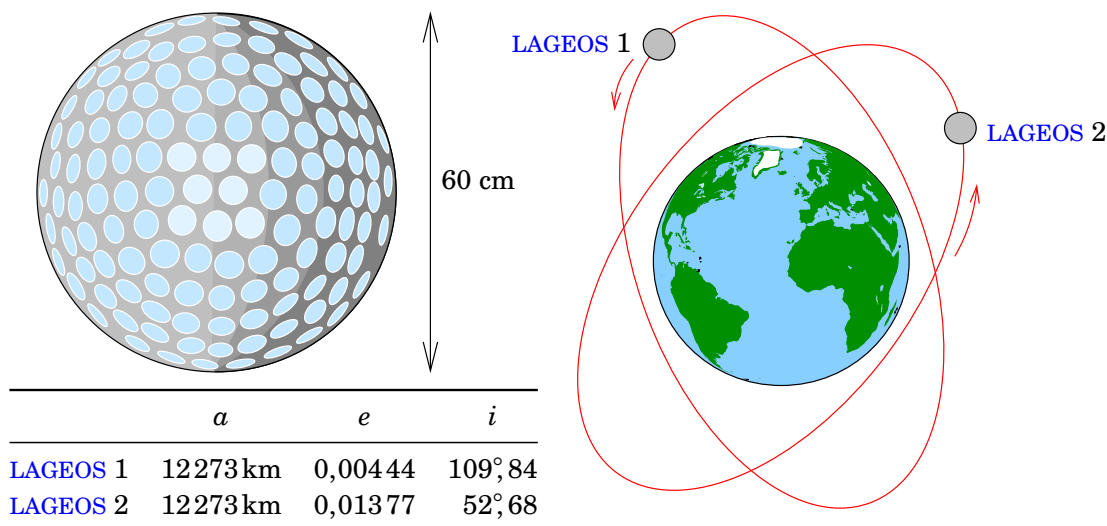
VLBI, *very long baseline interferometry* eli pitkäkantainterferometria, käyttää kaukaisten radiolähteiden eli *kvasaarien* radiosignaaleja. Kvasaarit ovat niin kaukaisia ja kompakteja<sup>1</sup>, että ne ovat käytännössä pistemäisiä lähteitä. Siksi niiden lähettämän, kohinan kaltaisen radio-signaalin aaltomuoto on tarkasti sama, riippumatta siitä, missä päin maapalloa se otetaan vastaan.

VLBI-havainnot suunnitellaan huolellisesti. Kampanjoihin osallistuu

---

<sup>1</sup>Vallitsevan teorian mukaan kvasaarit ovat supermassiivisia mustia aukkoja kaukais-  
ten, siis nuorien, galaksien ytimissä. Säteily syntyy, kun aukko imee ainetta ympäris-  
töstään. Myös oman Linnunratamme ytimessä on musta aukko, Sagittarius A\*, joka  
säteilee kuitenkin paljon heikommin.



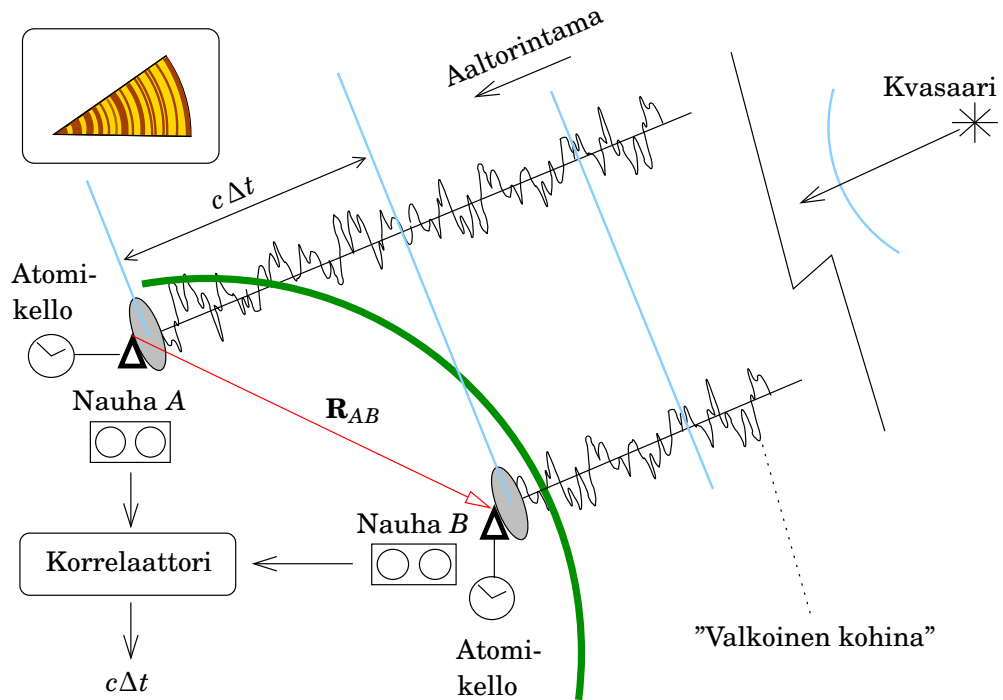


KUVA 18.1. LAGEOS-satelliitti. Satelliitin läpimitta on 60 cm, ja se koostuu ulkoisesta alumiinipallosta, johon on kiinnitetty 426 kuutioprismaheijastinta (katso alaosio 7.4.3), ja pronssista tehdystä sisäpallosta. Satelliitin massa on noin 400 kg. LAGEOS 1 -satelliitti kantaa myös Carl Saganin suunnittelemaa, mantereiden nykysijaintia kuvaavaa karttaa viestiksi tulevaisuuden mahdollisesti muukalaisille löytäjille (Wikipedia, The LAGEOS time capsule). Oikealla LAGEOS 1 ja 2 -satelliittien radat.

useita radioteleskooppeja ympäri maailmaa. Kaikki osallistujat suorittavat sovitun ohjelman, jossa havaitaan samat kohteet samoilla hetkillä tietyn taajuuskaistan sisällä.

Signaalin tallennukseen on olemassa erilaisia ratkaisuja ja laitesukupolia. ”Mark II” käytti ihka tavallisia VHS-videonauhoja. Signaali muunnettiin erikoislaitteiston avulla videosignaalksi ja tallennettiin nauhalle. Nykyisin tallennus tapahtuu usein digitaalisesti kovalevypakalle (”mäyräkoiralle”), ja myös suora siirto Internetin kautta UDP/IP-protokollalla voittaa alaa.

Tallenteet luetaan ja *korreloidaan* keskenään etsimällä se aikasiirtymä, jolla sekvenssien vastaavuus tulee ilmeiseksi, aivan kuten kahden puukappaleen vuosirenkaita voidaan vertailla keskenään (kuva 7.7). Korrelaatiolaskenta on laskentaintensiivinen prosessi, joka aikanaan vaati erikoislaitteistoa. Korrelaatiolaskun tuloksena saadaan kahden radioteleskoopin *vastaanottoaikojen välinen erotus*  $\Delta t$ , joka on siis tämän tekniikan havaintosuure. Sen vastaava etäisyys  $c \Delta t$  voidaan tulkita myös radioteleskooppien  $A$  ja  $B$  välisen vektorin  $\mathbf{R}_{AB}$  projektioksi kvasaarin



KUVA 18.2. Pitkäkantainterferometrian toimintaperiaate.

suuntavektorille, katso kuva 18.2.

Menetelmä vaatii toimiakseen, samalla tavalla kuin kuuluisa Väisälän interferenssimenetelmä, että signaali on satunnainen (*valkoinen kohina*): koherenssipituuden on oltava lyhyt. Sama pätee myös GPS-koodimittaukselle, jolloin kohina generoidaan keinotekoisesti *pseudosatunnaiskoodina*.

Suorittamalla mittaukset useiden eri kvasaarien avulla voidaan ratkaista kahden radioteleskoopin A ja B välinen sijaintierovektori  $\mathbf{R}_{AB}$  geosentrisessä — joko inertiaalisessa eli tähtitaivaaseen sidotussa tai Maan mukana pyörivässä — koordinaatistossa. Samoin kuin satelliittilaserhavainnot, vahvistavat myös VLBI-havainnot globaaliset geodynamiikan seurantaverkot. Myös Suomessa suoritetaan geodeettisia VLBI-havaintoja Metsähovin radioteleskoopilla, kuva 18.3.

Yksi olennainen ero, toisaalta VLBI:n ja toisaalta sekä laser- että GNSS-havaintojen välillä, on että Maan massakeskipiste ei ole mukana VLBI-havaintoyhtälöissä. Kvasaarit ovat niin valtavan kaukaisia, että Maan massakeskipisteen sijainnin pieni muutos vaikuttaisi tarkasti samalla tavalla VLBI-vektorin molemmissa päissä olevien radioteleskooppien mittauksiin. Toisin sanoen vaikutus lopputulokseen olisi nolla.

Toisaalta Maan hetkellisen pyörähdysakselin suunta on mittausgeometriassa läsnä, ja GNSS:n lisäksi VLBI:stä on tullut suosittu tapa seurata





KUVA 18.3. Metsähovin tutkimusasemalla sijaitseva Maanmittauslaitoksen Paikkatietokeskus FGI:n radioteleskooppi geodeettisia pitkäkanta-interferometrisia (VLBI) havaintoja varten. Teleskooppi on läpimitaltaan 13,2m ja kuuluu kansainväliseen VLBI Global Observing System -järjestelmään (VGOS).

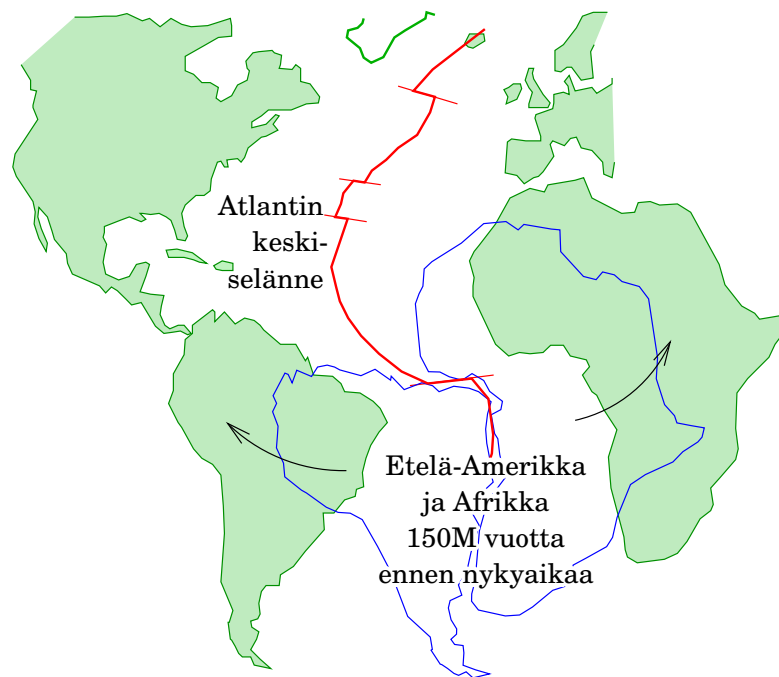
Maan pyörähdysliikettä, sekä napaliikettä että vuorokauden pituuden vaihteluja.

Metsähovin tutkimusaseman lähellä, kolmen kilometrin päässä Sjöskullassa, radioteleskoopilta maiseman suojassa, on DORIS-majakka, joka sisältää aktiivisen radiolähettimen. Ranskalainen DORIS (Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite) on epätavallinen järjestelmä: *havaintoasemat ovat aktiivisia*, ja satelliitit vastaanottavat vain passiivisesti niiden signaalit. Ratkaisun etuna on datankeruun keskittäminen. Ympäri maailmaa on 60 DORIS-asemaa, ja asemia on kaikilla suurimmilla mannerlaatoilla.



## 18.2 Laattatektoniikka

Saksalainen Alfred Wegener<sup>2</sup> ehdotti jo vuonna 1912, että mantereet, <sup>2</sup> maankuoren palaset, liikkuisivat hitaasti pehmeään Maan sisuksen pääl-



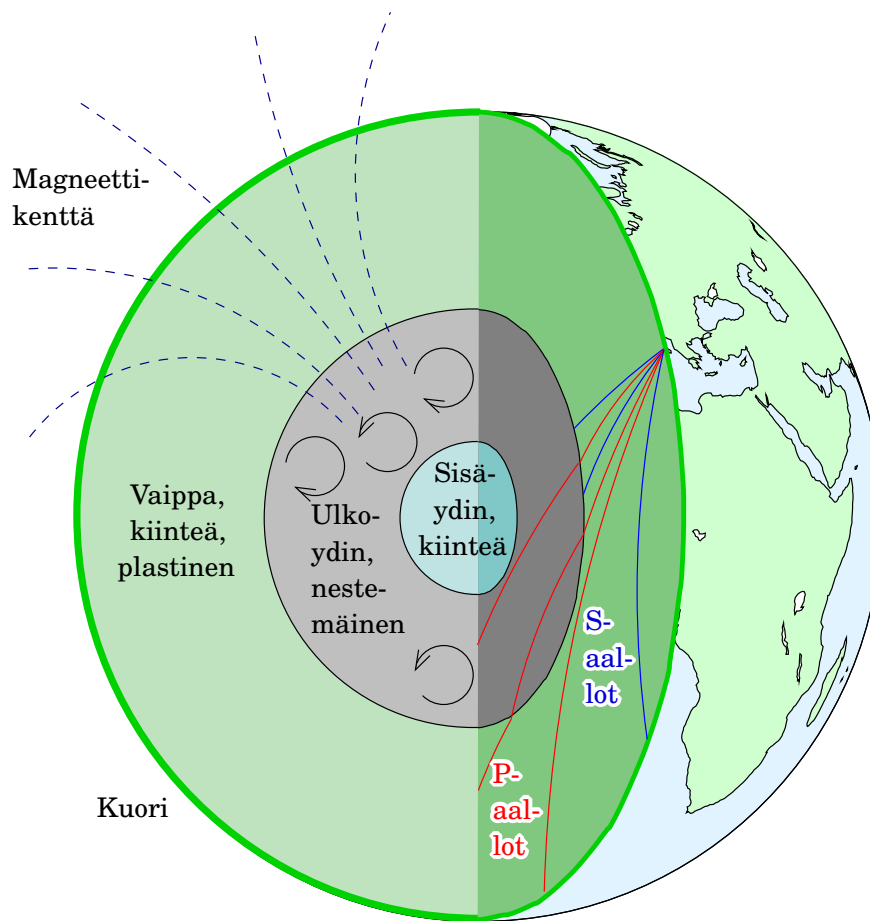
KUVA 18.4. Alfred Wegenerin mannerliiketeoria ja Atlantin keskiselänne.

lä, kuten jäälautat merellä. Todisteeksi hän tarjosi mantereiden rantaviivojen muotoja, jotka sopivat ihmeen hyvin yhteen (kuva 18.4). Myös kivilajit ja fossiilit ovat usein hyvin samanlaisia rantaviivojen vastaavissa paikoissa.

Kukaan ei häntä uskonut, eikä asiaa auttanut, että seismologian avulla todettiin, että Maan vaippa on teräksenkova: poikittaisissa — sivusuunnassa värähtelevät — *S-aallot* kulkevat vain kiinteässä aineessa, ja ne tiettävästi kulkevat erittäin hyvin Maan vaipassa.

Vasta 1960-luvulla teoria sai enemmän kannatusta etenkin Maan magneettikentän tutkimuksesta. Siihen aikaan oli jo mahdollista mitata paikallinen magneettikenttä lentokoneesta, sotilasteknologialla, joka kehitettiin sukellusveneiden löytämiseksi. Pienenpienet kentän vaihtelut kartoitettiin, ja karttoihin ilmaantui kaikkialla *rinnakkaisia magnetisointijuovia*, katso kuva 18.6. Juovat kulkevat samaan suuntaan kuin Atlantin keskiselänne tai muut vastaavat selänteet muissa valtamerissä. Myös niiden kuvio on kaikkialla sama, vaikkakin joskus leveämpi, joskus kapeampi — kuten saman ajanjakson vuosirenkaat eri puissa, taulu 12.2.

<sup>2</sup> Alfred Lothar Wegener (1880–1930) oli saksalainen meteorologi, geofyysikko ja Grönlannin tutkija. Grönlannissa hän myös menehtyi 50-vuotiaana, ja tuli haudatuksi mannerjäätikköön.

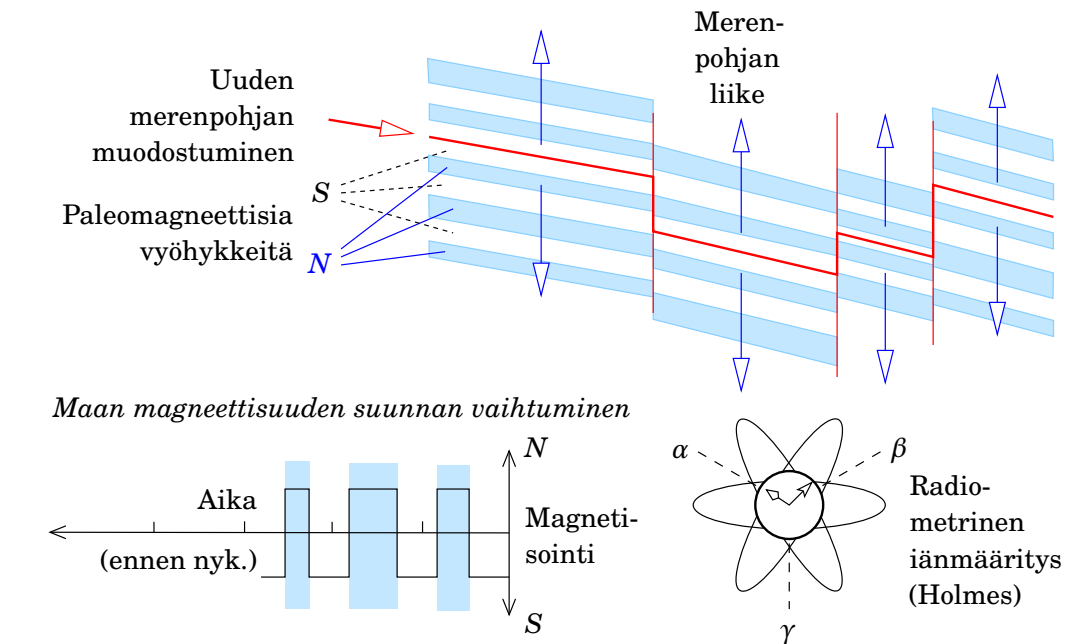


KUVA 18.5. Maan sisäinen rakenne. Konvektiovirtaukset ulko-ytimessä generoivat ne sähkövirrat, jotka pitävät yllä Maan magneettikenttää — luonnollisen dynamon teoria. Ydin koostuu melko varmasti rautanikkeliseoksesta, jossa kevyemmät alkuaineet esiintyvät epäpuhtauksina.

Teoreettinen selitys on, että uutta maankuorta — merenpohjaa — muodostuu koko aikaa Atlantin keskiselänteellä: kuuma, sula magma nousee, jäähtyy ja kovettuu, ja magmassa olevat rautamalmihiukkaset kääntyvät pysyvästi sen hetken Maan magneettikentän suuntaisiksi.

Tällä hetkellä on niin, että Maan pohjoinen magneettinen napa — Kanadassa — on fysiikan mukaan etälänapa *S*; eteläinen *N*-napa sijaitsee Tasmanian tienoilla. Nämä roolit vaihtuvat keskenään epäsäännöllisin välein, noin kerran miljoonassa vuodessa. Vaihtelevat suunnat tallentuvat merenpohjaan samalla tavalla kuin ääni tallentuu nauhurin magneettinauhalle.

Maan sisäinen rakenne, niin hyvin kuin me sen tunnemme, esitetään kuvassa 18.5.



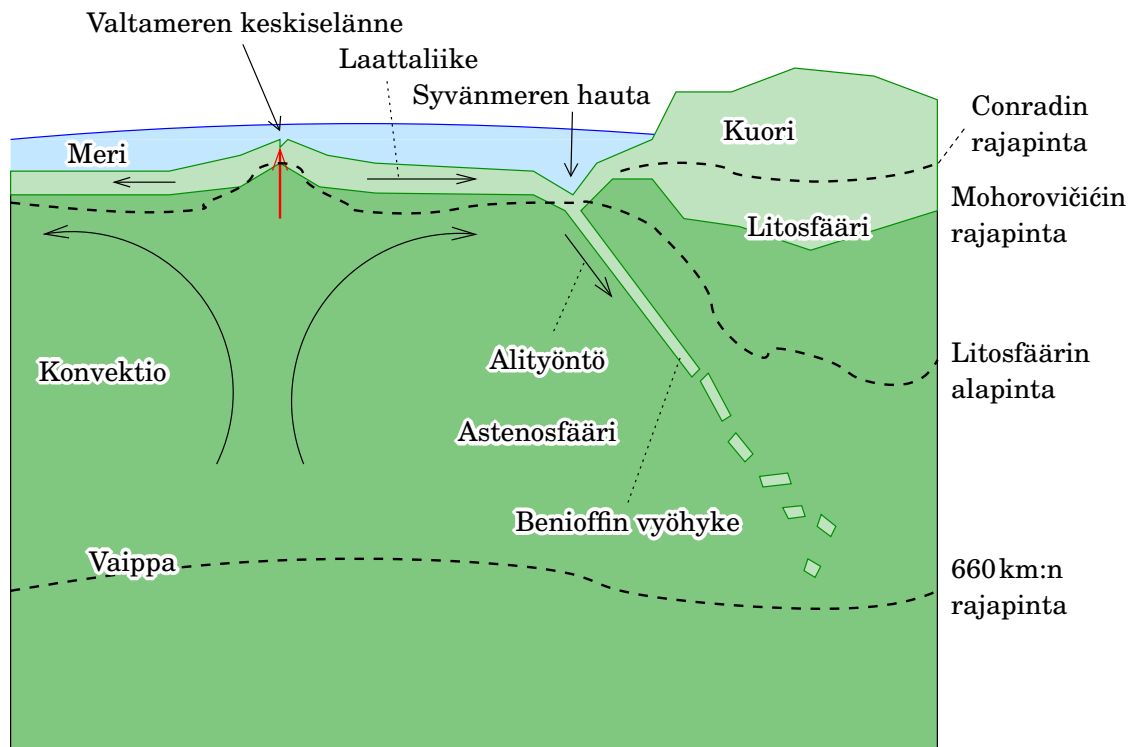
KUVA 18.6. Paleomagnetismi ja merenpohjan leveneminen.

<sup>3</sup> Samanaikaisesti kehitti brittiläisgeologi Arthur Holmes<sup>3</sup> *radiometrisen iänmäärittämenetelmän*, joka hyödyntää erilaisten maankuoressa esiintyvien alkuaineiden radioaktiivisten isotooppien säännöllistä hajoamistahtia geologisena kellona (Lewis, 2000). Käyttökelpoisten hajoamisprosessien joukossa on kalium  $40 \rightarrow$  argon 40, puoliintumisaika 1,25 miljardia vuotta, uraani  $238 \rightarrow$  lyijy 206, 4,47 miljardia vuotta, ja uraani  $235 \rightarrow$  lyijy 207, 710 miljoonaa vuotta.

Mittaamalla hajoamistuotteen ja alkuperäisisotoopin pitoisuudet voidaan päätellä, paljonko aikaa on kulunut kiven tai mineraalin kiinteytymisen jälkeen. Näin määritetyt merenpohjan eri paikkojen iät sopivat erinomaisesti yhteen magneettijuovien antaman kuvion kanssa: mitä pidempi matka keskiselänteeltä, sitä vanhempi on merenpohja.

Sanotaan, että *mannerlaatat* liikkuvat, mutta laattoihin kuuluu yhtä hyvin merenpohjaa. Puhutaan Euraasian laatasta, vaikka se sisältää myös koko Pohjois-Atlantin merenpohjan Atsorien pohjoispuolella Atlantin keskiselänteen itäpuolella. Kyse on hyvin hitaista *konvektioliikkeistä*, jotka kuljettavat maankuoren laatat mukanaan. Nopeudet vaihtelevat muutamasta senttimetristä vuodessa jopa kymmeneen senttiin. Konvektioliikkeen tarkka muoto on edelleen epäselvä: tapahtuuko se koko vaipan kautta vai kahdessa kerroksessa?

<sup>3</sup>Arthur Holmes [FRS FRSE](#) (1890–1965) oli brittiläisgeologi, radiometrisen iänmäärittäksen ja laattatektoniikan mekanismien ymmärryksen pioneeri.

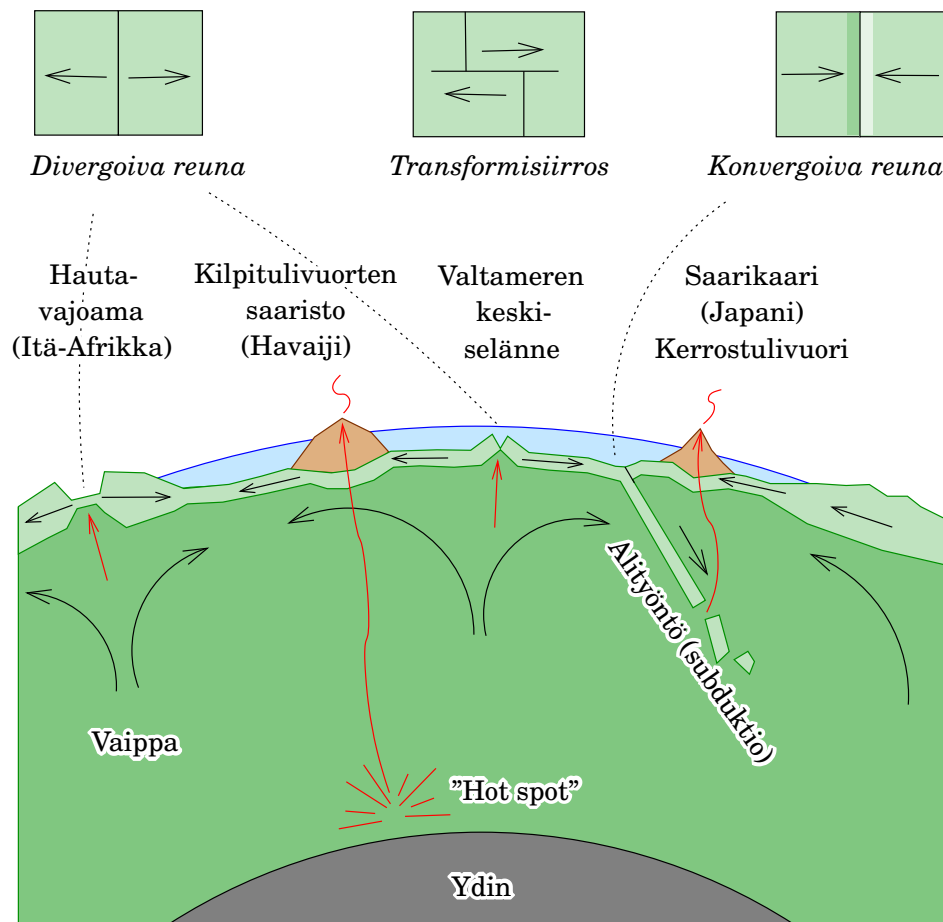


KUVA 18.7. Maaplaneetan laattatektoniikka.

Konvektiota ylläpitävä lämpöenergia tulee kahdesta lähteestä: radioaktiivinen hajoaminen ja ”alkulämpö”, engl. *primordial heat*, edelleen jatkuva jäähtyminen ja kerrostuminen Maan muodostumisen jälkeen. Molempien osuuksien uskotaan olevan suunnilleen yhtä suuria ([Wikipedia, Earth's internal heat budget](#)). Maan ytimen tuottama lämpö on kokonaan *primordial*: kiinteä sisäydin kasvaa edelleen nestemäisen ulkoytimen kustannuksella.

Konvektioteoria esitetään kuvassa 18.7 ja lisää mannerliikkeen mekanismin yksityiskohtia kuvassa 18.8. Atlantin keskiselänteellä (ja Tyynenmeren ja Intian valtameren jne. keskiselänteellä) muodostuu uutta merenpohjan kuorta sulasta magmasta, jota nousee Maan vaipasta ylös, vaikka Maan vaippa itse *ei ole nestemäinen*. Valtamerten reunoilta löytyy puolestaan *syvänmeren hautoja*, joiden alla meren kuori sukeltaa alas vaippaan (*alityöntö* eli subduktio).

Tarkassa geodeettisessa työssä mannerlaattaliike on otettava huomioon. Liikkeen nopeuden laskemiseksi voidaan käyttää [NUVEL](#)-malleja, jotka taulukoivat jokaisen laatan liikkeen *kiertoliikkeenä* annetun *navan* ympäri annetulla kiertonopeudella. Malli [NUVEL-1A](#) ([DeMets ym., 1994](#)) on laskettu geologisesta tutkimusaineistosta. Tulokset sopivat mittaus-epävarmuuksien rajoissa yhteen [GPS:n](#) ja muiden menetelmien avulla



KUVA 18.8. Laattatektoniikan mekanismit, laattojen reunat ja tulivuoritoiminta. Maan kuoren paksuus on liioiteltu. ”Syvä hot spot” -hypoteesi ei ole kaikkien geofysikoiden hyväksymä.

saatujen tulosten kanssa.

Vuosien saatossa on laskettu parannettuja laattaliikemalleja, katso [UNAVCO, plate-motion calculator](#).



### 18.3 Postglasiaalinen palautusliike (GIA)

Monella arktisella alueella Maan pinta nousee hitaasti viime jääkauden päättymisen seurauksena. Kyseessä on postglasiaalinen palautusliike eli ”glacial isostatic adjustment” (GIA). Arktisen alueen ulkopuolella ilmiö näkyy maanpinnan vajoamisena periglasiaalisella pullistuma-alueella (*periglacial bulge*). Mannerjään massojen vaihtelun aiheuttama merenpinnan vaihtelu vaikuttaa maailmanlaajuisesti.

Mallintaessa kiinteän Maan vaste jään vaihtelevaan kuormaan on otettava huomioon seuraavat vastemuodot:



**Elastinen** Kappale reagoi heti ja palautuu alkuperäiseen muotoonsa, kun kuormitus häviää. Esimerkiksi jousi, tennispallo.

**Plastinen** Kappale muuttaa muotoaan hitaasti ja jatkuvasti. Se ei palaudu alkuperäiseen muotoonsa, kun kuormitus häviää. Esimerkiksi siirappi, muotoilusavi. Plastisen aineen vastusta deformaatiolle luonnehditaan *viskositeetiksi*.

**Viskositeetti** Mitä kiinteämpi aine, sitä suurempi *viskositeetti-arvo*. Yksikkö Pas (pascal sekunti) eli  $\text{Ns/m}^2$ .

Postglasiaalisen maannousun fysikaalinen luonne on *plastinen* muodonpalautus. Ilmiötä tutkitaan, koska se tekee *Maan vaipan viskositeettiarvojen määrittämisen* mahdolliseksi. Saadut tulokset viittaavat seuraavaan rakenteeseen:

- 1) ”kansi”, *litosfääri*, paksuus 50–100 km, korkea (käytännössä äärettömän) viskositeetti, reagoi puhtaasti elastisesti<sup>4</sup>
- 2) litosfäärin alla, *astenosfääri*, suhteellisen alhainen viskositeetti,  $10^{20}$ – $10^{21}$  Pas, paksuus muutama sata km
- 3) astenosfäärin alla sijaitsee alempi vaippa, suhteellisen korkea viskositeetti, luokkaa  $10^{22}$  Pas tai vieläkin korkeampi.

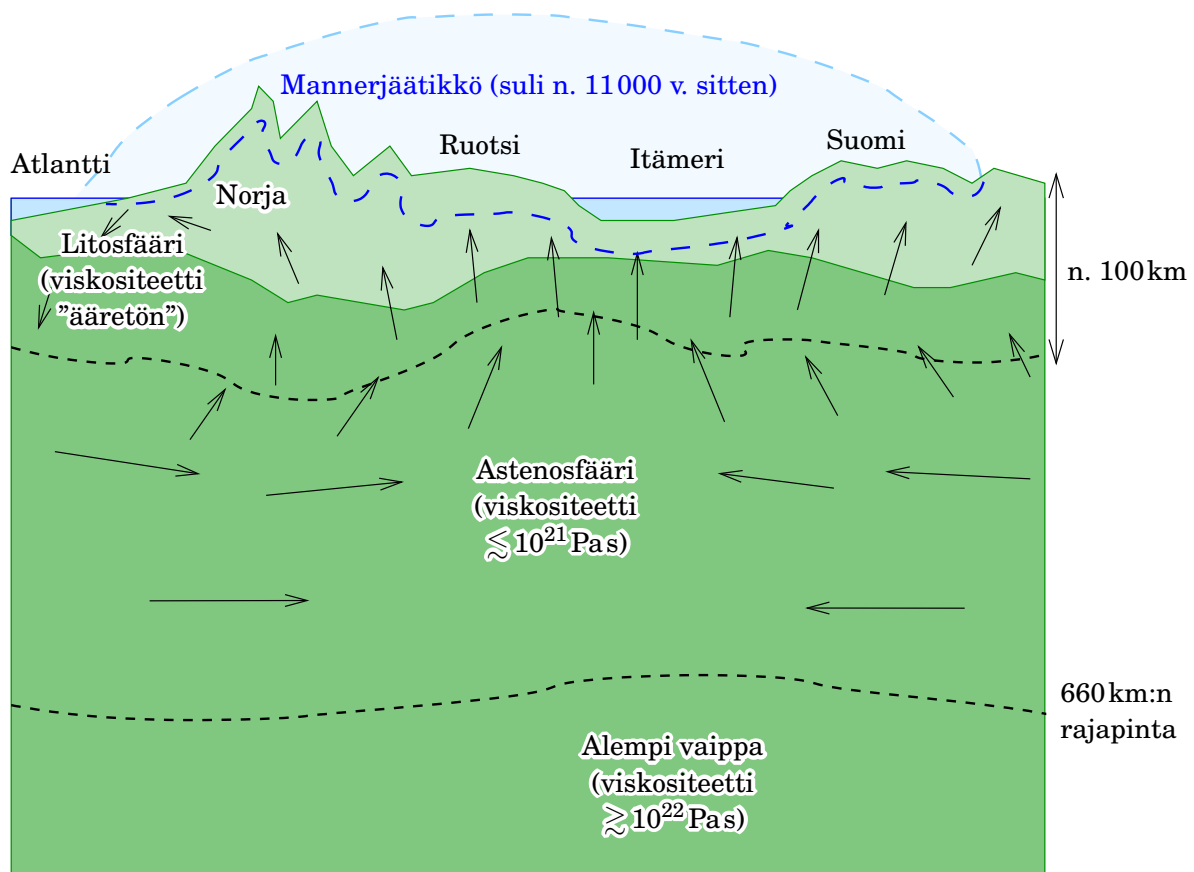
Yllä annetut numeroarvot ovat hyvin epävarmoja ja voivat muuttua aktiivisen tutkimuksen seurauksena.

Vertailun vuoksi: juoksevan veden viskositeetti, lämpötilassa  $20^\circ\text{C}$ , on 0,001 Pas; nestemäisen natriumin, jota käytetään jäähdytysaineena hyötöreaktoreissa, 0,0007 Pas sen sulamispisteessä  $98^\circ\text{C}$ . *Pien* viskositeetti taas määritettiin kuuluisassa ja edelleen jatkuvassa kokeessa (Edgeworth ym., 1984), tuloksena  $(2,3 \pm 0,5) \cdot 10^8$  Pas.

### Esimerkki: Fennoskandian maannousu

Maa nousee Suomessa, kuten myös Ruotsissa, Norjassa, Tanskassa, Skotlannissa ja Kanadassa. Kaikki nämä pystyliikkeet johtuvat viime jääkauden jälkeisestä *mannerjätiköiden* sulamisesta noin 11 000 vuotta sitten. Fennoskandiassa mannerjätikkö, jonka paksuus oli enimmillään kaksi-kolme kilometriä, painoi maankuorta alas. Ilmiötä kutsutaan *isostaattiseksi sopeutumiseksi*: vaikka maankuori ja Maan vaippa koostuvat molemmat kiinteästä aineesta, ne taipuvat hitaasti ja *plastisesti* suurten kuormitusten

<sup>4</sup> ...kunnes kuormitus kasvaa liian raskaaksi, jolloin kivi rikkoutuu: se on *murtuva*.



KUVA 18.9. Postglasiaalinen maannousu Fennoskandiassa. Kuva antaa alueen pystytason poikkileikkauksen; itse asiassa ilmiö on kolmiulotteinen. Topografia ja mannerjäätikön paksuus ovat liioiteltuja.



alla.

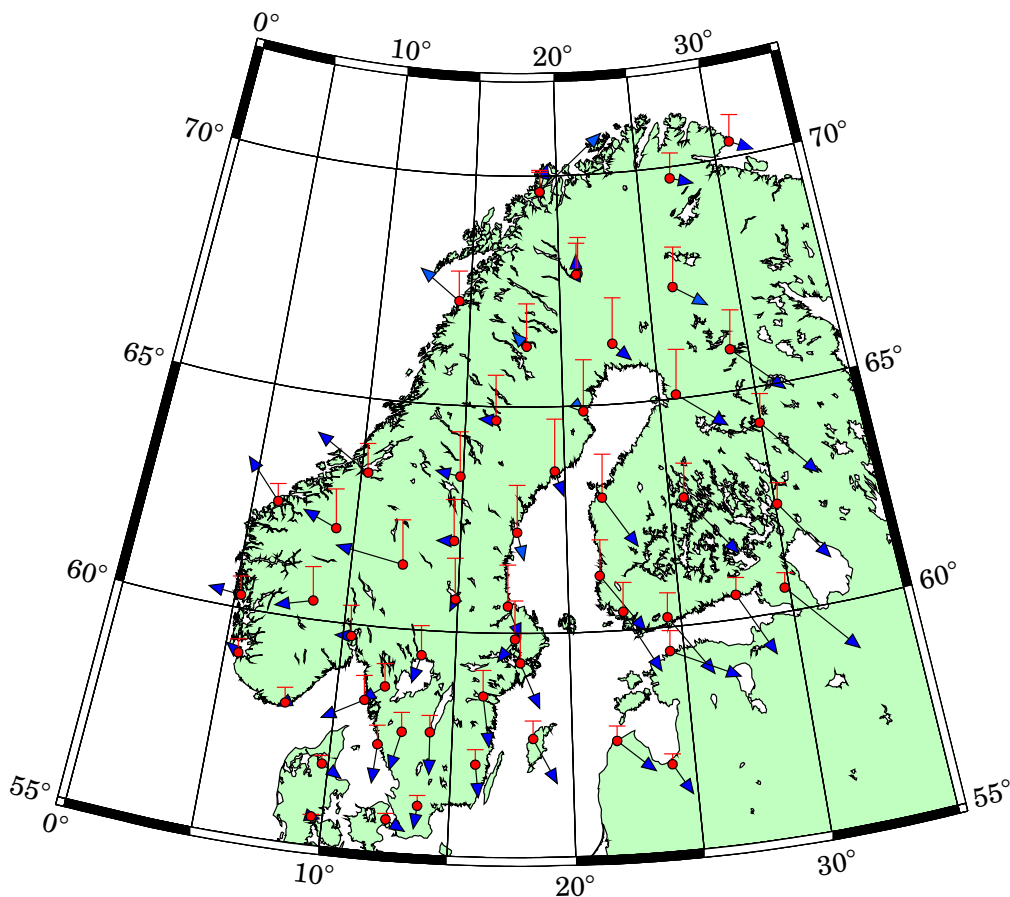
Fennoskandian postglasiaalinen maannousu tapahtuu ellipsin muotoisella alueella, jonka keskus, maannousun maksimi, sijaitsee Merenkurkun kohdalla Ruotsin puolella, jossa maannousu on yli  $9 \text{ mm/a}$ . Tästä ulospäin nousun nopeus vähenee kaikkiin suuntiin. Suomen kaakkoisrajalla se on enää noin  $3 \text{ mm/a}$ . Maannousun nollaviiva kulkee Tanskan ja Pohjois-Puolan kohdalla ja kaartuu Liettuan ja Venäjän alueella koilliseen. Linjan ulko- eli eteläpuolella maa vajoaa hitaasti.

Fennoskandia ei ole maailmassa ainoa alue, jolla maankuori nousee viime jääkauden päättymisen seurauksena. Puhutaan **GIA**:sta, *glacial isostatic adjustment*. Muita vastaavia alueita ovat:

- Laurentian (Pohjois-Kanadan) maannousualue. Paljon laajempi kuin Fennoskandian vastaava.







KUVA 18.10. BIFROST-projektin määrittämät vaaka- ja pystyliikkeet Fennoskandiassa. Vaakanuolet ja pystypylväät eivät ole samassa mitta-kaavassa. Lähde Lidberg ym. (2009).

- Länsi-Siperian maannousualue. Vähän tutkittu (Ehlers ym., 2015).

Kun maankuori nousee, astenosfäärissä virtaa ainetta hitaasti sisään-päin, maannousun keskipisteen suuntaan, maankuoren alle tyhjään tilaan, joka muuten syntyisi. Maannousu ei suinkaan ole vain pystyliikettä: myös vaakaliikkeitä esiintyy, kuten pitkäaikainen GNSS-seuranta on osoittanut.

Tekniikat postglasiaalisen maannousun tutkimiseksi ja mittaamiseksi ovat

- Säännöllisin välein (kymmeniä vuosia) toistettu tarkkavaaitus.
- Merenpinnan seuranta maankuoren suhteen käyttämällä mareografeja, vesiasteikkoja, rannikolla.
- Painovoiman muutosten seuranta, esimerkkinä pohjoismaiset painovoimaprofiilit (Mäkinen ym., 2010). Painovoima muuttuu kahdesta syystä:

- Mittauspiste siirtyy maannousun mukana pois Maan keskuksesta ja painovoima vähenee.
- Maankuoren alaisen massavirtauksen seurauksena pisteen alla olevan massan määrä lisääntyy ja painovoima kasvaa.

Havaittu painovoiman muutos on näiden kahden ilmiön yhteisvaikutus.

- o GNSS-seuranta, kolmiulotteisesti. Tämä toiminta alkoi 1990-luvulla, kun riittävän tarkat geodeettiset GNSS-vastaanottimet ja käsittelymenetelmät saatiin käyttöön.



## 18.4 Paikallinen geodynamiikka



### 18.4.1 Maankuoren antropogeeniset liikkeet

Ihminen aiheuttaa toimillaan usein maankuoren niin sanottuja *antropogeenisia* liikkeitä. Esimerkiksi padon rakentaminen ja sen altaan täyttäminen aiheuttavat paikalliseen maankuoreen lisäkuormitusta, joka voi synnyttää jopa pieniä maanjäristyksiä.

Venezuelassa öljyn pumppaaminen Caracasin alueella on aiheuttanut maan hyvin näkyvän paikallisen vajoamisen. Vastaavia alueita löytyy maailmasta useita. Hollannissa Groningenissa maakaasun pumppaus on aiheuttanut maan vajoamisen, josta maanviljelijöille maksetaan korvauksia. Maan liikkeet mitataankin geodeettisella tarkkuudella säännöllisin väliajoin.

Myös juoma- ja kasteluveden pumppaus huokoisesta maakerrostumasta — pohjavesivarannosta eli *akviferista* — voi aiheuttaa maan vajoamista jopa metrikaupalla. Tämä on kaikkialla, mutta varsinkin kehitysmaissa, erittäin tavallinen ongelma ([Wikipedia, Groundwater-related subsidence](#)).



### 18.4.2 Maankuoren luonnolliset liikkeet

Paikallisia maankuoren liikkeitä tapahtuu usein geologisten murtovyöhykkeiden lähellä, esimerkiksi San Andreas -murtovyöhykkeellä Kaliforniassa. Kahden tektonisen laatan rajalla laatat liikkuvat hitaasti toisiinsa nähden. Kun laattojen liike juuttuu kiinni, maankuoren sisäiset jännitteet kasaantuvat ja voivat vuosien jälkeen vapautua tuhoisasti maanjäristyksenä.

Maankuoren liikkeiden seurantaan käytetään nykyisin useita geodeettisia menetelmiä. Myös valtamerten keskiselänteiden kohdalla, kuten



Islannissa, tapahtuu kaikenlaista geodeettista mittaustoimintaa geofysiikan tutkimuksen osana.

Mannerlaatat eivät ole välttämättä täysin jäykkiä ja yhtenäisiä, vaan niiden sisälläkin on kaikenlaisia murtolinjoja, joita pitkin on tapahtunut — ja varmaan tapahtuu edelleen — tektonisia liikkeitä. Mikroiseismiikan lisäksi niitä voi yrittää havainnoida geodeettisilla seurantamenetelmillä (Ahola, 2001).

Merenpinnan vaihtelut, kuten vuorovedet, voivat heijastua maankuoren tasoon rannikkoalueilla. Puhutaan *meren ja ilmakehän kuormituksesta*. Kuormituksen aiheuttama liike voi olla jopa pari senttimetriä, mutta se vaimenee nopeasti sisämaahan päin mentäessä. Vasta viime vuosina tämä liike on onnistuttu mittaamaan GNSS:n avulla, mutta epävarmuudet ovat yhä suuria. Vuoroveden kuormitus näkyy myös painovoiman seurannan pitkissä aikasarjoissa. Seuranta on keino tutkia kiinteän Maan paikallisia elastisia ominaisuuksia.

Myös ilmakehän, lähinnä ilmanpaineen, vaihtelujen vaikutuksen pitäisi näkyä tällä tavoin. Ilmiö on kuitenkin hyvin heikko ja vaikea havainnoida varmuudella. Painovoimamittauksessa taas ongelmana on erottaa kuormituksen vaikutus monesta muusta ilmakehän vaikutuksesta mitauslaitteelle ja sen ympäristölle.



## 18.5 Deformaatioseuranta

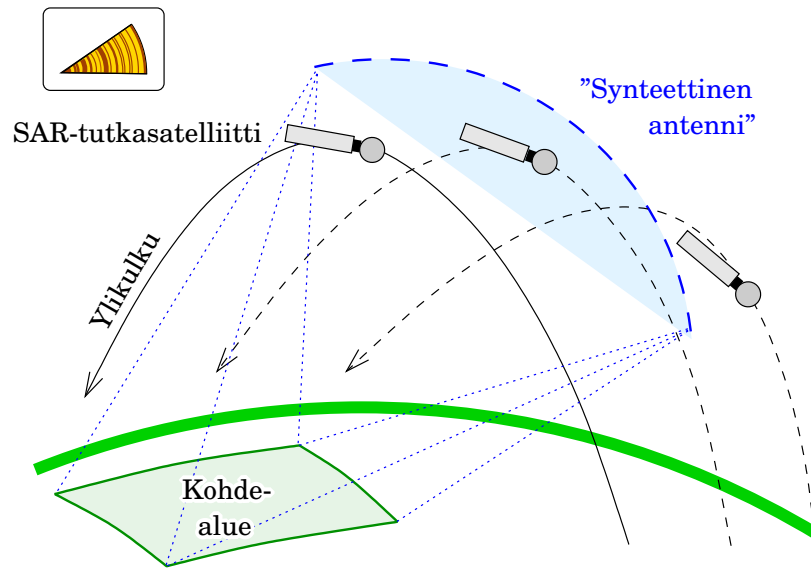
Maankuoren paikallisten muodonmuutosten seurantaan soveltuu sekä perinteisiä (takymetrimittaus, tarkkavaaitus) että nykyaikaisia tekniikoita, kuten GNSS-seuranta.

Maanjärityksille alttiille alueille (esimerkiksi Japani ja Kalifornia) on rakennettu monesta sadasta vastaanottimesta koostuvia, jatkuvasti toimivia GNSS-seurantaverkkoja. Japanissa vuoden 2011 Sendai-maanjäritys rekisteröitiin koko maan 1200 aseman voimalla, kuten näkyy videossa.



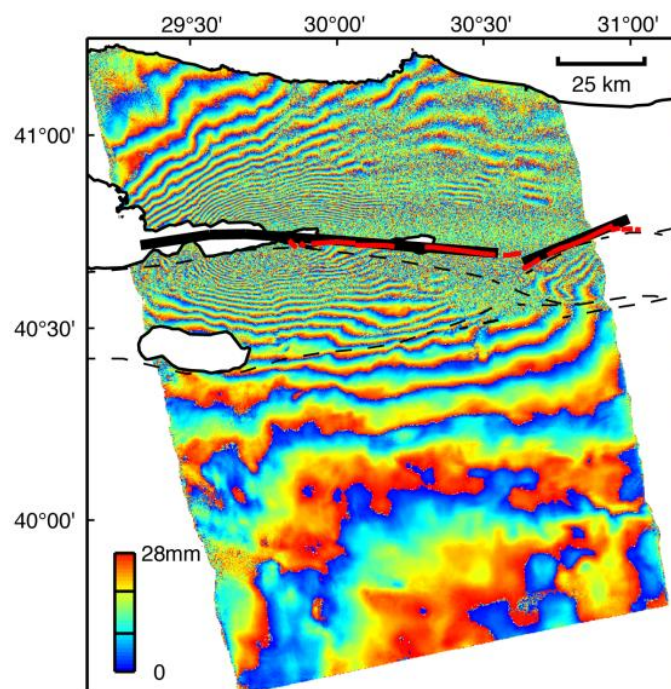
Kuitenkin myös perinteisempiä seurantatekniikoita, kuten automaattisia takymetreja, käytetään. Aineistojen kerääminen ja käsittely tapahtuu tosiajassa.

Muodonmuutosten *toteaminen* havaintoaineistosta on samanlainen tehtävä kuin karkeiden virheiden toteaminen: siihen soveltuu samanlainen *tilastollinen testaus* (osio 15.3) sopivasti valitulla vaihtoehtoisella hypoteesilla  $H_a$ .



(a)

SAR-kuvauksen geometria



(b)

InSAR-kuvan esimerkki

KUVA 18.11. [InSAR](#)-kuva. Maanjäristys Izmitissä, Turkissa, 17. elokuuta 1999. Samanväristen interferenssirenkaiden deformaatioväli on noin 7 cm vaakaliikettä. Ohuet punaiset viivat ovat murtovyöhykkeitä. [NASA / JPL-Caltech](#).



Deformaatioseurantaan käytetään myös SAR-tekniikkaa (*synthetic aperture radar*, synteettisen aukon tutka) Maan kiertoradalta (Fielding, 2017). ”Synteettinen aukko” tarkoittaa, että satelliitin eri ylikulkureiteiltä otetut tutkakuvat yhdistetään laskennallisesti niin, että muodostuu ylikulkujen välimatkan kokoinen ”virtuaalinen objektiiviauikko”. Menetelmä on interferometrinen (InSAR). Sopivan käsittelyn jälkeen deformaatiot näkyvät kuvassa interferenssirenkaina.



## 18.6 Maan painovoimakentän tutkimus kiertoradalta

Vuosikymmenen 2000–2010 aikana laukaistiin kolme satelliittimissiota Maan painovoimakentän eli geopotentialin hienorakenteen selvittämiseksi, toisin sanoen maailmanlaajuisen geoidikartan piirtämiseksi.



### 18.6.1 CHAMP

CHAMP (Challenging Minisatellite Payload for Geophysical Research and Applications, CHAMP Mission) laukaistiin Plesetskin laukaisukeskuksesta Venäjältä 15. heinäkuuta 2000. CHAMPin radan korkeus oli alussa vain 450 km ja laski lennon aikana 350 km:iin. (Vertailun vuoksi: GPS-satelliittien ratakorkeus on 20 000 km.)

CHAMP sisälsi GPS-vastaanottimen satelliitin tarkkaa radanmäärittystä varten. GPS-datasta voidaan laskea satelliitin paikka avaruudessa  $\mathbf{x}(t)$  ajan funktiona. Tästä voidaan laskea geometrinen kiihtyvyys  $\mathbf{a}(t)$  differentioimalla:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t).$$

Satelliitissa oli mukana myös kiihtyvyyssmittari, jonka tehtävä oli mitata ilmakehän aerodynaamisten voimien aiheuttamat satelliitin kiihtyvyydet. Niiden eliminoinnin jälkeen jäljelle jäävät vain Maan gravitaatiokentän aiheuttamat kiihtyvyydet, joista voi laskea tarkan geopotentialin eli *geoidimallin*.

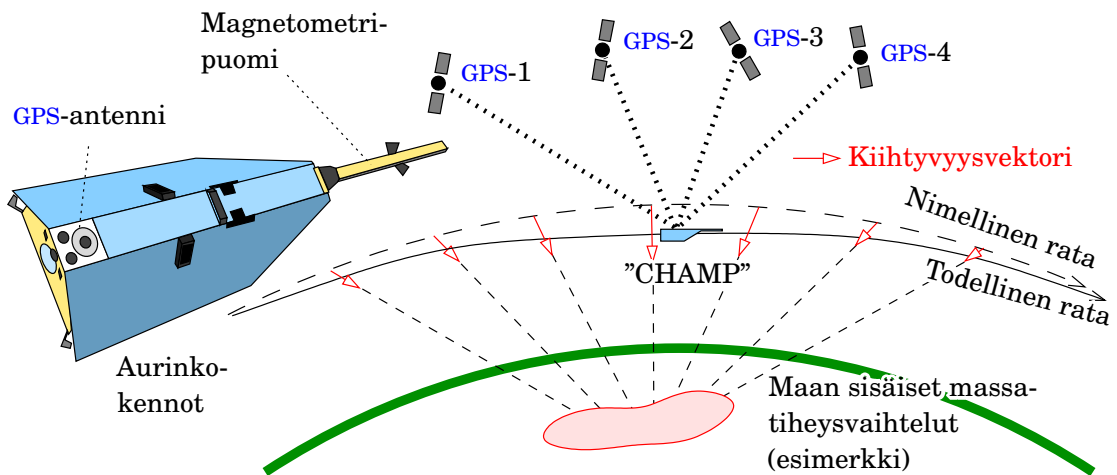
CHAMPin keräämää dataa on käytetty globaalisten geopotentialimallien laskentaan. Mallien maantieteellinen erotuskyky on ollut vaatimaton, luokkaa 1000 km. Satelliitti palasi syyskuun 19. päivänä 2010 ilmakehään ja tuhoutui 58 277 ratakierron jälkeen.



### 18.6.2 GRACE

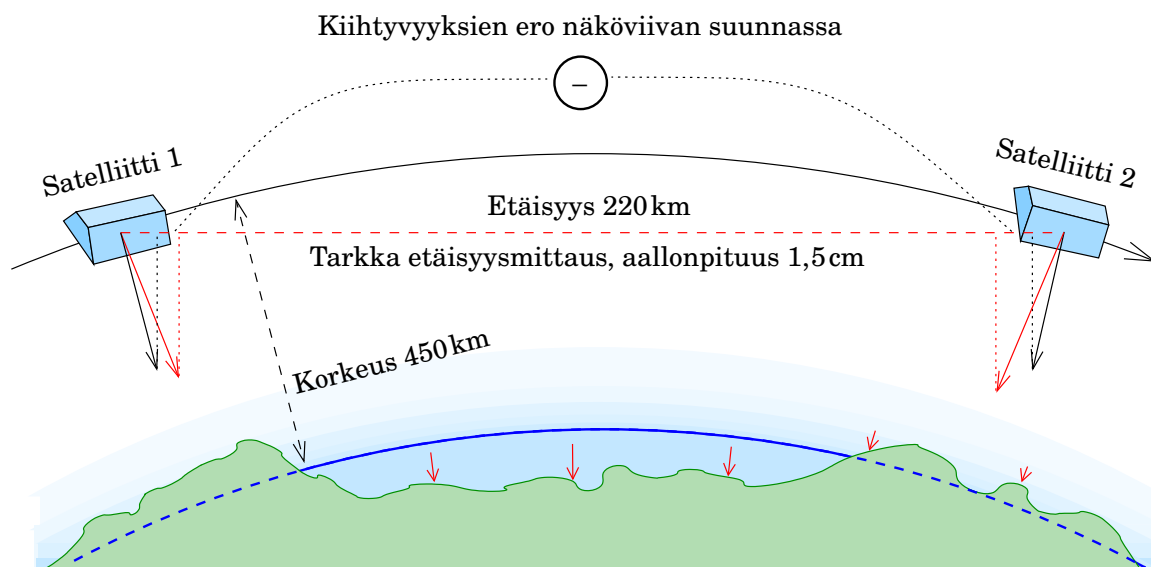
GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment, GRACE Mission) mittasi Maan painovoimakentän *ajallisia muutoksia* erittäin tarkasti,





KUVA 18.12. Maan gravitaatiokentän määrittäminen matalalla lentävän satelliitin GPS-rataseurannan avulla.

aikaresoluutiolla noin kuukausi ja melko karkealla maantieteellisellä erotuskyvyllä. Nämä ajalliset muutokset johtuvat lähinnä Maan ”sinisen kalvon”, ilmakehän ja vesivaipan, liikkeistä. Mitattavaa suuretta kutsutaan myös *merenpohjan paineeksi*, ehkä hieman yllättävästi. Selitys on, että suure on verrannollinen koko ilma- ja vesipatsaan sisältämään massa.



KUVA 18.13. GRACE-satelliittiparin perusidea: Maan painovoimakentän pienempien ajallisten muutosten mittaaminen SST:n, *satellite-to-satellite trackingin*, avulla. Satelliitit mittaavat Maan ”sinisen kalvon” — ilmakehän, vesivaipan — massasiirtymiä eli ”merenpohjan kokonaispaineen” vaihteluita ↓.

GRACE oli *satelliittipari*: satelliitit ("Tom ja Jerry") lensivät peräkanaa noin 450 km:n korkeudella ja toisistaan 220 km:n etäisyydellä. Satelliittien väliset etäisyysmuutokset mittasi mikroaaltolinkki tarkkuudella  $1 \mu\text{m/s}$ . Molemmissa satelliiteissa oli myös herkkä kiihtyvyyssmittari ilmakehän vastuksen mittaamiseksi ja poistamiseksi.

Mittausjärjestelmä oli niin herkkä, että jopa millimetrin paksuisen vesikerroksen vaihtelut voitiin huomata, jos ne ulottuivat mantereen kokoiselle alueelle, noin 500 km.

Onnistunut laukaisu tapahtui vuonna 2001. Data on ollut hydrologeille kullan arvoista: GRACE-missio, hydrologia. Vasta lokakuussa 2017 yksi satelliiteista vioittui ja mittaukset päättyivät. Seuraavien kuukausien aikana satelliitit palasivat ilmakehään.

GRACE-satelliittien jatkoprojektin satelliitit (GRACE Follow-On Mission, GRACE-FO) laukaistiin 2018.



### 18.6.3 GOCE

GOCE (Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer) oli satelliittimissioista kaikkein kunnianhimoisin. Satelliitti laukaistiin Plesetskistä Venäjältä maaliskuun 17. päivänä 2009. Radan korkeus oli vain 250 km, ja satelliitti sisälsi rakettimoottorin (ionimoottorin) ja ajoainevarannon (ksenon) radan ylläpitämiseksi ilmakehän vastuksesta huolimatta. Hyötykuormana GOCE sisälsi *gravitaatiogradiometrin*, joka mittasi tarkasti Maan vetovoiman *gradientin* komponentteja eli vetovoiman riippuvuuksia eri paikkakoordinaateista. Gradiometri koostui useista kehikkoon kiinnitetyistä äärimmäisen herkistä kiihtyvyyssmittareista.

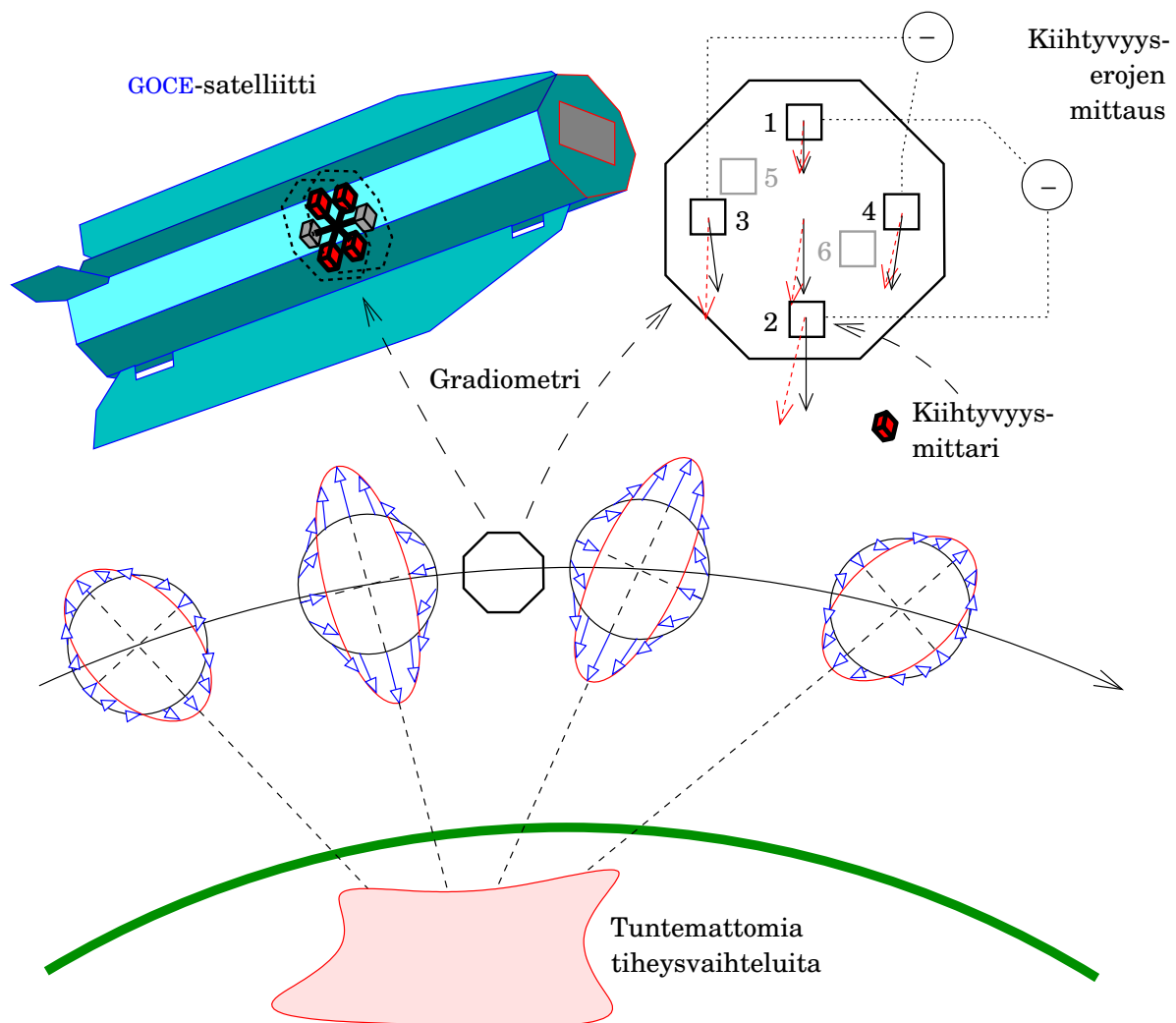
GOCE on toiminnut hyvin. Kuitenkin heinäkuussa 2010 ilmaantui vakava tietoliikennehäiriö, joka saatiin korjattua elokuussa. Missio päättyi 21. lokakuuta 2013 ja marraskuun 11. päivänä satelliitti palasi ilmakehään ja tuhoutui ilotulituksena Falklandin saarten lähellä.

Teoreettisista analyyseista on saatu selville, että gradiometriä on paras tapa mitata painovoimakentän hyvin paikallisia piirteitä: parempi kuin rataseuranta GNSS:n avulla. Pienimmät GOCE-aineistossa näkyvät geoidikartan yksityiskohdat ovat läpimitaltaan vain 100 km. Niiden tarkkuus on jopa  $\pm 2 \text{ cm}$ .

Eräs maailmanlaajuisen geoidikartan tärkeimmistä sovelluskohteista on kartoittaa keskimerenpinnan poikkeamat geoidista, tasapotentiaali-pinnasta, vastaavalla tarkkuudella. Merenpinnan todellinen paikka avaruudessa saadaan satelliittien tutka-altimetriamittauksilla muutaman







KUVA 18.14. Maan gravitaatiokentän määrittäminen GOCE-satelliitin gravitaatiogradiometrin avulla.

senttimetrin tarkkuudella. Tämä tasoero keskimerenpinnan ja tasapotentiaalipinnan välillä, *meritopografia*, voidaan *invertoida* merivirtausten kartaksi. Takana oleva teoria selostetaan alaosiossa 18.10.2. Katso kuva 18.15.

GOCE-satelliittimissio sai nimensä tästä mahdollisuudesta.



## 18.7 Ilmakehän tutkimus ja GNSS



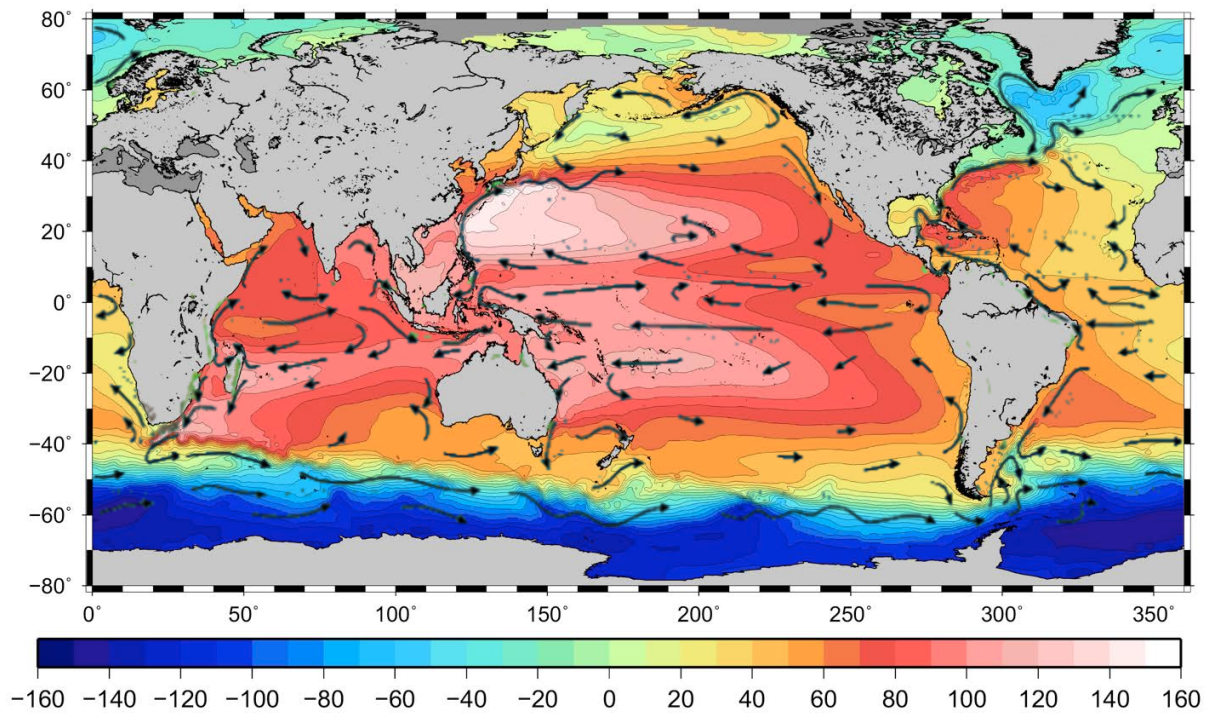
### 18.7.1 Vesihöyryarvot GNSS-asemaverkosta

Ilmakehä vaikuttaa radioaaltojen ja siis GNSS-signaalin kulkuun. Kuten näkyy mikroaaltojen taitekerroinyhtälöstä 7.6:

$$N_M = 10^6 \cdot (n_M - 1) = \frac{77,624 \text{ K/hPa}}{T} (p - e) + \frac{64,70 \text{ K/hPa}}{T} \left( 1 + \frac{5748 \text{ K}}{T} \right) e,$$







KUVA 18.15. [GOCE](#)-mission tuottama meritopografiakartta © European Space Agency. Yksikkö cm. Päälle on piirretty meren pintavirtaukset, [NOAA](#) / Rick Lumpkin ([NOAA](#), [Ocean currents](#)). Vertaa kuvan [18.21](#) kanssa!

vaikuttavat sekä ilman kokonaispaine  $p$  että vesihöyryn osapaine eli *absoluuttinen kosteus*  $e$  signaalin kulkuun, mutta eri tavalla. Jos sijoitetaan  $T \approx 285\text{ K}$  (noin  $12^\circ\text{C}$ ), saadaan

$$N_M = 0,27(p - e) + 4,8e.$$

Kirjoitetaan tämä muotoon

$$N_M = ap_{\text{kuiva}} + bp_{\text{kostea}},$$

jossa  $p_{\text{kuiva}} = p - e$  on ilmakehän kuivien osuuksien yhteenlaskettu osapaine ja  $p_{\text{kostea}} = e$  on vesihöyryn osapaine. Kertoimet  $a$  ja  $b$  kuvaavat kuivan ilman (lähinnä typpi, happi, argon ja hiilidioksidi) ja vesihöyryn vaikutusta. Arvot  $a \approx 0,27\text{ hPa}^{-1}$  ja  $b \approx 4,8\text{ hPa}^{-1}$  riippuvat hieman lämpötilasta. Kuitenkin  $b$  on noin 18 kertaa  $a$ : *vesihöyry vaikuttaa noin 18 kertaa vahvemmin GNSS-signaalin kulkuun kuin kuiva ilma*. Ilmiön takana on vesimolekyylin *poolisuus*, katso osio [7.5](#).

Vesihöyryn osapaine on vähemmän käytetty tapa kuvata, paljonko ilmassa on vesihöyryä. Käytetympi tapa on *suhteellinen kosteus* pro-



sentteina eli vesihöyryn määrä verrattuna määrään *kyllästymis-* eli saturaatiopisteellä, kun ilmassa on niin paljon kosteutta kuin mahtuu tietyllä lämpötila-arvolla, ennen kuin kosteus alkaa tiivistyä nesteeksi. Saturaatio- eli kyllästymisosaapaineen  $e_{\text{kyll}}$  antaa kohtuullisena approksi-

5 maationa *Clausiuksen*<sup>5</sup> ja *Clapeyronin*<sup>6</sup> yhtälö:

6

$$e_{\text{kyll}}(T) = e_{\text{kyll}}(T_0) \exp \left( -4895 \text{ K} \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right).$$

Kun tiedetään, että lämpötila  $T_0 = 100^\circ \text{C} = 373,15 \text{ K}$  on veden kiehumispiste:  $e_{\text{kyll}}(T_0) = 1 \text{ ilmakehää} = 1013,25 \text{ hPa}$ , seuraa, että

$$e_{\text{kyll}}(T) = 1013,25 \text{ hPa} \cdot \exp \left( -4895 \text{ K} \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{373,15 \text{ K}} \right) \right). \quad (18.1)$$

Polku ilmakehän kautta on sitä pidempi, mitä alempana satelliitti on paikallisella taivaalla. Jos zeniittikulma on  $\zeta$ , voidaan signaalin kulkuviive ilmakehässä kuvata seuraavalla yhtälöllä ( $\tilde{a}$  ja  $\tilde{b}$  ovat yllä mainittujen kerrointen  $a$  ja  $b$  integraalit ilmakehän koko korkeuden läpi, jaettuna luvulla  $10^6$ ):

$$d_{\text{trop}} = \frac{\tilde{a} p_{\text{kuiva}} + \tilde{b} p_{\text{kostea}}}{\cos \zeta} = \frac{\tilde{a}(p - e) + \tilde{b}e}{\cos \zeta} = \frac{d_{\text{zeniitti}}}{\cos \zeta}. \quad (18.2)$$

GNSS:n verkkotasoituksessa voidaan asemien arvot  $d_{\text{zeniitti}}$ , *zeniitin kulkuviiveet*, ratkaista tuntemattomina sijoittamalla yhtälö 18.2 GNSS:n havaintoyhtälöihin 12.1 — ja identiteetin  $D_{\text{trop}} = d_{\text{trop}}$  kanssa yhtälöihin 12.2. (Pienellä alueella voidaan ratkaista vain asemien välisiä zeniitin kulkuviiveiden *erotuksia*.)

Jos samalla asemalla mitataan ilmapuntarin avulla myös kokonais-ilmanpaine:

$$p = p_{\text{kuiva}} + p_{\text{kostea}},$$

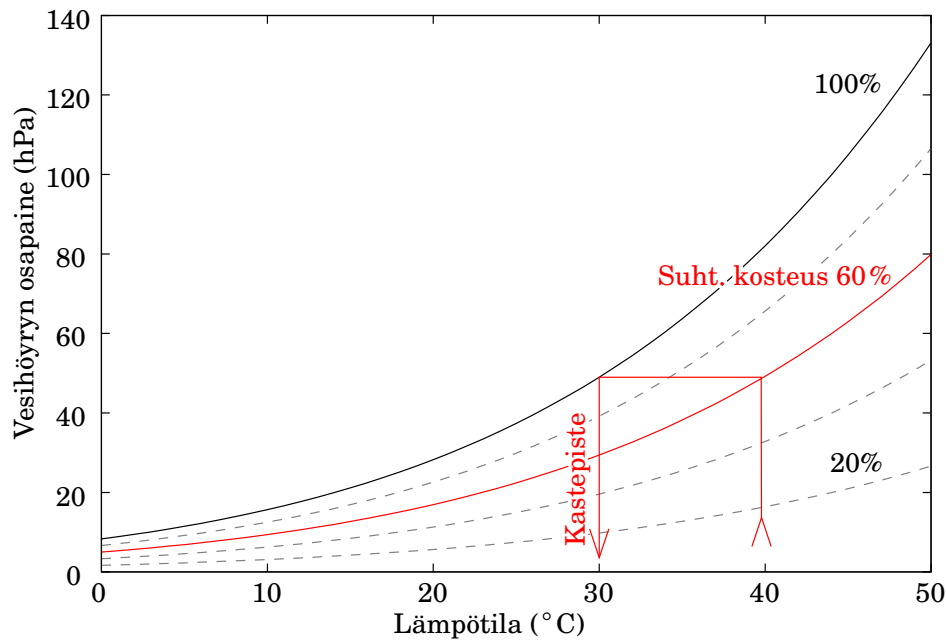
voidaan ratkaista erikseen  $p_{\text{kuiva}}$  ja  $p_{\text{kostea}}$ .

Jälkimmäistä suuretta, muunnettuna ilmapatsaassa olevaksi aine-määräksi, kutsutaan myös nimellä *integroituu vesihöyrysisältö* tai *total precipitable water-vapour content* (muunnettuna nestemäiseksi vedeksi, yksikkönä mm). Se on suure, joka kiinnostaa suuresti sää- ja ilmastotutkijoita!

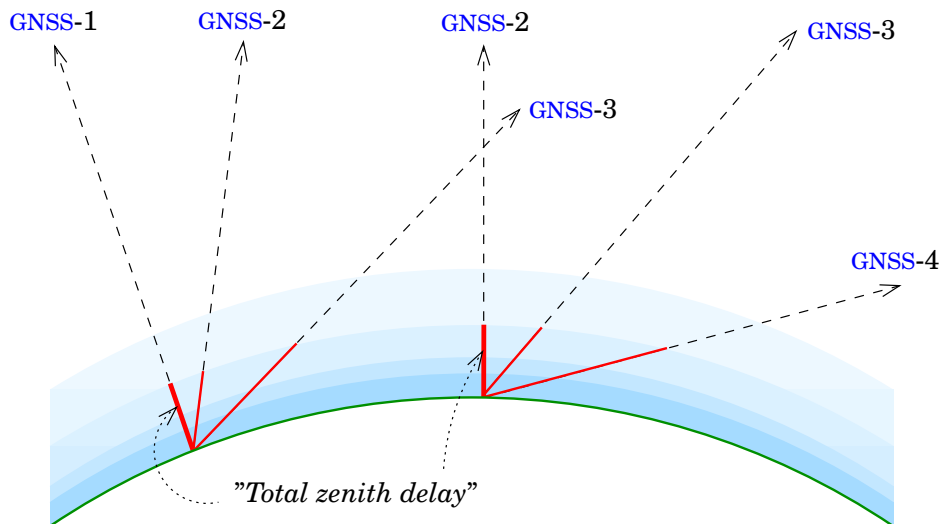
<sup>5</sup>Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888) oli saksalainen fyysikko ja matemaatikko, yksi termodynamiikan perustajista.

<sup>6</sup>Benoît Paul Émile Clapeyron (1799–1864) oli ranskalainen insinööri ja fyysikko, yksi Eiffel-tornin 72 nimestä ([Eiffel Tower, 72 names](#)).

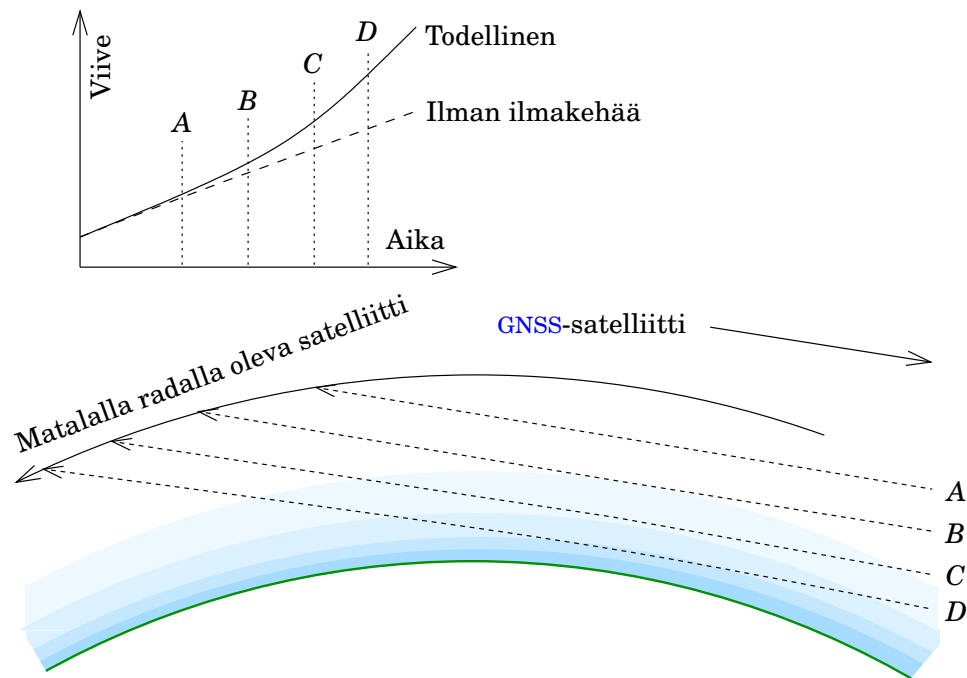




KUVA 18.16. Vesihöyryn kyllästymisospaine  $e_{\text{kyll}}$  ja osapaineet  $e$  eri lämpötiloilla ja suhteellisilla kosteusarvoilla yhtälön 18.1 mukaan. Punainen polku kertoo, miten kastepisteen lämpötila ( $30^\circ\text{C}$ ) seuraa lämpötilasta ( $40^\circ\text{C}$ ) ja suhteellisesta kosteudesta (60%). Tästä seuraa, että lämpötilaa ja kastepistettä yhdessä voidaan käyttää määrittämään suhteellinen kosteus. Tähän periaatteeseen perustuvat monet kosteuden mittalaitteet eli hygrometrit.



KUVA 18.17. GNSS:n käyttö troposfäärin tutkimuksessa.



KUVA 18.18. Miten GNSS-radio-okkultaatiomenetelmä toimii.



### 18.7.2 GNSS-radio-okkultaatio

Matalalla radalla lentävien satelliittien avulla voidaan mitata, miten ilmakehän kautta kulkeva GNSS-satelliitin radiosignaali hidastuu, kun radiosäteen matalin piste sukeltaa yhä syvemmälle ilmakehään. Menetelmän nimi on GNSS-limbsounding eli radio-okkultaatio. Ensimmäinen satelliitti, joka käytti tätä menetelmää, oli GPS/MET. Myös tanskalainen Ørsted-satelliitti ja jo mainittu CHAMP käyttivät sitä.

Menetelmä edellyttää, että satelliitissa on mukana GNSS-vastaanotin. Kun pelkässä GPS-järjestelmässä on jo noin 30 satelliittia ja matalalla radalla oleva satelliitti kiertää maapalloa kerran 1,5 tunnissa, saadaan vuorokaudessa kerättyä todella paljon mittausaineistoa.

Menetelmä on tärkeä siksi, että se mahdollistaa lämpötilan määrittämisen yläilmakehässä, tropopausin yläpuolella, jossa ei ole enää paljoa vesihöyryä jäljellä. Tämä on se kerros, jossa globaalin ilmaston lämpenemisen vaikutus näkyy herkimmin<sup>7</sup>. Otsonikerros sijaitsee mittausalueen yläpäässä, ja siinä tapahtuvat prosessit vaikuttavat myös lämpötilaan.

<sup>7</sup>Yllättäen ilmastomallit ennustavat ja havainnot vahvistavat, että kun Maan pinnan ja troposfäärin lämpötilat nousevat, stratosfäärissä pitää tapahtua kompensoiva lämpötilan lasku. Syy tähän on korkeamman hiilidioksidipitoisuuden vahvistama säteilyjäähdytys.

Menetelmä on seuraava: ilmakehän aiheuttama viive on verrannollinen ilman tiheyteen, joka on paloittain eksponentiaalinen korkeuden funktio<sup>8</sup>:

$$\rho(H) = \rho(H_0) \exp\left(-\frac{H-H_0}{S(t,k,g)}\right),$$

jossa  $S(t,k,g)$  on skaalakorkeus, joka on ilman lämpötilan  $t$ , ilman koostumuksen  $k$  ja painovoiman  $g$  funktio. Jos oletetaan  $k$ <sup>9</sup> ja  $g$  tunnetuiksi, voidaan skaalakorkeudesta  $S$  laskea lämpötila  $t$ .

8

9



### 18.7.3 Ionosfäärin luotaus

Kahden taajuuden GPS-mittausten avulla, taajuuksilla  $L_1$  ja  $L_2$ , voidaan laskea ionosfäärin malleja, joissa kuvataan, paikan  $(\varphi, \lambda, h)$  ja ajan funktiona, ionosfäärin elektronitiheyttä. Tästä voidaan laskea TEC, total electron content, integroituna satelliitin ja vastaanottimen välistä polkua pitkin.

IGS, International GNSS Service, on laskenut näitä malleja jo vuodesta 1998 lähtien lähes tosiajassa hyödyntäen maailmanlaajuisia GNSS-verkkoa. Tähän toimintaan on kehitetty dataformaatti, IONEX, Ionosphere Map Exchange Format.



## 18.8 Maan pyörähdysakselin ja rataliikkeen pitkäaikaiset vaihtelut

Milanković<sup>10</sup> esitti jo vuonna 1941 hypoteesin, jonka mukaan tähtitie-teelliset tekijät aiheuttavat insolaation — Auringosta tulevan säteilytehon — vaihtelua suurten mannerjäätiköiden reunoilla, mikä aiheuttaa puolestaan jäätiköiden kasvua tai vetäytymistä. Milankovićin työ perustui aikaisempaan, muun muassa James Crollin<sup>11</sup>, työhön jääkausien ja interglasiaalien selittämiseksi.

10

11



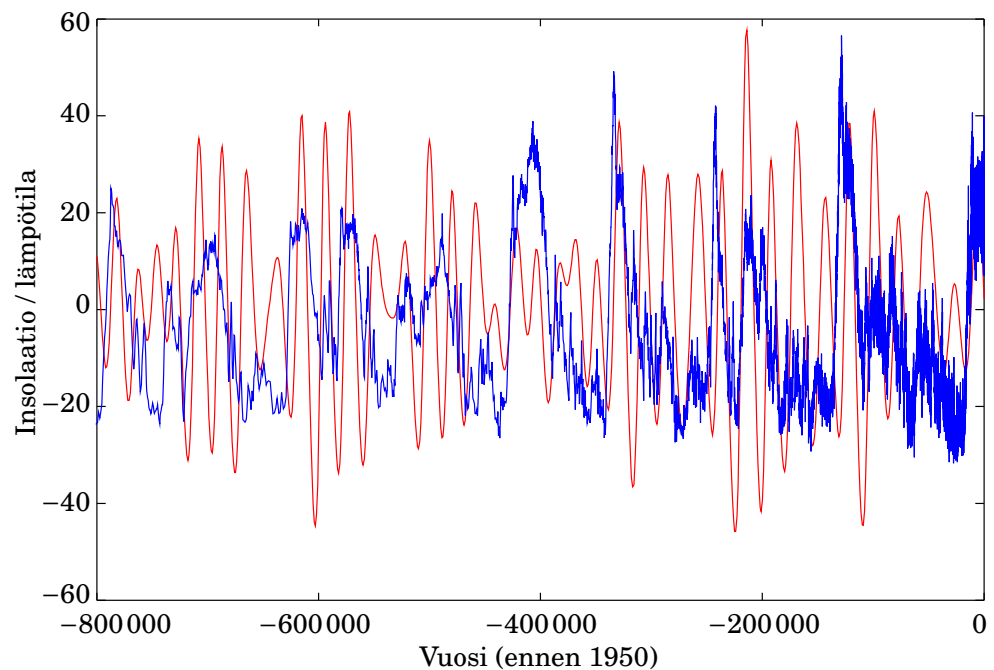
### 18.8.1 Pyörähdysakselin kaltevuus

Prekessioliikkeen lisäksi myös Maan pyörähdysakselin kaltevuus ekliptikan suhteen vaihtelee hitaasti. Tällä hetkellä (epookki 2000.0) kal-

<sup>8</sup> Asia on tätä monimutkaisempi, koska GNSS-signaali kulkee monen ilmakerroksen läpi, ei vain sen ilmakerroksen, jossa säteen etäisyys Maan pinnalta on minimissään.

<sup>9</sup> Vesihöyrysisältö on näillä korkeuksilla käytännössä nolla alhaisen lämpötilan takia.

<sup>10</sup> Milutin Milanković (1879–1958) oli serbialainen monitietäjä, insinööri ja ilmastotutkija.



KUVA 18.19. Milankovićin syklit viime 800 000 vuoden aikana molemmilla pallonpuoliskoilla. *Punainen*, teoreettisesti laskettu kesän insolaatio — 21. heinäkuusta 20. elokuuhun —  $65^\circ$  pohjoisella leveysasteella (ilmakehän ulkopuolella). *Sininen*, deuterium-isotoopin avulla laskettu Etelämantereen lämpötila-arvio. Asteikot mielivaltaisia. Lähteet: [Laskar ym. \(2004\)](#); [Jouzel ja Masson-Delmotte \(2007\)](#), katso [IMCCE](#), [Milanković app](#) sekä [Science-artikkeli Jouzel ym. \(2007\)](#).



tevuuskulma on  $23^\circ 26' 21''$ , ja se on hitaasti vähenemässä, noin  $0'',47$  vuodessa.

Itse asiassa vaihtelu on periodinen,  $22,1$  ja  $24,5$  välillä. Periodi on noin 41 000 vuotta. Tämä vaihtelu liittyy planeettojen aiheuttamiin Maan ratatason häiriöihin.



### 18.8.2 Klimatologinen prekessio

*Tähtitieteellinen prekessio* on aiemmin esitetty ilmiö, että Maan pyörähdyksensä akseli kiertää kartiomaaisessa liikkeessä noin 25 800 vuoden periodilla. Tämän lisäksi Maan rataellipsin isoakselin suunta kiertää myös ratatasossa, periodina 112 000 vuotta (*apsidiprekessio*). Liikkeen aiheuttavat muiden planeettojen ratahäiriöt.

<sup>11</sup>James Croll [FRS](#) (1821–1890) oli skottilainen itseoppinut fyysikko, tähtitieteilijä ja ilmastotutkija.

Molempien prosessien tulos on *klimatologinen prekessio*, jonka periodi on

$$\left( \frac{1}{112000} + \frac{1}{25800} \right)^{-1} a = 21000 a.$$

Tämä on periodi, jonka aikana se vuodenaika, jolloin maapallo on lähimpänä Aurinkoa, kiertää kalenterin läpi. Tällä hetkellä Maa on lähimpänä Aurinkoa tammikuun alussa. Vielä 11 000 vuotta sitten, viime jääkauden päättymisen ajankohtana, Maa oli lähimpänä Aurinkoa heinäkuussa. Tuloksena oli 7% enemmän Auringon säteilytehoa arktisille kesille.

Klimatologisen prekession suorat vaikutukset ovat *vastakkaisia* pohjoiselle ja eteläiselle napa-alueelle, koska pohjoinen kesä on eteläinen talvi ja eteläinen kesä on pohjoinen talvi.



### 18.8.3 Radan eksentrisyyden vaihtelu

Maan kiertoradan eksentrisyys vaihtelee myös arvojen 0 ja 0,068 välillä, ja merkittävät periodit ovat ~ 100 000 ja 413 000 vuotta. Tämä muiden planeettojen ratahäiriöiden aiheuttama vaihtelu moduloi klimatologisen prekession vaikutusta.



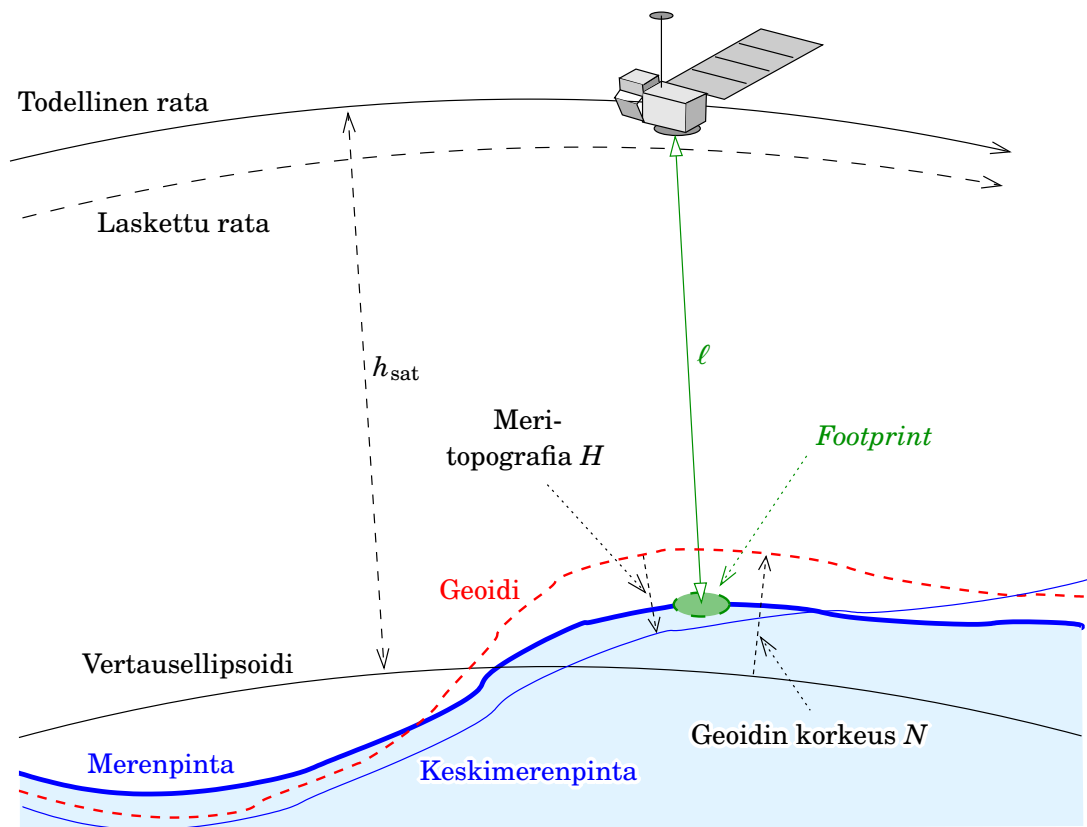
## 18.9 Mannerjään tutkimus ja ilmastomuutos

Monet geofysikaaliset tutkimushankkeet kohdistuvat mannerjäätiköihin, joilla napa-alueiden voimakkaamman lämpenemisen (*”polar amplification”*) takia planeetamme ilmaston lämpeneminen alkaa näkyä ensimmäisenä. Mannerjäätikö on *jäätikö*. Aivan kuten vuoristojäätikö se kasvaa lumirajan yläpuolella putoavasta lumesta, joka tiivistyy ja kovettuu hitaasti ensin *firn*-lumeksi ja sitten jääksi, joka taas virtaa hitaasti ja plastisesti rannikoille, jossa jäätikö menettää massaa sulamisen ja jäävuorien poikastumisen kautta.

Sekä Grönlannin että Etelämantereen mannerjäätiköiden paksuuden muutoksia on seurattu satelliittimenetelmien, muun muassa tutka-altimetrian, avulla. Myös tutkakuvausta kiertoradalta (**SAR**, *synthetic aperture radar* eli synteettisen aukon tutka) on käytetty. Pienten muutosten havaitseminen edellyttää pitkiä aikasarjoja, mikä on vielä satelliittimenetelmien heikkous.

Myös **GRACEa** (alaosio 18.6.2) on käytetty mannerjäätiköiden kokonaismassan muutoksen tutkimiseksi. Tämä muutos edustaa suoraan mannerjäätiköiden osuutta merenpinnan nousussa.





KUVA 18.20. Satelliittialtimetrian mittausgeometria.

Myös GNSS-tekniikalla on tutkittu sekä maankuoren että jään liikkeitä Grönlandissa (Khan ym., 2010) ja Etelämantereella, esimerkiksi Suomen Etelämantereen tukikohta Aboan ympäristössä Dronning Maud Landissa (Koivula ja Mäkinen, 2003).



## 18.10 Geodeettinen merentutkimus



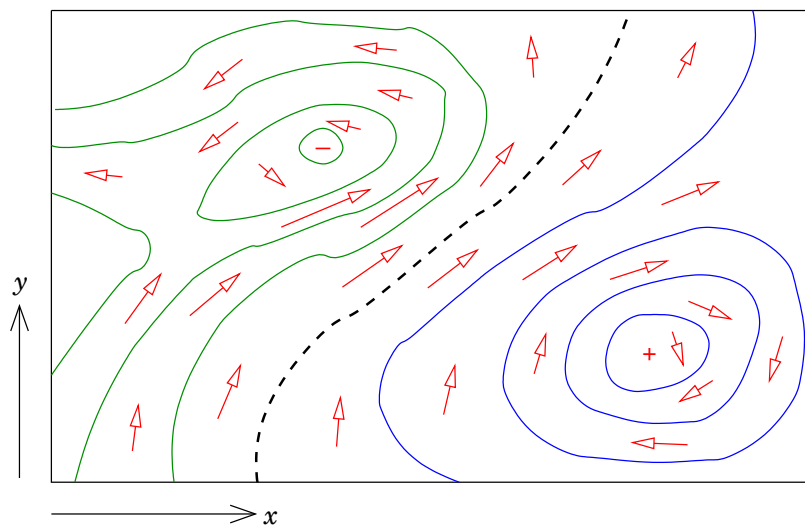
### 18.10.1 Satelliittialtimetria ja geoidi

Satelliittien avulla voidaan mitata hetkellisen merenpinnan paikka geosentrisessä järjestelmässä. Mittalaite on *tutka-altimetri* (Rummel ja Sansò, 1993), ja sen mittaustarkkuus on muutama senttimetri. Katso kuva 18.20.

Satelliittialtimetriatutka lähettää lyhyen mikroaaltojen pulssin suoraan alaspäin, jossa merenpinta heijastaa sen takaisin. Heijastus vastaanotetaan ja heijastuneen pulssin muotoa analysoidaan. Heijastus ei tule vain suoraan satelliitin alapuolella olevalta pisteeltä, vaan kokonaisuutena alueelta nimeltä *footprint*. Tämä voi olla läpimitaltaan useita kilometrejä, enemmän jos merellä on korkea aallokko.







KUVA 18.21. Meritopografian ja merivirtausten välinen teoreettinen yhteys.

Pulssin muodon analyysin perusteella päätellään, mikä on satelliitin ja merenpinnan välinen etäisyys. Jos satelliittirata tunnetaan — nykyisin altimetriasatelliiteissa on aina GNSS-vastaanotin mukana — voidaan laskea merenpinnan hetkellinen, geosentrinen paikka. Peräkkäiset mitauspaikat muodostavat *ratakaaria*, jotka menevät joko pohjoiseen tai etelään.



### 18.10.2 Merivirtaukset ja meritopografia

Keskimerenpinta seuraa aika hyvin geoidia, Maan painovoimakentän tasapotentialipintaa. Jos merivesi olisi ”lepotilassa”, yhtyvien astioiden tasapainotilassa, keskimerenpinta olisi tarkasti sama kuin geoidi. Näin ei kuitenkaan ole asian laita. Syyt tähän *meritopografiaan* ovat

- veden paikalliset *lämpö-* ja *suolaisuusvaihtelut*
- ilmakehän *painevaihtelut* paikasta toiseen, johon merenpinta reagoi ”ylösalaisin käännetyn ilmapuntarin” (*IB, inverted barometer*) tavoin
- tuulten vastus eli kitka merenpinnan kanssa, joka työntää vesimassat tiettyihin suuntiin
- merivirtauksiin toimiva coriolisvoima.

Merivirtaukset reagoivat Maan pyörähdysliikkeeseen coriolisvoiman<sup>12</sup> kautta samalla tavalla kuin ilmapirtaukset (Buys Ballot<sup>13</sup>n laki): vir-

<sup>12</sup>Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja koneinsinööri, yksi Eiffel-tornin 72 nimestä (*Eiffel Tower, 72 names*).

taukset yrittävät pohjoisella pallonpuoliskolla kääntyä oikeaan päin, eteläisellä vasempaan. Tämä saa aikaan merivirtausten *poikittaiskallistuksen*, joka on verrannollinen virtausnopeuteen ja leveysasteen siniarvoon  $\sin\varphi$ . Puhutaan *geostrofisesta virtauksesta*.

Meritopografian suuruus on maailmanlaajuisesti  $\pm 1$  m. Itämerelläkin on olemassa meritopografia, merenpinnan kaltevuus, jonka seurauksena Pohjanlahden ja Suomenlahden pohjukat ovat noin 20–30 cm korkeampi-  
na kuin Itämeren länsiosat. Syy on suolaisuusgradientti. Myös Tanskan salmissa on korkeuseroa, etenkin länsituulten työntövoiman seurauksena.

Aiemmin mainittiin muutama satelliittimissio, joiden tarkoituksena oli selvittää *geoidin* tarkka paikka avaruudessa. Meritopografia, keskimerenpinnan tason erotus geoidin tasosta, aiheutuu valtamerillä pääasiassa *merivirtauksista*. Maan pyörähdysliikkeen seurauksena virtaukset kallistuvat poikittaissuunnassa. Tästä havaittavasta ilmiöstä voidaan teoreettisesti laskea virtausvolyymi, kuljetetun veden määrä, ja siitä vuorollaan veden mukanaan kuljettama lämpöenergia. Ilmastotutkimuksen kannalta tämä on keskeisen tärkeä asia. Tämä oli myös kunnianhimoisen **GOCE**-projektin (alaosio 18.6.3) yksi tavoite.

Kuvassa 18.21 näkyy, mikä on merivirtausten ja meritopografian välinen yhteys. Se voidaan kuvata myös *geostrofisina yhtälöinä*:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = +2v_y \frac{\omega}{\gamma} \sin\varphi, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -2v_x \frac{\omega}{\gamma} \sin\varphi, \quad (18.3)$$

jossa  $H(x, y)$  on meritopografia,  $\omega$  Maan pyörähdysnopeus,  $\gamma$  painovoima,  $x$  ja  $y$  tasokoordinaatit itä- ja pohjoissuunnassa ja  $v_x$  ja  $v_y$  ovat virtausnopeuden itä- ja pohjoiskomponentit. Koska yhtälöissä on  $\sin\varphi$ , on efekti eteläisellä pallonpuoliskolla käänteinen, ja ekvaattorin välittömässä läheisyydessä nolla.

Yksinkertaisella osittaisdifferentiaatiolla voidaan päätellä havaitusta meritopografiasta  $H(x, y)$  virtauskuvioon  $\mathbf{v}(x, y)$ , jossa  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$  on virtausnopeuden vektori  $(x, y)$ -tasossa.



### 18.10.3 Mareografit, satelliittialtimetria ja merenpinnan nousu

Vuodesta 1992 lähtien ovat ranskalais-amerikkalainen satelliitti **TOPEX/Poseidon** sekä sen seuraajasatelliitit **Jason-1**, **Jason-2** ja **Jason-3**

<sup>13</sup>Christoph Hendrik Diederik Buys Ballot (1817–1890) oli hollantilainen kemisti ja meteorologi.

(NASA JPL, TOPEX/Poseidon, Jason) tehneet uraauurtavaa työtä globaalin merenpinnan nousun seurannassa. Perinteisesti merenpintaa on seurattu käyttäen *mareografeja* eli vesiasteikkoja, engl. *tide gauges*. Koko 2000-luvun aikaisen merenpinnan nousun on arvioitu olleen luokkaa  $1,3\text{--}2\text{ mm/a}$ , eli  $13\text{--}20\text{ cm}$  koko vuosisadan aikana<sup>14</sup>.

14

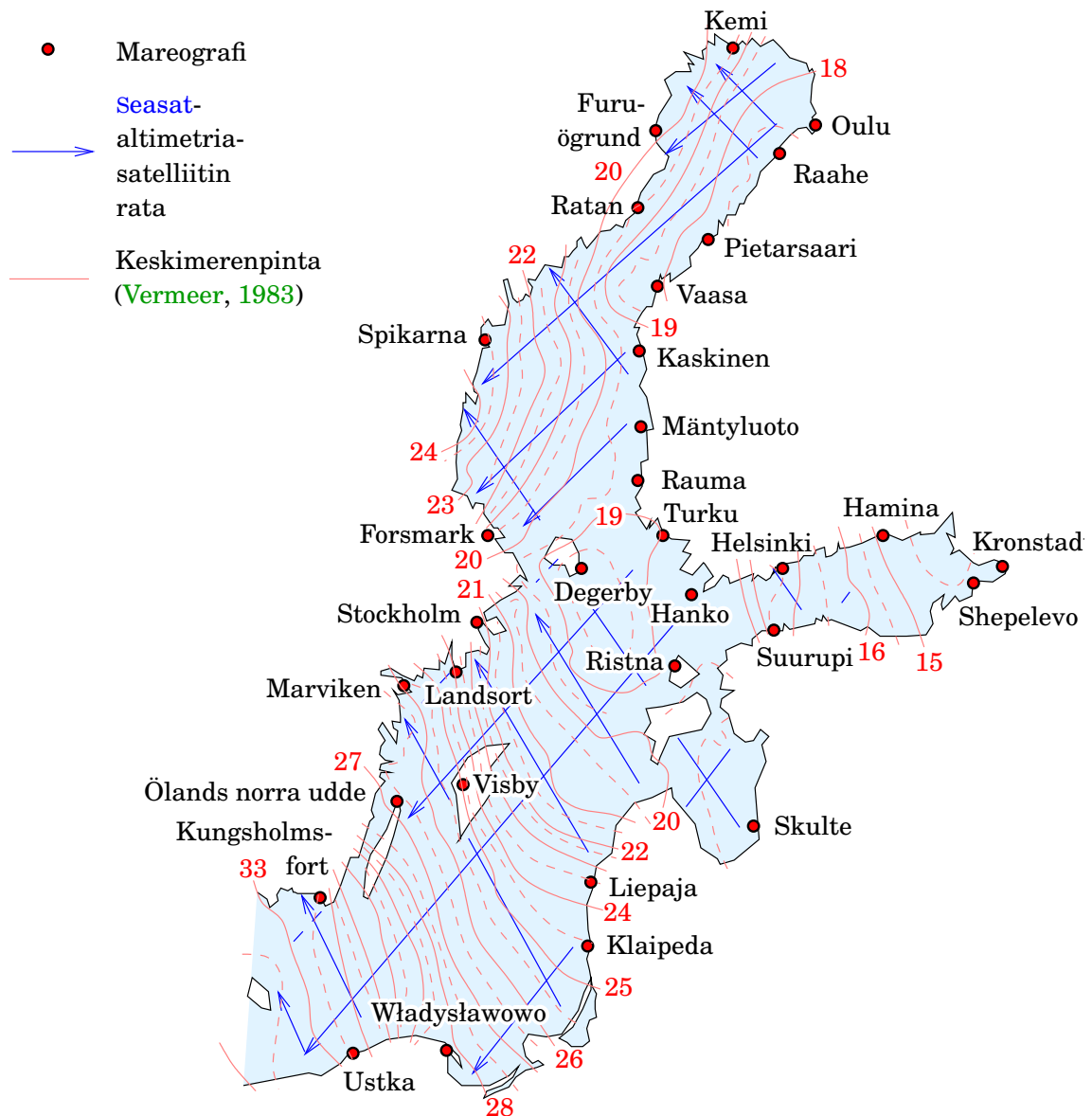
Mareografi mittaa merenpinnan nousua suhteessa maankuoreen, johon se on rakennettu. Pitkä putki yhdistää laitteen mittauskuilun avomereen aallokon vaimentamiseksi.

Tällä menetelmällä on kaksi ongelmaa:

- Maankuori itse voi liikkua. Lähinnä postglasiaalinen maannousu eli GIA (*glacial isostatic adjustment*) vaikuttaa vahvimmin Fennoskandiassa ja Kanadassa, mutta sen vaikutukset ulottuvat koko Eurooppaan ja Pohjois-Amerikkaan. Maannousualueen ulkopuolella on leveä vyöhyke, jossa maa vajoaa hitaasti, periglasiaalinen pullistuma (*“periglacial bulge”*). Ilmiö tulee mallintaa huolellisesti ja korjata pois mareografidatasta, jos haluaa laskea globaalin merenpinnan nousun tarkasti. Nykyisin monen mareografin lähellä on jatkuvasti toimiva GNSS-asema, jonka avulla maan pystyliike voidaan määrittää empiirisesti. Valitettavasti aikasarjat ovat vielä lyhyitä.
- Mareografeja on olemassa vain rannikoilla ja sielläkin yksittäisissä pisteissä. Olemassa onkin suuria valtameren alueita, joiden lähellä ei ole yhtään mareografia. Ja mitä kauemmas mennään ajassa taaksepäin, sitä heikommaksi tilanne muodostuu. Eteläisellä pallonpuoliskolla tilanne on ollut todella heikko ennen vuotta 1950.

Altimetriasatelliitit voivat mitata merenpinnan sijainnin *geosentrisesti* — mukanaan kuljettamansa tarkan GNSS-paikantimen avulla — ja *kaikkialla* ratojensa alapuolella. Esimerkiksi TOPEX/Poseidon -tyyppisen satelliitin radan inkliinaatiokulma on  $66^\circ$ , ja koko valtameren pinta leveysasteiden  $66^\circ\text{S}$  ja  $66^\circ\text{N}$  välillä kartoitetaan noin kymmenen päivän välein. Kun satelliitin ratataso *prekessoi* Auringon suhteen kerran 117 päivässä, saadaan maailmanlaajuisen keskimerenpinnan pitkäaikainen trendi selville ainakin tällä aikaresoluutiolla. Viime kahden vuosikymmenen aikana keskimerenpinta on noussut noin  $3,2 \pm 0,4\text{ mm/a}$ , selvästi

<sup>14</sup>Uusi analyysi (Dangendorf ym., 2017) ehdottaa, että merenpinnan nousu ennen vuotta 1990 oli huomattavasti hitaampi, vain noin  $1,1 \pm 0,3\text{ mm/a}$ .



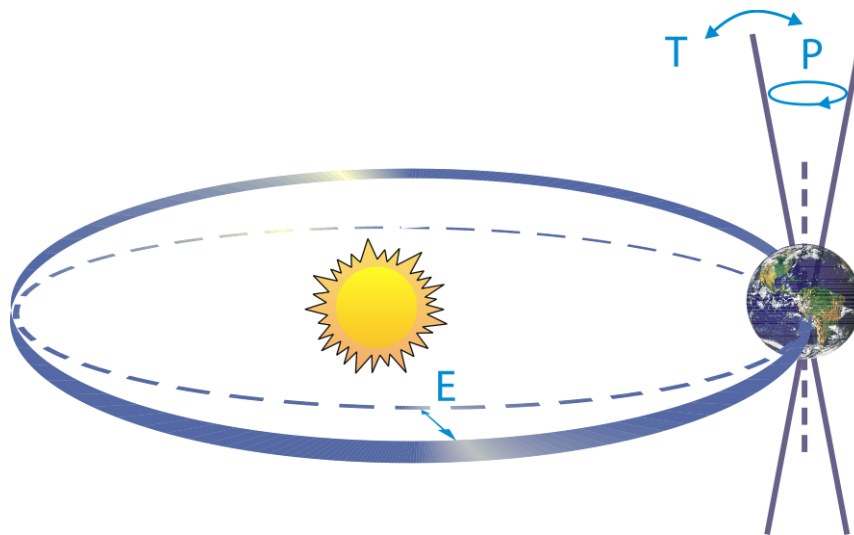
KUVA 18.22. Itämeren mareografi, joitakin Seasat-satelliitin maaroja vuonna 1978 ja satelliitin havainnoista lasketun keskimerenpinnan ratkaisun tasokäyrät.

enemmän kuin 2000-luvulla keskimäärin (Sea Level Research Group). Nousun kiihtyminen lienee seurausta ilmaston lämpenemisestä.



#### 18.10.4 Korkeusjärjestelmät, mareografi ja meritopografia

Myös mareografeilla voidaan havaita meritopografiaa, mutta vain rannikoilla. Tämä edellyttää, että mareografi on kytketty samaan korkeusjärjestelmään. Suomessa asia on järjestetty niin, että Merentutkimuslaitoksen, nykyisin Ilmatieteen laitoksen, operoimat 13 Suomen



KUVA 18.23. "Schematic of the Earth's orbital changes (Milankovitch cycles) that drive the ice age cycles. 'T' denotes changes in the tilt (or obliquity) of the Earth's axis, 'E' denotes changes in the eccentricity of the orbit (due to variations in the minor axis of the ellipse), and 'P' denotes precession, that is, changes in the direction of the axis tilt at a given point of the orbit."

Julkaisusta IPCC (2007), Frequently Asked Question 6.1, sivu 449.

rannikon mareografia ovat kytkettyjä valtakunnalliseen tarkkavaaitusverkkoon, jota Geodeettinen laitos, nykyinen Maanmittauslaitoksen Paikkatietokeskus FGI, ylläpitää. Tarvittavat kytkentävaaitukset suoritetaan geodeettien toimesta muutaman vuoden välein.

Suomen mareografit mittaavat jatkuvasti paikallisen merenpinnan tasoa maankuoren suhteen. Mittausarvot siirretään sähköisesti Helsingissä sijaitsevaan Ilmatieteen laitoksen päämajaan, jossa ne käsitellään ja arkistoidaan.

Geodeettinen laitos on rakentanut viiden mareografin lähistöön *pila-reita* säännöllisiä GNSS-mittauksia varten. Näin paikallinen merenpinta voidaan saada satelliittipaikannuksen avulla geosentriseen koordinaatistoon.

Myös GNSS-poijujen käyttö on yleistymässä: niiden avulla saadaan hetkellisen merenpinnan geosenttrinen sijainti, myös kaukana rannikolta. Samalla voidaan seurata aallokkoa.



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mitä geodeettisia, geodynamiikalle hyödyllisiä havaintotekniikoita tunnet?
- 2) Mikä todistaa, että Maan ulkoydin on nestemäinen?
- 3) Selosta napaliike ja sen seuranta.
- 4) Miten **GRACE**- ja **GOCE**-satelliittiprojektien tavoitteet erosivat toisistaan?
- 5) Miten **GNSS**-asemien verkkoa voidaan käyttää sen yläpuolella olevan ilmakehän vesihöyrysisällön määrittämiseksi?
- 6) Mikä on ilmakehän skaalakorkeus, ja miten **GNSS**-radio-okkultaatiotekniikkaa voidaan käyttää sen määrittämiseksi?
- 7) Mitkä ovat ne kolme Maan pyörähdysakselin ja rataliikkeen muutosta, jotka aiheuttavat pitkän aikavälin ilmastomuutosta — jääkausisykliä — Milankovićin teorian mukaan?
- 8) Katso kuva **18.23**. Kun olet oppinut Keplerin rataliikkeen lait, mikä tässä kuvassa (ja kuvatekstissä) on pielessä?
- 9) Lehtiartikkelin mukaan, **Associated Press (1988)**, sotilaslentokoneet, jotka tekivät hätälaskun Grönlannissa toisen maailmansodan aikana, löydettiin 46 vuotta myöhemmin 260 jalan syvyydestä jään sisältä. Jäätiköiden toiminnan tietämyksesi perusteella selitä, kuinka ne päätyivät niin syvälle. Paljonko vuotuinen lumisademäärä on hätälaskupaikassa?
- 10) Mikä on coriolisvoima?
- 11) Geostrofiset yhtälöt ovat

$$\frac{\partial H}{\partial x} = +2v_y \frac{\omega}{\gamma} \sin \varphi, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -2v_x \frac{\omega}{\gamma} \sin \varphi. \quad (18.3)$$

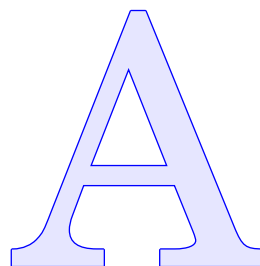
Selitä jokainen esiintyvä symboli.

- 12) Mikä oli ja on **TOPEX/Poseidon**-satelliitin ja sen **Jason**-seuraaja-satelliittien tavoite?





# Matriisien ominaisuudet



Matriiseja käytetään tieteessä varsin laajasti kuvaamaan moniulotteisia ilmiöitä, kuten koordinaattimuunnoksia ja kuvauksia vektoriavaruuksista toiseen. Matriisi kirjoitetaan auki numeroiden kaksiulotteisena taulukkona sulkeiden tai hakasulkeiden sisällä. Matriisin *symbolinen* merkintätapa on kurstiivinen<sup>1</sup> versaalikirjain, kuten  $A$ ,  $B$ ,  $I$ .<sup>1</sup>

Muodollisesti matriisit ovat eräs *lukujen tyyppi*, kuten reaalityyppi ja kompleksityyppi. Monet lukujen laskutoimitukset, kuten yhteen- ja vähennyslasku, ovat matriiseillakin olemassa: samankokoiset matriisit voidaan laskea yhteen yksinkertaisesti laskemalla yhteen vastaavat alkiot. Toiset laskutoimitukset, kuten kertolasku, eivät aina toimi matriisien välillä: ne vaativat, että matriisien *koot*, rivien ja sarakkeiden lukumäärät, ovat sopivia. Tarkemmin sanottuna vasemmanpuoleisen matriisin sarakkeiden määrän on oltava sama kuin oikeanpuoleisen matriisin rivien määrä, jotta kertolasku olisi edes mahdollinen.



## A.1 Matriisien yhteen- ja vähennyslasku

Samankokoiset matriisit lasketaan yhteen yhteenlaskemalla vastaavat alkiot:

$$C = A + B$$

merkitsee

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

jokaiselle parille  $i, j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , jos matriisit  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat  $n \times m$  -kokoisia. Esimerkiksi seuraavalla tavalla ( $n = m = 2$ ):

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix},$$

<sup>1</sup>Vaihtoehtoisesti monet kirjoittajat käyttävät lihavoituja versaaleja.

numeroesimerkkinä

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}^C = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^A + \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}^B,$$

jossa  $c_{11} = a_{11} + b_{11}$  ja niin edelleen. Samoin vähennyslaskulle.



### A.1.1 Matriisin kertominen vakion kanssa

Tämä on sama kuin jokaisen alkion kertominen tämän vakion kanssa.

Esimerkiksi

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}.$$



## A.2 Matriiseja ja vektoreita

Matriisia, jolla on vain yksi rivi, kutsutaan *rivivektoriksi*. Matriisia, jolla on vain yksi sarake, kutsutaan *sarakevektoriksi*. Esimerkiksi

$$r = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Vektorit merkitään yleensä pienillä kirjaimilla.



### A.3 Yksikkömatriisi

Samalla tavalla kuin luvuille on olemassa *nolla-alkio* 0, jolle pätee  $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$ , ja *yksikköalkio* 1 ominaisuutenaan  $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ , ne ovat olemassa myös matriiseille. Yksikkömatriisi on yksinkertaisesti

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Se on aina neliön muotoinen. Jokaisella ulottuvuuksien määrällä on oma yksikkömatriisi, esimerkiksi

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

on yksikkömatriisi kolmelle ulottuvuudelle.







## A.4 Matriisien kertolasku

Matriisien kertolasku tapahtuu yksinkertaisen kaavion mukaan: ”rivi kertaa sarake”. Jos

$$C = A \cdot B,$$

se merkitsee, että jokaiselle  $i$  ja  $k$ :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk},$$

eli matriisi

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & [c_{ik}] & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

saadaan kertomalla matriisiin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{i1}] & \rightarrow & [a_{ij}] & \rightarrow & [a_{in}] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jokaisen rivin matriisiin

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & [b_{1k}] & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \downarrow & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & [b_{jk}] & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \downarrow & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & [b_{nk}] & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

jokaisen sarakkeen kanssa. Siis summataan  $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}$ , ”rivi  $i$  kertaa sarake  $k$ ”, jokaiselle  $C$ -matriisin alkiolle. Yllä olevassa kaavassa olemme merkanneet yhden rivin, jonka rivinumero on  $i$ , matriisissa  $A$ , ja yhden sarakkeen, jonka sarakenumero on  $k$ , matriisissa  $B$ . Rivin ja sarakkeen kertominen siis antaa  $C$ :n alkion nimeltä  $c_{ik}$ .

Tässä on yksinkertaisuuden vuoksi oletettu, että kaikki matriisit ovat neliskanttisia,  $n \times n$  riviä ja saraketta. Tämä ei ole välttämätöntä, mutta  $A$ :n sarakkeiden ja  $B$ :n rivien määrän on oltava sama, jotta kertolasku olisi mahdollinen.



**Harjoitus** Verifioi, että mielivaltaiselle neliön muotoiselle matriisille  $A$  pätee  $A \cdot I = I \cdot A = A$ .



## A.5 Transpoosi

Matriisin  $A$  transpoosin  $A^T$  määritelmä:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}^A \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}^T = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}^{A^T} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$[n \times m] \qquad [m \times n]$

eli tiiviimmin

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Matriisin  $A$  transpoosi  $A^T$  saadaan siis vaihtamalla rivit ja sarakkeet keskenään eli, jos  $m = n$  ja kyseessä on neliömatriisi, ”peilaamalla” kaikki alkiot päälävistäjän kautta. Triviaalisti jos transponointi suoritetaan kaksi kertaa, saadaan alkuperäinen matriisi takaisin:

$$(A^T)^T = A.$$

*Vektorin* transpoosi muuttaa rivivektorin sarakevektoriksi ja päinvastoin:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Viimemainittua kirjoitustapaa käytetään usein juoksevassa tekstissä paperin säästämiseksi, kun esitetään sarakevektori.



## A.6 Käänteismatriisi

Neliön muotoisen matriisin  $N$  *käänteismatriisi*  $N^{-1}$  määritellään matriisiksi  $K$ , jolle  $K \cdot N = N \cdot K = I$ , jossa  $I$  on jo aikaisemmin määritelty yksikkömatriisi. Yksikkömatriisin ominaisuus taas on  $I \cdot N = N \cdot I = N$  kaikille saman kokoisille neliömatriiseille  $N$ . Yksikkömatriisin rooli on sama kuin reaaliluvuissa luvun 1 rooli. Reaaliluvulle  $a$  taas käänteismatriisin vastine on luku  $1/a$ .



Matriisin kääntämiseksi on olemassa hyviä numeerisia standardialgoritmeja. Kääntäminen on kuitenkin suurille matriiseilla raskasta: tarvittava laskentatyö on verrannollinen matriisin koon  $n$  *kolmanteen* potenssiin! Eli  $20 \times 20$ -kokoisen matriisin kääntämiseen menee noin 8 kertaa niin paljon laskenta-aikaa kuin  $10 \times 10$ -kokoisen matriisin kääntämiseen.

Kääntäminen käsin onnistuu helposti vain korkeintaan  $3 \times 3$ -kokoisille matriiseille — eikä se ole vaivan arvoista (Reagan, 2021).

Esimerkiksi, jos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

on sen käänteismatriisi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,3 \end{bmatrix},$$

mikä on helposti verifioitavissa:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0,4 - 1 \cdot 0,2 & -3 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 \\ 2 \cdot 0,4 - 4 \cdot 0,2 & -2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

ja samoin  $A^{-1} \cdot A = I$ .

Matriisilaskennan arvokas apuväline on MATLAB™-ohjelmisto, joka on tiedeyhteisössä laajasti käytössä. Kotikäyttäjälle löytyy Internetistä vastaavia avoimen lähdekoodin työkaluja, kuten octave tai scilab.

Käytännössä laskenta perustuu lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun: jos  $X = A^{-1}$  on matriisin  $A$  käänteismatriisi, pätee  $2 \times 2$ -kokoisen matriisin tapauksessa

$$AX = I,$$

eli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

eli

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_{11}, x_{21},$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_{12}, x_{22}.$$

Jos matriisin koko on  $n \times n$ , syntyy vastaavasti  $n$  yhtälöryhmää, jokaisessa  $n$  yhtälöä  $n$  tuntemattomassa.



**Singulaarisuus** Aivan kuten jakolasku  $1/a$  ei onnistu kaikille luvuille  $a$  — nimenomaan ei luvulle  $a = 0$  — ei myöskään käänteismatriisin laskeminen onnistu kaikille matriiseille. Yksinkertainen esimerkki ei-käännettävästä matriisista on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ja yllä olevat ratkaisuyhtälöt menevät ristiriitaisiksi:

$$x_{11} + x_{21} = \text{sekä } 1 \text{ että } 0,$$

$$x_{12} + x_{22} = \text{samoin}.$$

Tällaista matriisia kutsutaan *singulaariseksi*.



## A.7 Matriisin determinantti

Neliömatriisin *determinantti* on yksittäinen luku, joka luonnehtii matriisin edustamaa kuvausta vektoriavaruudesta toiseen, saman ulottuvuuksien määrän omavaan, vektoriavaruuteen: miten pieni tilavuusalkio toisessa vektoriavaruudessa kuvautuu toiseen eli suhde lähde- ja kohde-tilavuuksien välillä. Ja myös jos determinantti häviää, se merkitsee, että kuvauksella ei ole käänteiskuvaus ja matriisi on singulaarinen.

Determinantti lasketaan rekursiivisesti:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &= \\ &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sääntö on: jokainen ensimmäisen rivin alkio kerrotaan sen matriisin determinantin kanssa, joka muodostuu, jos jätetään ensimmäinen rivi sekä sen alkion sarake pois<sup>2</sup>. Ja termin *etumerkki* riippuu siitä, onko alkion



$a_{1j}$  sarakeindeksi  $j$  parillinen vai pariton: miinusmerkki jos parillinen, plusmerkki jos pariton.

Determinantin merkkiominaisuus on, että se on *täysin antisymmetrinen*: vaihda matriisiin  $A$  mitä tahansa kaksi saraketta, tai mitä tahansa kaksi riviä, keskenään, ja uuden matriisin  $A'$  determinantti on  $\det A' = -\det A$ .



## A.8 Vektorien tulot

Kahden vektorin  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  skalaaritulon määritelmä on

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha,$$

jossa  $\alpha$  on vektorien välinen kulma.

Olkoon  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  *ortonormaali kanta* eli  $n$ -ulotteista vektoriavaruutta virittävä vektoreiden joukko, joille

$$\langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{jos } i = j, \\ 0 & \text{jos } i \neq j. \end{cases}$$

Kirjoita

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_n \mathbf{e}_n,$$

ja

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Nyt vektorien skalaaritulo voidaan laskea matriisitulona:

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}^T \bar{\mathbf{a}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Näky, että skalaaritulo on symmetrinen:

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \rangle.$$

Vektorien *vektoritulo* on monimutkaisempi. Kahdessa ulottuvuudessa se on skalaari:

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \alpha,$$

<sup>2</sup>Tätä determinanttia kutsutaan sen matriisin alkion *kofaktoriksi*.



jossa  $\alpha$  on vektorien välinen *suunnattu* kulma.

Kolmessa ulottuvuudessa vektoritulo on itse vektori, jonka pituus on

$$\|\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \alpha,$$

joka on kohtisuorassa vektoreihin  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  nähden:

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle \perp \mathbf{a}, \quad \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle \perp \mathbf{b}, \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle \cdot \mathbf{a} \rangle = \langle \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle \cdot \mathbf{b} \rangle = 0.$$

Vektoritulo on antisymmetrinen:

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b} \times \mathbf{a} \rangle,$$

ja siis  $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle = 0$ . Se tarvitsee *suuntauksen*, korkkiruuvisäännön: jos kääntää korkkiruuvia vektorista  $\mathbf{a}$  vektoriin  $\mathbf{b}$ , se menee eteenpäin vektorin  $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle$  suuntaan.

Kolmen ulottuvuuden ortonormaalille kannalle  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  tämä merkitsee

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 \rangle &= \langle \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \rangle &= \mathbf{e}_3, \quad \langle \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \rangle = \mathbf{e}_1, \quad \langle \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \rangle = \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

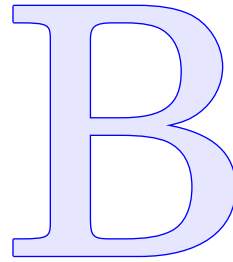
olettaen, että kantavektorit virittävät oikeakätisen koordinaatiston.

Laskenta tapahtuu determinanttien avulla:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{e}_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} + \mathbf{e}_2 \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix} + \mathbf{e}_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$



# Magnetohydrodynamiikkaa lyhyesti



## B.1 Plasma

*Plasma* on kaasu, jossa atomeista on irrotettu osa elektroneista: *ionisaatio*. Negatiivisesti varautuneet elektronit liikkuvat vapaasti plasmassa positiivisesti varautuneiden jäännösatomien eli *ionien* kesken. Avaruudessa plasmat ovat yleensä kuumia, ja niiden lämpötila voi vaihdella tuhansista miljardeihin asteisiin.

Avaruusplasmat ovat kooltaan niin laajoja ja ohuita, että ne käyttäytyvät *suprajohtimen* tavoin: sähkövirrat kulkevat niissä pitkään ilman merkittävää heikentymistä. Tästä syystä myöskään magneettikenttä ei voi liikkua plasman läpi: aine ja kenttäviivat liikkuvat käsi kädessä. Tätä kutsutaan ”*frozen-in*”-magnetismiksi eli Alfvénin lause. Jos plasma puristetaan kokoon, sen sisältämä magneettikenttä vahvistuu. Samoin käy, jos plasmaa venytetään ja kääritään rullalle lehtitaikinan tavoin, kuten tapahtuu Auringon konvektiokerroksen sisällä. Näin luonnolliset dynamot toimivat.



## B.2 Maxwellin yhtälöt

Maxwellin kenttäyhtälöt ovat<sup>1</sup>

1

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times \mathbf{B} \rangle &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \langle \nabla \cdot \mathbf{B} \rangle &= 0, & \langle \nabla \cdot \mathbf{E} \rangle &= \frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

( $\mathbf{E}$  sähköinen kenttävektori,  $\mathbf{B}$  magneettinen kenttävektori,  $\mathbf{j}$  sähkövirran tiheysvektori,  $\rho$  sähkövarauksen tiheys,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  luonnonvakioita.)

<sup>1</sup>Tämä yhtälöiden kompakti muoto on Oliver Heavisiden (1850–1925) ansiota. Heaviside oli lennätintutkija ja sähköpiirien teorian kehittäjä. Hän myös ehdotti, että *ionosfäärin* olemassaolo selittää radioaaltojen suuren kantaman — horisontin taakse.

Osittaisdifferentiaalioperaattorit  $\nabla \times$  ja  $\nabla \cdot$  tunnetaan vektorianalyysissa *roottori-* ja *divergenssi-*operaattoreina, rot ja div. Niiden määritelmät ovat

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= \langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= \langle \nabla \cdot \mathbf{E} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},\end{aligned}$$

jossa  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  on  $(x, y, z)$ -koordinaatiston ortonormaali kanta, ja

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}.$$



### B.3 ”Frozen-in”-magneettikenttä

Suprajohtimessa ei voi olla silmukan ympärille integroituna nettosähkökenttää, koska se aiheuttaisi äärettömän sähkövirran! Siis

$$\oint_{\partial S} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \rangle ds = 0,$$

jossa  $\mathbf{t}$  on silmukan  $\partial S$  tangenttivektori. *Stokesin silmukkaintegraalilause* ([Wikipedia](#), [Kelvinin ja Stokesin lause](#)) — jota kutsutaan myös

<sup>2</sup> Kelvinin ja Stokesin lauseeksi, koska lordi Kelvin<sup>2</sup> ilmeisesti keksi sen — sanoo, että tämä integraali on sama kuin vektorin  $\mathbf{E}$  *roottorin*  $\langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle$  pinta-integraali pinnan  $S$  yli, jonka reuna  $\partial S$  on. Myös sen integraalin on siis oltava nolla:

$$\iint_S \langle \langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{n} \rangle dS = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \rangle ds = 0.$$

Tässä  $\mathbf{n}$  on pinnan  $S$  normaali. *Maxwellin ja Faradayn* yhtälöstä [B.1](#) seuraa nyt

$$\iint_S \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \right\rangle dS = 0 \implies \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \rangle dS = \iint_S \left\langle \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right\rangle dS.$$

Tässä oikeanpuoleinen integrandi  $\left\langle \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right\rangle$  häviää, jos silmukan pinta  $S$  valitaan kiinteäksi, koska silloin  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = 0$ . Silloin, jos myös  $\partial S$  on vakio:

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \rangle dS = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \rangle dS = 0.$$

<sup>2</sup>Sir William Thomson (1824–1907) [FRS](#) [FRSE](#) (lordi Kelvin) oli brittiläinen fyysikko, matemaatikko, insinööri ja keksijä. Hänelle myönnettiin aatelistarvo vuonna 1866 työstään Atlantin ylittävän lennätinkaapelin parissa.



Integraali  $\iint_S \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \rangle dS$  on magneettinen *vuo* (engl. *flux*) silmukan pinnan  $S$  läpi, silmukan läpi menevien kenttäviivojen kokonaismäärä, jonka on oltava vakio ajassa. Se ei voi muuttua. Siksi suprajohtava pallo leijuu eli levitöi magneettikentän päällä: kenttä ei pääse pallon sisään.

Liikkuvassa plasmassa oletus, että  $\partial S$  on vakio, ei enää päde. Esitetään ilman todistusta ([Wikipedia, Alfvén's theorem](#)), että yllä oleva pätee myös plasmassa mielivaltaiselle plasmaan sidotulle silmukalle: plasma ja kenttä liikkuvat käsi kädessä — vaikka plasma voi vapaasti virrata kenttäviivoja pitkin. Jos plasma puristetaan tiiviimmäksi, magneettikentän vahvuus kasvaa<sup>3</sup>.

3



## B.4 Alan historia

Nimen ”plasma” keksi nobelisti Irving Langmuir<sup>4</sup> (1927). Plasmoja tutkiva tieteenala on nimeltään *magnetohydrodynamiikka* ([MHD](#)). On arvioitu, että maailmankaikkeudessa yli 99% normaalista — ei-”pimeästä” — aineesta on plasmaa.

4

Maineikas magnetohydrodynaamikko oli ruotsalainen nobelisti Hannes Alfvén, 1908–1995. Hän kuvaili vuonna 1942, miten magneettiset kenttäviivat liikkuvat suprajohtavassa aineessa aineen mukana.



## Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Tyhjiössä sekä sähkövaraus  $\rho = 0$  ja sähkövirta  $\mathbf{j} = 0$ . Ensimmäisestä kahdesta Maxwellin yhtälöstä [B.1](#) tulee

$$\langle \nabla \times \mathbf{B} \rangle = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{B.2})$$

Anna operaattori  $\nabla \times$  toimia vasemmalta ja sijoita:

$$\langle \nabla \times \langle \nabla \times \mathbf{B} \rangle \rangle = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (\text{B.3})$$

Nyt käytetään vektorilaskennan lausetta,

$$\langle \mathbf{a} \times \langle \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle \rangle = \mathbf{b} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle,$$

<sup>3</sup>Vaikuttava esimerkki tästä on neutronitähden eli pulsarin ([Wikipedia, Pulsari](#)) magneettikenttä. Pulsari on tähden romahtunut, vielä nopeasti pyörivä ydin.

<sup>4</sup>Irving Langmuir (1881–1957) oli yhdysvaltalainen kemisti, fyysikko ja aineen tutkija.

mikä tässä tapauksessa merkitsee

$$\langle \nabla \times \langle \nabla \times \mathbf{B} \rangle \rangle = \nabla \langle \nabla \cdot \mathbf{B} \rangle - \langle \nabla \cdot \nabla \rangle \mathbf{B}.$$

Tässä Maxwellin kolmannen yhtälön B.1 mukaan  $\langle \nabla \cdot \mathbf{B} \rangle = 0$ , eli

$$\langle \nabla \times \langle \nabla \times \mathbf{B} \rangle \rangle = -\langle \nabla \cdot \nabla \rangle \mathbf{B} = -\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{B},$$

ja yhtälön B.3 kanssa:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0. \quad (\text{B.4})$$

- (a) Näytä sijoittamalla, että  $\mathbf{B}(u)$  on tämän yhtälön ratkaisu, jos  $u = x - ct$  tai  $u = x + ct$ . Käytä ketjusääntö.
- (b) Mikä on parametrin  $c$  arvo?
- (c) Mitkä muut ratkaisut tulevat mieleen?
- (d) Nyt anna operaattori  $\nabla \times$  toimia yhtälöille B.2 ja sijoita toisinpäin löydäksesi samanlainen yhtälö suurelle  $\mathbf{E}$ .
- (e) Vaihtoehtoisesti oletetaan  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, t)$  ja hajota yhtälö B.4:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} &= 0 \\ \implies \left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

johon erilliset yhtälöt

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{B} = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{B} = 0$$

antavat samat ratkaisut.

- (f) [Vaativa] Vieläkin vaihtoehtoisesti, kokeile muuttujien erottamista: kirjoita

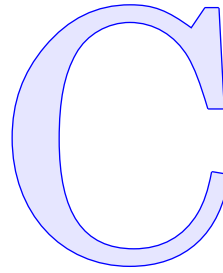
$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}_0 \cdot X(x) \cdot T(t),$$

ja johda erilliset differentiaaliyhtälöt skalaarifunktioille  $X(x)$  ja  $T(t)$ . Älä anna vektorivakio  $\mathbf{B}_0$  hämätä.





# Keplerin rata-alkiot satelliitteille



## C.1 Radan *orientaatiota* avaruudessa kuvaavat kulma-alkiot

- $\Omega$  Nousevan solmun *rektaskensio* eli tähtitieteellinen pituus. Tämän pituuden nollapiste on tähtitaivaalla se paikka, jossa ekliptikan taso ja päiväntasaajan taso leikkaavat ja jossa Aurinko ylittää päiväntasaajan kevään alkaessa: *kevätpäiväntasauspiste*.
- $i$  Inklinaatio, ratatason *kaltevuuskulma* päiväntasaajan tasoon nähden. GPS-satelliiteilla  $i = 55^\circ$ . Tämä on samalla myös korkein leveysaste, pohjoinen ja eteläinen, jossa satelliitti kulkee zeniitin kautta.
- $\omega$  Perigeumin argumentti. Kulmaetäisyys Maan keskipisteestä katsottuna nousevan solmun ja satelliittiradan perigeumin välillä.



## C.2 Radan *kokoa ja muotoa* kuvaavat alkiot

- $a$  Satelliittiradan isoakselin puolikas, radan ”keskimääräinen säde”. Satelliitin keskikorkeus saadaan vähentämällä tästä maapallon säde.
- $e$  Satelliittiradan eksentrisyys,  $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$ , jossa  $b$  on pikkuakselin puolikas. Tämä kuvaa, kuinka paljon Maan keskipiste on ”sivussa” rataellipsin keskipisteestä, toisin sanoen kuinka suuri on perigeumin (radan matalin piste) ja apogeumin (korkein piste) välinen korkeusero.



## C.3 Satelliitin *paikkaa radallaan* kuvaava rata-alkio, ”aikataulu”

On olemassa kolme vaihtoehtoa:

- $v(t)$  Luonnollinen anomalia. Satelliitin suuntakulma ratatasossa Maan keskipisteestä katsottuna ja perigeumista liikesuunnassa laskettuna.
- $E(t)$  Eksenttrinen anomalia. Satelliitin suuntakulma ratatasossa *ellipsin keskipisteestä* katsottuna, sen jälkeen kun rataellipsi on puhallettu ympyräksi.
- $M(t)$  Keskianomalia. Aika, joka on kulunut viime perigeumin läpikulun jälkeen. Yksikkönä on satelliitin kiertoaika eli periodi  $P$ .

Niiden välillä on olemassa seuraavat yhteydet, joiden avulla ne voidaan muuntaa toisikseen:

$$\frac{\tan\left(\frac{1}{2}v(t)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}E(t)\right)} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad E(t) = M(t) + e \sin E(t).$$

Tutki kuva 17.14.  $E$  ja  $v$  ovat geometrisia suureita. Sen sijaan keskianomalia  $M$  on pelkkä ajan mitta skaalattuna satelliitin kiertoaikaan eli periodiin  $P$  ja laskettuna sen perigeumin läpikulkuhetkestä  $\tau$ :

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \frac{t - \tau}{P}.$$



### Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Inklinaation määritelmästä: ”Tämä on samalla myös korkein leveysaste, pohjoinen ja eteläinen, jossa satelliitti kulkee zeniitin kautta.” Pitääkö tämä tarkasti paikkansa litistyneellä maaplaneetalla?

# Kirjallisuutta

## ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

### A

Michael S. Adler. Wikimedia Commons, Total solar eclipse of 2017, 2017. URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Total\\_Solar\\_Eclipse\\_8-21-17.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Total_Solar_Eclipse_8-21-17.jpg). © 2017 (CC BY-SA 4.0). Avattu 19. toukokuuta 2019. 461

Joel Ahola. Nuottavaaran siirroksen deformaatiotutkimus GPS-mittausten avulla. Diplomityö, Teknillinen korkeakoulu, Maanmittausosasto, Espoo, helmikuu 2001. 410, 483

Associated Press. World War II planes found in Greenland in ice 260 feet deep. *The New York Times (archive)*, 4. elokuuta 1988. URL <https://www.nytimes.com/1988/08/04/us/world-war-ii-planes-found-in-greenland-in-ice-260-feet-deep.html>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 502

AUSPOS – Online GPS Processing Service. Geoscience Australia. URL <http://www.ga.gov.au/scientific-topics/positioning-navigation/geodesy/auspos>. Avattu 10. huhtikuuta 2019. 347

### B

Willem Baarda. *A testing procedure for use in geodetic networks*, nide 2 numero 5 sarjassa *Publications on geodesy, new series*. Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1968. URL <https://www.ncgeo.nl/downloads/09Baarda.pdf>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 163, 397

Willem Baarda. *S-transformations and criterion matrices*, nide 5 numero 1 sarjassa *Publications on geodesy, new series*. Netherlands Geodetic Commission, Delft, toinen tarkistettu painos, 1981. URL <https://www.ncgeo.nl/downloads/18Baarda.pdf>. Avattu 2. lokakuuta 2021. 358

BakerNunn.org. URL <http://bakernunn.org>. Avattu 19. toukokuuta 2019. 455

Silvio A. Bedini. Along came a spider – Spinning silk for cross-hairs. The search for cross-hairs for scientific instrumentation, Part 1. *The American Surveyor*,

- March/April 2005a. URL [https://archive.amerisurv.com/PDF/TheAmericanSurveyor\\_BediniAlongCameASpider-SpinningSilkForCross-HairsPart1\\_March-April2005.pdf](https://archive.amerisurv.com/PDF/TheAmericanSurveyor_BediniAlongCameASpider-SpinningSilkForCross-HairsPart1_March-April2005.pdf). Avattu 14. toukokuuta 2019. 97
- Silvio A. Bedini. Along came a spider – Spinning silk for cross-hairs. The search for cross-hairs for scientific instrumentation, Part 2. *The American Surveyor*, May 2005b. URL [https://archive.amerisurv.com/PDF/TheAmericanSurveyor\\_BediniAlongCameASpiderPart2\\_May2005.pdf](https://archive.amerisurv.com/PDF/TheAmericanSurveyor_BediniAlongCameASpiderPart2_May2005.pdf). Avattu 14. toukokuuta 2019. 97
- Mirjam Bilker-Koivula ja Matti Ollikainen. Suomen geoidimallit ja niiden käyttäminen korkeuden muunnoksissa. Tiedote 29, Geodeettinen laitos, 2009. URL <https://www.maanmittauslaitos.fi/sites/maanmittauslaitos.fi/files/fgi/GLtiedote29.pdf>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 273
- BIPM, SI base units. Bureau International des Poids et Mesures. URL <https://www.bipm.org/en/measurement-units/si-base-units>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 24
- Boller and Chivens, Baker Nunn. URL [https://bollerandchivens.com/?page\\_id=1455](https://bollerandchivens.com/?page_id=1455). Avattu 14. toukokuuta 2019. 454
- Ilmari Bonsdorff. Geodeettisen laitoksen vuosikertomus ajalta heinäkuu 1918 – joulukuu 1919. Vuosikertomus, Geodeettinen laitos, 1920. © 1920 Geodeettinen laitos. 205, 209
- Kai Borre. GPS Easy Suite II — A MATLAB Companion. *Inside GNSS*, maaliskuuhuhtikuu 2009. URL <http://www.insidegnss.com/auto/marapr09-borre.pdf>. Avattu 7. huhtikuuta 2019. 307
- Claude Boucher ja Zuheir Altamimi. Memo : Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign, 2007. URL <http://users.auth.gr/kvek/20070327-MEMO-ver6.pdf>. Avattu 11. maaliskuuta 2019. 275
- Nathaniel Bowditch, LL. D. *American Practical Navigator*. National Geospatial-Intelligence Agency, Springfield, Virginia, 2017. URL [https://msi.nga.mil/NGAPortal/MSI.portal?\\_nfpb=true&\\_pageLabel=msi\\_portal\\_page\\_62&pubCode=0002](https://msi.nga.mil/NGAPortal/MSI.portal?_nfpb=true&_pageLabel=msi_portal_page_62&pubCode=0002). Avattu 14. toukokuuta 2019. 153, 166
- Kenneth P. Burnham ja David R. Anderson. *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-theoretic Approach*. Springer Science and Business Media, New York, 2013. ISBN 978-1-4757-2917-7. 387

## C

- Bradley Darren Carter, Michael C. B. Ashley, Yin-Sheng Sun ja John W. V. Storey. Redesigning a Baker-Nunn Camera for CCD imaging. *Proceedings Astronomical Society of Australia*, (1):74–76, 1992. URL <https://newt.phys.unsw.edu.au/~mcba/pubs/carter92.pdf>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 454
- CHAMP Mission. CHAMP – CHAllenging Minisatellite Payload. Deutsches Geoforschungszentrum, Helmholtz-Zentrum Potsdam. URL <https://www.gfz-potsdam.de/champ/>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 485
- Roger Cicala. Iceland spar: The rock that discovered optics. *Lensrentals*, 11. joulukuuta 2013. URL <https://www.lensrentals.com/blog/2013/12/iceland-spar-the-rock-that-discovered-optics/>. Avattu 8. huhtikuuta 2019. 185
- Michael Alan Ralph Cooper. *Modern Theodolites and Levels*. Granada Publishing Ltd, Lontoo, toinen painos, 1982. ISBN 978-0-2461-1502-7. 166
- Michael Alan Ralph Cooper. *Control Surveys in Civil Engineering*. Collins, Lontoo, 1987. ISBN 978-0-8939-7272-1. 410, 412, 415
- Nicholas Crane. *Mercator – The Man who Mapped the Planet*. Weidenfeld and Nicholson, Lontoo, 2002. ISBN 978-0-8050-6624-1. 3
- Wesley G. Crawford, RPLS. Back to basics: Quick setup with a laser plummet. *Point of Beginning*, 1. tammikuuta 2009. URL <https://www.pobonline.com/articles/93629-back-to-basics-quick-setup-with-a-laser-plummet>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 132
- Árpád Czobor ja Zsuzsanna Németh. Balloon-borne beacons for stellar triangulation. *Advances in Space Research*, 1(11):29–34, 1981. URL [https://doi.org/10.1016/0273-1177\(81\)90445-2](https://doi.org/10.1016/0273-1177(81)90445-2). Avattu 14. toukokuuta 2019. 452

## D

- Sönke Dangendorf, Marta Marcos, Guy Wöppelmann, Clinton P. Conrad, Thomas Frederikse ja Riccardo Riva. Reassessment of 20th century global mean sea level rise. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(23): 5946–5951, 2017. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.1616007114>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 499
- Albert Dastre. *Questions scientifiques - L'Heure légale*, nide 4e période, tome 148. 1898. URL [https://fr.wikisource.org/wiki/Questions\\_scientifiques\\_-\\_L'E2%80%99Heure\\_1%C3%A9gale/01](https://fr.wikisource.org/wiki/Questions_scientifiques_-_L'E2%80%99Heure_1%C3%A9gale/01). Avattu 4. maaliskuuta 2020. 53

Charles DeMets, Richard G. Gordon, Donald F. Argus ja Seth Stein. Effect of recent revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions. *Geophysical Research Letters*, 21(20):2191–2194, 1994. URL <https://doi.org/10.1029/94GL02118>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 477

Deutsche Fotothek. Rechenbrett, Vermessung des Inhalts eines Fasses, 1523. URL <http://www.deutschefotothek.de/documents/obj/88963434>. Avattu 18. marraskuuta 2019. 245

John Louis Emil Dreyer. The Well of Eratosthenes. *The Observatory*, 37: 352–353, 1914. URL <http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1914Obs....37..352D/0000352.000.html>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 3

DuPont Teijin Films. Mylar polyester film, Safety in Handling and Use. URL [https://web.archive.org/web/20201027150459/https://stenbacka.fi/wp-content/uploads/sites/3/2016/07/mylar\\_a\\_perustieto.pdf](https://web.archive.org/web/20201027150459/https://stenbacka.fi/wp-content/uploads/sites/3/2016/07/mylar_a_perustieto.pdf). Avattu 19. marraskuuta 2021. 454

## E

Valerie J. Easton ja John H. McColl. STEPS Statistics Glossary v1.1. URL [http://www.stats.gla.ac.uk/steps/glossary/probability\\_distributions.html](http://www.stats.gla.ac.uk/steps/glossary/probability_distributions.html). Avattu 14. huhtikuuta 2019. 36

R. Edgeworth, B. J. Dalton ja Thomas Parnell. The pitch drop experiment. *European Journal of Physics*, sivut 198–200, 1984. URL <https://smp.uq.edu.au/files/109/outreach-pitch-drop-abstract.pdf>. Avattu 12. elokuuta 2019. 479

Jürgen Ehlers, Philip Hughes ja Philip L. Gibbard. *The Ice Age*. Wiley-Blackwell, 2015. ISBN 978-1-118-50781-0. 481

Eiffel Tower, 72 names. List of the 72 names on the Eiffel Tower. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_the\\_72\\_names\\_on\\_the\\_Eiffel\\_Tower](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_the_72_names_on_the_Eiffel_Tower). Avattu 7. huhtikuuta 2019. 190, 321, 354, 445, 490, 497

Anon. *Elements of surveying*. Headquarters, Department of the Army, 1971. URL <https://play.google.com/books/reader?id=564XAAAAYAAJ>. Avattu 14. maaliskuuta 2019. 135

EUREF. EUREF, Reference Frame Sub Commission for Europe. URL <http://www.euref.eu/>. Avattu 14. huhtikuuta 2019. 57

Loránd Eötvös. *Three Fundamental Papers of Loránd Eötvös*. Loránd Eötvös Geophysical Institute of Hungary, 1998. ISBN 963-7135-02-2. Toim. Zoltán Szabó. 444





## F

Eric Fielding. Introduction to SAR Interferometry, 2017. URL [https://appliedsciences.nasa.gov/sites/default/files/Session4-SAR-English\\_0.pdf](https://appliedsciences.nasa.gov/sites/default/files/Session4-SAR-English_0.pdf).  
Avattu 22. syyskuuta 2021. 485

Octavi Fors, Jorge Núñez, José Luis Muiños, Francisco Javier Montojo, Roberto Baena-Gallé, Jaime Boloix, Ricardo Morcillo, María Teresa Merino, Elwood C. Downey ja Michael J. Mazur. Telescope Fabra ROA Montsec: A new robotic wide field Baker-Nunn facility. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(927):522–538, toukokuu 2013. URL <https://doi.org/10.1086/670941>. 454

Clemens Franz. Wikimedia Commons, Der Meridianstein in Hammerfest, Norwegen, 2005. URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hammerfest\\_Meridianstein.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hammerfest_Meridianstein.jpg). © 2005 Clemens Franz (CC BY-SA 3.0). Avattu 13. huhtikuuta 2019. 10

Joshua Fraser, Anoop Haridas, Guna Seetharaman, Raghuveer M. Rao ja Kannappan Palaniappan. KOLAM: a cross-platform architecture for scalable visualization and tracking in wide-area imagery. *Proceedings of the SPIE*, 8747, 2013. URL <https://doi.org/10.1117/12.2018162>. Avattu 17. syyskuuta 2021. 249

Jean-Pierre Friedelmeyer. Du côté des lettres (2) : une lettre de Sophie Germain à Carl Friedrich Gauss (20 février 1807), et la réponse de celui-ci (30 avril 1807), 2014. URL <https://images.math.cnrs.fr/Du-cote-des-lettres-une-lettre-de-Sophie-Germain-a-Carl-Friedrich-Gauss-20>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 349

## G

GDGPS APPS. Automatic Precise Positioning Service of the Global Differential GPS System. URL [https://apps.gdgps.net/apps\\_file\\_upload.php](https://apps.gdgps.net/apps_file_upload.php). Avattu 10. huhtikuuta 2019. 347

Geotrim, Trimnet. URL <https://geotrim.fi/palvelut/trimnet-vrs/>. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 344

GLOBE Task Team and others. The Global Land One-km Base Elevation Project, 1999. URL <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/topo/globe.html>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 246

GRACE Follow-On Mission. Jet Propulsion Laboratory. URL <https://gracefo.jpl.nasa.gov/mission/overview/>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 487



GRACE-missio, hydrologia. NASA. URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Global\\_Gravity\\_Anomaly\\_Animation\\_over\\_LAND.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Global_Gravity_Anomaly_Animation_over_LAND.gif). Avattu 12. huhtikuuta 2019. 487

GRACE Mission. Measuring Earth's Surface Mass and Water Changes. Jet Propulsion Laboratory. URL <https://grace.jpl.nasa.gov/>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 485

Erik W. Grafarend, Horst Kremers, Juhani Kakkuri ja Martin Vermeer. Modelling vertical refraction in the SW Finland Triangular Network TAGNET adjustment. Tiedonanto 87:2, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1987. 175, 178

Erik W. Grafarend, Rey-Jer You ja Rainer Syffus. *Map Projections: Cartographic Information Systems*. Springer Verlag, toinen painos, 2014. ISBN 978-3642364938. 55

Richard S. Gross. The excitation of the Chandler wobble. *Geophysical Research Letters*, 27:2329–2332, 2000. URL <https://doi.org/10.1029/2000GL011450>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 456

Thomas Gruber, Reiner Rummel, Johannes Ihde, Gunter Liebsch, Axel Rülke, Uwe Schäfer, Michael Sideris, Elena Rangelova ja Philip Woodworth. Scientific Roadmap towards Height System Unification with GOCE. Kalvosarja, GOCE 5th International GOCE User Workshop, Pariisi, 2014. URL <https://slideplayer.com/slide/10319716/>. Avattu 17. syyskuuta 2021. 93

GUM. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement. Raportti JGCM 100:2008, Working Group 1, Joint Committee for Guides in Metrology, 2008. URL [https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM\\_100\\_2008\\_E.pdf](https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf). Avattu 17. elokuuta 2019. 30

Werner Gurtner ja Lou Estey. RINEX, The Receiver Independent Exchange Format v. 3.00. 28. marraskuuta 2007. URL <https://epic.awi.de/id/eprint/29985/1/Gur2007a.pdf>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 296, 345

## H

Jonathan Hardis. Why is a second defined as "the duration of 9,192,631,770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the caesium 133 atom."? Why not 9,192,632,000 or other numbers? Quora-vastaus, 2018. URL <https://www.quora.com/Why-is-a-second-defined-as-the-duration-of-9-192-631-770-periods-of-the-radiation-corresponding-to-the-transition-between->



[the-two-hyperfine-levels-of-the-ground-state-of-the-caesium-133-atom-Why-not-9-192-632-000-or-other-numbers](#). Avattu 8. huhtikuuta 2019. **26**

Paul Harnesk ja Åke Davidsson. *Vem är Vem? Stor-Stockholm 1962*. Project Runeberg, 1962. URL <http://runeberg.org/vemarvem/sthlm62/0152.html>. Avattu 17. marraskuuta 2019. **181**

Markku Heikkinen. Solving the shape of the Earth by using digital density models. Tiedonanto 81:2, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1981. **423**

Veikko A. Heiskanen. *Kenttämittaust ja kartoitus*. Werner Söderström Oy, toinen, laajennettu painos, 1943. **136**

Veikko A. Heiskanen ja Seppo Härmälä. *Maastomittaust ja kartoitus*. Werner Söderström Oy, viides, muuttamaton painos, 1963. **16, 18, 43, 93**

Weikko A. Heiskanen ja Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1967. **i, 13, 261, 427, 429, 436**

Weikko A. Heiskanen ja Felix A. Vening Meinesz. *The Earth and its Gravity Field*. McGraw-Hill, New York, 1958. **427**

Hexagon Geosystems, HxGN SmartNet. URL <https://www.hxgnsmartnet.com>. Avattu 4. maaliskuuta 2020. **345**

Nicolàs de Hilster. Geodetic instruments. URL [http://dehilster.info/geodetic\\_instruments/1980\\_sat-sagem\\_AGA-Minilir.php](http://dehilster.info/geodetic_instruments/1980_sat-sagem_AGA-Minilir.php). © Nicolàs de Hilster. Avattu 9. huhtikuuta 2019. **241**

Bernard Hofmann-Wellenhof, Herbert Lichtenegger ja James Collins. *GPS Theory and Practice*. Springer-Verlag, Wien, viides korjattu painos, 2001. ISBN 978-3-2118-3534-0. **i, 277, 292, 319, 321**

Humboldt University Berlin. Friedrich Robert Helmert, 2017. URL [https://www.researchgate.net/publication/318994932\\_Friedrich\\_Robert\\_Helmert\\_founder\\_of\\_modern\\_geodesy\\_on\\_the\\_occasion\\_of\\_the\\_centenary\\_of\\_his\\_death](https://www.researchgate.net/publication/318994932_Friedrich_Robert_Helmert_founder_of_modern_geodesy_on_the_occasion_of_the_centenary_of_his_death). © 2017 Humboldt-Universität zu Berlin, Universitätsbibliothek (CC BY 3.0). Avattu 19. toukokuuta 2019. **71**

Pasi Häkli, Jyrki Puupponen, Hannu Koivula ja Markku Poutanen. Suomen geodeettiset koordinaatistot ja niiden väliset muunnokset. Tiedote 30, Geodeettinen laitos, Masala, 2009. URL <https://www.maanmittauslaitos.fi/sites/maanmittauslaitos.fi/files/fgi/GLtiedote30.pdf>. Avattu 14. toukokuuta 2019. **57, 212, 274**

## I

- Anon. IAG Resolutions adopted at the XXII<sup>th</sup> General Assembly in Birmingham, 1999. URL [https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG\\_Resolutions\\_1999.pdf](https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG_Resolutions_1999.pdf). Resolution 3. Avattu 14. toukokuuta 2019. 197, 198
- IGS Central Bureau. URL <https://igs.org/governance-management#central-bureau>. Avattu 17. syyskuuta 2021. 324
- IMCCE, Milanković app. IMCCE, Paris Observatory. URL <http://vo.imcce.fr/insola/earth/online/earth/online/index.php>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 494
- INSPIRE Knowledge Base. Euroopan komissio. URL <https://inspire.ec.europa.eu>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 246
- The Institute of Australian Culture. The Old Survey [song, 1905], 2012. URL <http://www.australianculture.org/the-old-survey-1905/>. Avattu 19. elokuuta 2019. 117
- International DORIS Service. URL <https://ids-doris.org/>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 470
- IPCC. Climate Change 2007: The physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Julkaisussa Susan Solomon, Dahe Qin, Martin R. Manning, Zhenlin Chen, Melinda Marquis, Kirsten B. Averyt, Melinda M. B. Tignor ja Henry L. Miller, toim., *Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 2007. URL <https://www.ipcc.ch/report/ar4/wg1/>. 501
- IUGG, GGOS. Global Geodetic Observing System. URL <https://ggos.org>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 259

## J

- Haseeb Jamal. Compound curves in engineering survey, 2017. URL <https://www.aboutcivil.org/compound-curves-in-engineering-surveying.html>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 235, 236
- Harold Jeffreys. *The Theory of Probability*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. Oxford University Press, 1998. ISBN 978-0-1915-8967-6. Alkuperäinen julkaisuvuosi © 1939. 387
- Jean Jouzel ja Valerie Masson-Delmotte. EPICA Dome C Ice Core 800KYr deuterium data and temperature estimates. IGBP PAGES/World Data Center



for Paleoclimatology Data Contribution Series # 2007-091. NOAA/NCDC Paleoclimatology Program, Boulder CO, USA., 2007. URL <https://doi.pangaea.de/10.1594/PANGAEA.683655>. Avattu 11. maaliskuuta 2019. 494

Jean Jouzel, Valerie Masson-Delmotte, Olivier Cattani, Gabrielle B. Dreyfus, Sonia Falourd, Georg Hoffmann, Bénédicte Minster, Julius Nouet, Jean-Marc Barnola, Jérôme Chappellaz, Hubertus Fischer, Jean-Charles Gallet, Sigfus Johnsen, Markus Leuenberger, Laetitia Loulergue, Dieter Luethi, Frederic Parrenin, Hans Oerter, Grant M. Raisbeck, Dominique Raynaud, Adrian Schilt, Jakob Schwander, Enricomaria Selmo, Roland Souchez, Renato Spahni, Bernhard Stauffer, Jørgen Peder Steffensen, Barbara Stenni, Thomas F. Stocker, Jean-Louis Tison, Martin Werner ja Eric W. Wolff. Orbital and millennial Antarctic climate variability over the past 800,000 years. *Science*, 317(5839):793–796, 2007. URL <https://doi.org/10.1126/science.1141038>. Avattu 4. maaliskuuta 2020. 494

JPL, The Global Differential GPS System. URL <https://www.gdgps.net>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 345

JUHTA. JHS 163 Suomen korkeusjärjestelmä N2000. JHS-suositus, Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta, 2010. URL <https://www.suomidigi.fi/ohjeet-ja-tuki/jhs-suositukset/jhs-163-suomen-korkeusjarjestelma-n2000>. 207

JUHTA. JHS 178 Kunnan paikkatietopalvelurajapinta. JHS-suositus, Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta, 2012a. URL <https://www.suomidigi.fi/ohjeet-ja-tuki/jhs-suositukset/jhs-178-kunnan-paikkatietopalvelurajapinta-vanhentunut>. 207

JUHTA. JHS 184 Kiintopistemittaus EUREF-FIN -koordinaattijärjestelmässä. JHS-suositus, Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta, 2012b. URL <https://www.suomidigi.fi/ohjeet-ja-tuki/jhs-suositukset/jhs-184-kiintopistemittaus-euref-fin-koordinaattijarjestelmassa>. 207, 209, 211

JUHTA. JHS 185 Asemakaavan pohjakartan laatiminen. JHS-suositus, Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta, 2014. URL <https://www.suomidigi.fi/ohjeet-ja-tuki/jhs-suositukset/jhs-185-asebakaavan-pohjakartan-laatiminen>. 207, 229

JUHTA. JHS 196 EUREF-FIN -järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa. JHS-suositus, Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta, 2016a. URL <https://www.suomidigi.fi/ohjeet-ja-tuki/jhs-suositukset/jhs-196-euref-fin-jarjestelman-mukaiset-koordinaatit-suomessa>. 207, 211

JUHTA. JHS 197 EUREF-FIN -koordinaattijärjestelmät, niihin liittyvät muunnokset ja karttalehtijako. JHS-suositus, Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta, 2016b. URL



<https://www.suomidigi.fi/ohjeet-ja-tuki/jhs-suositukset/jhs-197-euref-fin-koordinaattijarjestelmat-niihin-liittyvat-muunnokset-ja-karttalehtijako>. 61, 63, 207

## K

Anon. Kaavoitusmittausohjeet 2003. Julkaisu 94, Maanmittauslaitos, 31. tammikuuta 2003. URL [https://www.maanmittauslaitos.fi/sites/maanmittauslaitos.fi/files/old/kaavoitusmittausohjeet\\_2003\\_0.pdf](https://www.maanmittauslaitos.fi/sites/maanmittauslaitos.fi/files/old/kaavoitusmittausohjeet_2003_0.pdf). Avattu 22. syyskuuta 2021. 207

Heribert Kahmen ja Wolfgang Faig. *Surveying*. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1988. ISBN 978-3-1100-8303-3. i, 27, 104, 120, 121, 132, 137, 145, 175, 183, 216, 218, 250, 253, 254, 382

Juhani Kakkuri. *Stellar Triangulation with Balloon-borne Beacons and Satellites*. Väitöskirja, Helsingin yliopisto, 1973. 452

Juhani Kakkuri, Teuvo Parm, Vidal Ashkenazi ja S. A. Crane. Accuracy analysis of the Finnish laser geodimeter traverse. Julkaisussa *Proc., Int. Symp. on Geodetic Networks and Computations*, nide 5, sivut 85–93, München, 1981. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 201

Ulla Kallio. *Tasoitustasku*. TKY 587. Otatieto, kolmas painos, 1998. ISBN 978-9-5167-2267-5. i, 410

Kari-Pekka Karlsson. Maastotietojärjestelmä 2030 -selvitys. Loppuraportti, Maa- ja metsätalousministeriö, 2015. URL [http://mmm.fi/documents/1410837/1801204/Maastotietojarjestelma\\_2030\\_selvitys\\_Loppuraportti\\_28.2.2015.pdf](http://mmm.fi/documents/1410837/1801204/Maastotietojarjestelma_2030_selvitys_Loppuraportti_28.2.2015.pdf). Avattu 24. marraskuuta 2021. 223

Charles Karney. Online Geoid Calculator. URL <https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/GeoidEval>. Avattu 14. huhtikuuta 2019. 115

Shfaqat Abbas Khan, Lin Liu, John Wahr, Ian Howat, Ian Joughin, Tonie van Dam ja Kevin Fleming. GPS measurements of crustal uplift near Jakobshavn Isbræ due to glacial ice mass loss. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115(B9):B09405, 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2010JB007490>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 496

Hannu Koivula ja Jaakko Mäkinen. Geodetic activities at Finnish Antarctic research station Aboa. Julkaisussa *Fifth International Antarctic Geodesy Symposium AGS'03, Lviv, Ukraine, Sept. 15–17, 2003*. URL [https://www.researchgate.net/publication/237467751\\_GEODETTIC\\_ACTIVITIES\\_AT\\_FINNISH\\_ANTARCTIC\\_RESEARCH\\_STATION\\_ABOA](https://www.researchgate.net/publication/237467751_GEODETTIC_ACTIVITIES_AT_FINNISH_ANTARCTIC_RESEARCH_STATION_ABOA). Avattu 14. toukokuuta 2019. 496



Hannu Koivula, Jaakko Kuokkanen, Simo Marila, Sonja Lahtinen ja Tuukka Mattila. Assessment of sparse GNSS network for network RTK. *Journal of Geodetic Science*, 8(1):136–144, 2018. URL <https://doi.org/10.1515/jogs-2018-0014>. Avattu 15. elokuuta 2019. 343

Yoshihide Kozai. The motion of a close Earth satellite. *Astronomical Journal*, 64(1274):367–377, 1959. URL <https://doi.org/10.1086/107957>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 320

T. J. Kukkamäki ja Pekka Lehmuskoski. Influence of the earth magnetic field on Zeiss Ni 002 levels. Tiedonanto 84:1, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1984. 104

Erkki Kääriäinen. The second levelling of Finland in 1935-1955. Julkaisu 61, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1966. 109

## L

Jacques Laskar, Philippe Robutel, Frédéric Joutel, Mickael Gastineau, Alexandre C. M. Correia ja Benjamin Levrard. A long term numerical solution for the insolation quantities of the Earth. *Astronomy and Astrophysics*, 428:261–285, 2004. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041335>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 494

Javier Arribas Lázaro. *GNSS Array-based Acquisition: Theory and Implementation*. Väitöskirja, Universitat Politècnica de Catalunya, 2012. URL <https://theses.eurasip.org/theses/449/gnss-array-based-acquisition-theory-and/download/>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 294

Rachel Leah. Rapper B.o.B. starts GoFundMe to prove earth is flat. *Salon*, 25. syyskuuta 2017. URL <https://www.salon.com/2017/09/25/b-o-b-flat-earth/>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 20

Leica. *TPS - System 1000 – Quick Start*. Leica Geosystems AG, Heerbrugg, Sveitsi, 1997. URL [http://www.engineeringsurveyor.com/software/leica/tps2000\\_quick\\_start\\_en.pdf](http://www.engineeringsurveyor.com/software/leica/tps2000_quick_start_en.pdf). Avattu 1. joulukuuta 2021. 150

Cherry L. E. Lewis. *The Dating Game*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 978-1-1391-9713-7. 476

Martin Lidberg, Jan M. Johansson, Hans-Georg Scherneck ja Glenn A. Milne. Recent results based on continuous GPS observations of the GIA process in Fennoscandia from BIFROST. *Journal of Geodynamics*, 50(1):8–18, July 2009. URL <https://doi.org/10.1016/j.jog.2009.11.010>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 481

## M

Maanmittauslaitos, Korkeusmalli 10 m. URL

<https://www.maanmittauslaitos.fi/kartat-ja-paikkatieto/asiantuntevalle-kayttajalle/tuotekuvaukset/korkeusmalli-10-m>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 246

Maanmittauslaitos, Korkeusmalli 2 m. URL

<https://www.maanmittauslaitos.fi/kartat-ja-paikkatieto/asiantuntevalle-kayttajalle/tuotekuvaukset/korkeusmalli-2-m>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 246

Maanmittauslaitos, Paikkatietoikkuna. URL

<https://kartta.paikkatietoikkuna.fi/>. Avattu 29. syyskuuta 2021. 85, 86

Maanmittauslaitos, RINEX-palvelu. URL

<https://www.maanmittauslaitos.fi/kartat-ja-paikkatieto/paikannuspalvelu/rinex-palvelu>. Avattu 10. huhtikuuta 2019. 346

Maanmittauslaitos, Yleistä paikannuspalveluista. URL

<https://www.maanmittauslaitos.fi/kartat-ja-paikkatieto/asiantuntevalle-kayttajalle/finpos-paikannuspalvelu>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 345

Stephen Malys, John H. Seago, Nikolaos K. Pavlis, P. Kenneth Seidelmann ja George H. Kaplan. Why the Greenwich meridian moved. *Journal of Geodesy*, 89(12):1263–1272, 2015. URL <https://doi.org/10.1007/s00190-015-0844-y>. Avattu 14. toukokuuta 2019.

Stephen Malys, Robert Wong ja Scott A. True. The WGS84 Terrestrial Reference Frame in 2016. Presented at eleventh meeting of the International Committee on GNSS, November 2016, Sochi, Russia, 2016. URL <https://www.unoosa.org/pdf/icg/2016/icg11/wgd/02wgd.pdf>. Avattu 17. syyskuuta 2021. 58

Pierre Louis Moreau de Maupertuis. *La Figure de la Terre, Déterminée par les observations*. . . . Jean Catuffe, Amsterdam, 1738. URL <https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/69470/001.pdf>. Avattu 7. huhtikuuta 2019. 1, 8

Maupertuis-säätiö, Astemittaus. URL

<https://www.maupertuis.fi/tieteelliset-mittaukset/astemittaus/>. Avattu 7. huhtikuuta 2019. 8

Patrap Misra ja Per Enge. *Global Positioning System – Signals, Measurements, and Performance*. Ganga-Jamuna Press, tarkistettu toinen painos, 2010. ISBN 978-0-9709-5442-8. 283





Soumen Mondal, K. G. Gupta, Sneh Lata, Biman J. Medhi, Tarun Bangia, T. S. Kumar, Shobhit Yadav ja S. K. Singh. Development of ARIES Baker-Nunn camera to a wide-field Imaging Telescope with CCD. *arXiv*, 2009. URL <https://arxiv.org/pdf/0905.0361.pdf>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 454

Oliver Montenbruck, Peter Steigenberger ja André Hauschild. Broadcast versus precise ephemerides: A multi-GNSS perspective. *GPS Solutions*, 19(2): 321–333, 2015. URL <https://doi.org/10.1007/s10291-014-0390-8>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 333

Walter Heinrich Munk. The U.S. Commission on Ocean Policy, Testimony, 12. huhtikuuta 2002. URL [https://govinfo.library.unt.edu/oceancommission/meetings/apr18\\_19\\_02/munk\\_statement.pdf](https://govinfo.library.unt.edu/oceancommission/meetings/apr18_19_02/munk_statement.pdf). Avattu 14. toukokuuta 2019. 469

Jaakko Mäkinen, Andreas Engfeldt, Linda Engman, Bjørn Geir Harsson, Tönis Oja, Sven Rekkedal, Knut Røthing, Paavo Rouhiainen, Hannu Ruotsalainen, H. Skatt, Gabriel Strykowski, Heikki Virtanen, Karin Wiecekowski ja Detlef Wolf. The Fennoscandian Land Uplift Gravity Lines: Comparison of observed gravity change with observed vertical motion and with GIA models. Raportti, *Nordiska Kommissionen för Geodesi*, 2010. URL [https://www.nordicgeodeticcommission.com/wp-content/uploads/2014/10/1-Makinen\\_et\\_al\\_land\\_uplift\\_gravity\\_lines.pdf](https://www.nordicgeodeticcommission.com/wp-content/uploads/2014/10/1-Makinen_et_al_land_uplift_gravity_lines.pdf). Avattu 11. maaliskuuta 2019. 481

## N

NASA JPL, TOPEX/Poseidon, Jason. URL <https://sealevel.jpl.nasa.gov/>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 499

NASA Solar Dynamics Observatory, Atmospheric Imaging Assembly. URL [https://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/browse/2013/07/15/20130715\\_001424\\_4096\\_0171.jpg](https://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/browse/2013/07/15/20130715_001424_4096_0171.jpg). Avattu 19. toukokuuta 2019. 462

NGS, Computation utilities. URL [https://geodesy.noaa.gov/TOOLS/Inv\\_Fwd/Inv\\_Fwd.html](https://geodesy.noaa.gov/TOOLS/Inv_Fwd/Inv_Fwd.html). Avattu 14. syyskuuta 2020. 67, 85

NOAA ym. ETOPO1 Global Relief Model, 2008. URL <http://dx.doi.org/10.7289/V5C8276M>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 246

NOAA, Ocean currents. How does the ocean affect climate and weather on land? URL <https://oceanexplorer.noaa.gov/facts/climate.html>. © NOAA. Avattu 12. marraskuuta 2019. 489

## O

GNU Octave. URL <https://www.gnu.org/software/octave/>. Avattu 13. huhtikuuta 2019. **326**

OGC, Catalogue Service. Open Geospatial Consortium. URL <https://www.ogc.org/standards/cat>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. **225**

Marko Ollikainen. Kaavoitusmittausohjeiden uudistaminen poiki uuden JHS-suosituksen. *Positio*, 2013. URL [https://www.paikkatietoikkuna.fi/c/document\\_library/get\\_file?uuid=b562d56d-b26e-45ca-94f0-117101c1f541&groupId=108478](https://www.paikkatietoikkuna.fi/c/document_library/get_file?uuid=b562d56d-b26e-45ca-94f0-117101c1f541&groupId=108478). Avattu 22. syyskuuta 2021. **207**

Matti Ollikainen. GPS-koordinaattien muuntaminen kartastokoordinaateiksi. Tiedote 8, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1993. **271, 273, 274**

Boudewijn Overgaauw, Boudewijn A. C. Ambrosius ja Karel F. Wakker. Analysis of the EUREF-89 GPS data from the SLR/VLBI sites. *Bulletin Géodésique*, 68:19–28, 1994. URL <https://doi.org/10.1007/BF00806749>. Avattu 14. toukokuuta 2019. **57**

## P

Teuvo Parm. Kansallisen koordinaattijärjestelmän luominen Suomessa. *Maanmittaus*, 63(1), 1988. **56**

Jerry Penry ja David Lee Ingram. The American theodolite. *The American Surveyor*, 10(9), 2013. URL [https://archive.amerisurv.com/PDF/TheAmericanSurveyor\\_PenryIngram-TheAmericanTheodolite\\_Vol10No9.pdf](https://archive.amerisurv.com/PDF/TheAmericanSurveyor_PenryIngram-TheAmericanTheodolite_Vol10No9.pdf). Avattu 22. syyskuuta 2021. **135**

William B. Penzes. Time Line for the Definition of the Meter, ilman vuosilukua. URL <https://www.nist.gov/system/files/documents/pml/div683/museum-timeline.pdf>. Avattu 17. syyskuuta 2021. **26**

Mika Pitkä. Sataman tehokkuuden osatekijät – tarkastelussa lastauksen ja purun automatisointi. Insinööritö, Kymenlaakson ammattikorkeakoulu, 2009. **241**

Porvoo. Koordinaatti- ja korkeusjärjestelmä. URL <https://www.porvoo.fi/koordinaatti-ja-korkeusjarjestelma>. © Porvoon kaupunki. Avattu 26. marraskuuta 2019. **384**

Robert Pound ja Glen A. Rebka, Jr. Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Physical Review Letters*, 3(9):439–441, 1959. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.3.439>. Avattu 14. toukokuuta 2019. **186**



Markku Poutanen. *GPS-paikanmäärittäminen*. Ursa, Helsinki, 1998. ISBN 951-9269-89-4. Ursan julkaisuja 64. **i**

Markku Poutanen. *Satelliittipaikannus*. Ursa, Helsinki, 2017. ISBN 978-9-5259-8541-2. **i, 277, 292, 319, 321**

Jyrki Puupponen ja Jaakko Järvinen. Historical video documentation of triangulation measurements in Finland. Julkaisussa *Integrating Generations, FIG Working Week*, Stockholm, Sweden, 14.–19. kesäkuuta 2008. URL [https://www.fig.net/resources/proceedings/fig\\_proceedings/fig2008/papers/hs05/hs05\\_02\\_puupponen\\_jarvinen\\_2934.pdf](https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/fig2008/papers/hs05/hs05_02_puupponen_jarvinen_2934.pdf). Avattu 8. huhtikuuta 2019. **57**

## R

RAKLI ry. Kiinteistöalan yhteiskunnallinen ja kansantaloudellinen merkitys. Raportti, Asunto-, toimitila- ja rakennuttajaliitto RAKLI, 2014. URL <https://kti.fi/wp-content/uploads/Kiinteist%C3%B6alan-yhteiskunnallinen-ja-kansantaloudellinen-merkitys-2014.pdf>. Avattu 17. syyskuuta 2021. **16**

Reginald Reagan. One Matrix, Inverted, 26. heinäkuuta 2021. URL <https://raginrayguns.tumblr.com/post/657824795686207489/david-salsburg-the-lady-tasting-tea-during>. Avattu 17. syyskuuta 2021. **507**

Jan Reijnoudt. Het hele IJsselmeer waterpas, 1996. URL [https://www.digibron.nl/viewer/collectie/Digibron/id/tag:RD.nl,19960213:newsml\\_9f3bdeec998e02ec9e49004d5e149c1661831c48735609a683bd383e](https://www.digibron.nl/viewer/collectie/Digibron/id/tag:RD.nl,19960213:newsml_9f3bdeec998e02ec9e49004d5e149c1661831c48735609a683bd383e). Avattu 22. syyskuuta 2021. **92**

ROB, EUREF Permanent GNSS Network. Royal Observatory of Belgium. URL [http://www.epncb.oma.be/\\_networkdata/stationlist.php](http://www.epncb.oma.be/_networkdata/stationlist.php). Avattu 10. huhtikuuta 2019. **85, 346**

Rovaniemi, Astemittausretki Tornionlaaksoon. Maupertuis’n astemittaus Tornionlaaksossa 1736–1737. Rovaniemen kaupunki. URL <http://lapinkavijat.rovaniemi.fi/maupertuis/mittausretki.html>. Avattu 16. toukokuuta 2019. **8**

The R Project for Statistical Computing. R Foundation. URL <https://www.r-project.org/>. Avattu 13. huhtikuuta 2019. **326**

Jean M. Rüeger. *Electronic Distance Measurement – An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, neljäs painos, 1996. **197, 199, 200, 301**

Jean M. Rüeger. Refractive indices of light, infrared and radio waves in the atmosphere. *UNISURV report S 68*, School of Surveying and Spatial Information Systems, University of New South Wales, 2002. URL [https://www.sage.unsw.edu.au/sites/sage/files/SAGE\\_collection/SpecialSeries/s68.pdf](https://www.sage.unsw.edu.au/sites/sage/files/SAGE_collection/SpecialSeries/s68.pdf). Avattu 4. lokakuuta 2021. **199, 301**



Reiner Rummel ja Fernando Sansò, toim. *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, nide 50 sarjassa *Lecture Notes in Earth Sciences*, 1993. Springer-Verlag. 496

## S

Hannu Salmenperä. Runko- ja kartoitusmittaukset. Raportti 4, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Geoinformatiikan laboratorio, Tampere, 1998. i, 206, 227

Sanastokeskus TSK. Geoinformatiikan sanasto. TSK 51, Maanmittauslaitos, 2018. URL <http://www.tsk.fi/tiedostot/pdf/GeoinformatiikanSanasto.pdf>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 207

Gavin Schrock. CERN. xyHt *magazine*, 2014. URL <https://www.xyht.com/civiltransportation/cern-2/>. Avattu 2. heinäkuuta 2019. 111

Scilab Enterprises. URL <https://www.scilab.org/>. Avattu 13. huhtikuuta 2019. 326

Sea Level Research Group. University of Colorado. URL <https://sealevel.colorado.edu/>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 500

Günter Seeber. *Satellitengeodäsie. Grundlagen, Methoden und Anwendungen*. De Gruyter, Berlin New York, 1989. ISBN 978-3-1101-0082-2. 300

Shuttle Radar Topography Mission, 2014. URL <https://www2.jpl.nasa.gov/srtm/>. Avattu 22. syyskuuta 2021. 246

Juho Simonen. Maalaserkeilaus infrarakentamisen mittauksissa. Diplomityö, Aalto-yliopisto, 2012. 135

Dava Sobel. *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time*. Walker and Company, New York, 1998. ISBN 978-1-8570-2571-2. Paperback. 451

SOHO images. ESA and NASA. URL <https://sohowww.nascom.nasa.gov/data/realtime-images.html>. Avattu 5. maaliskuuta 2020. 462

SOHO MPEG movies. ESA and NASA. URL <https://sohowww.nascom.nasa.gov/data/realtime/mpeg/>. Avattu 5. maaliskuuta 2020. 462

SOPAC, GPS Explorer. Scripps Orbit and Permanent Array Center. URL <http://sopac.ucsd.edu/dataBrowser.shtml>. Avattu 5. maaliskuuta 2020. 346



SOPAC, Hatanaka file compression. Scripps Orbit and Permanent Array Center. URL <http://sopac.ucsd.edu/hatanaka.shtml>. Avattu 5. maaliskuuta 2020. 346

Govert Strang van Hees. Stokes' formula using fast Fourier techniques. *Manuscripta geodaetica*, 15:235–239, 1990. URL [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3104-2\\_47](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3104-2_47). Condensed version. Avattu 14. toukokuuta 2019. 14

## T

Reijo Taimela. Raidegeometrian suunnittelu. Tutkimuksia ja selvityksiä 22, Liikennevirasto, 2011. URL [https://julkaisut.vayla.fi/pdf3/its\\_2011-22\\_raidegeometrian\\_suunnittelu\\_web.pdf](https://julkaisut.vayla.fi/pdf3/its_2011-22_raidegeometrian_suunnittelu_web.pdf). Avattu 8. elokuuta 2019. 235, 236

Mikko Takalo. Computer-supported Finnish EDM height traversing. Part I: technical description. *Surveying Science in Finland*, 13(2):56–99, 1995. 93, 177

Mikko Takalo ja Paavo Rouhiainen. On system calibration of digital level. Julkaisussa *Ingenieurvermessung 2004, 14th International Conference on Engineering Surveying*, Zürich, 15. – 19. maaliskuuta 2004. URL [https://www.researchgate.net/publication/254398461\\_Development\\_of\\_a\\_System\\_Calibration\\_Comparator\\_for\\_Digital\\_Levels\\_in\\_Finland](https://www.researchgate.net/publication/254398461_Development_of_a_System_Calibration_Comparator_for_Digital_Levels_in_Finland). Avattu 22. syyskuuta 2021. 105

Mikko Takalo, Paavo Rouhiainen, Pekka Lehmuskoski ja Veikko Saaranen. On calibration of Zeiss DiNi12. Julkaisussa *FIG Working Week 2001*, Seoul, Korea, 6. – 11. toukokuuta 2001. FIG Commission 5. URL [https://www.researchgate.net/publication/237495166\\_ON\\_CALIBRATION\\_OF\\_ZEISS\\_DINI12](https://www.researchgate.net/publication/237495166_ON_CALIBRATION_OF_ZEISS_DINI12). Avattu 12. maaliskuuta 2019. 105

Martti Tikka. *Käytännön geodesia III. Mittausmenetelmät*. Otakustantamo, Espoo, 1985. i, 183

Martti Tikka. *Käytännön geodesia I. Mittaustekniikan perusteet ja rakennusteknilliset sovellutukset*. Otatieto, Helsinki, kolmas tarkistettu painos, 1991. i, 96, 108, 139, 157, 218, 239

Waldo R. Tobler. A Computer Movie Simulating Urban Growth in the Detroit Region. *Economic Geography*, 46, Supplement: Proceedings. International Geographical Union. Commission on Quantitative Methods, 1970. URL <https://www.jstor.org/stable/143141>. Avattu 22. syyskuuta 2021. 327

Wolfgang Torge. *Geodesy*. Walter de Gruyter, Berlin – New York, kolmas täysin tarkistettu ja laajennettu painos, 2001. ISBN 978-3-11-087995-7. i, 3, 14, 15

## U

UNAVCO, EGM96 geoid calculator. URL

<https://www.unavco.org/software/geodetic-utilities/geoid-height-calculator/geoid-height-calculator.html>. Avattu 21. syyskuuta 2021. 115

UNAVCO, plate-motion calculator. URL

<https://www.unavco.org/software/geodetic-utilities/plate-motion-calculator/plate-motion-calculator.html/models>. Avattu 5. maaliskuuta 2020. 478

USGS, GTOPO30. URL [https://www.usgs.gov/centers/eros/science/usgs-eros-archive-digital-elevation-global-30-arc-second-elevation-gtopo30?qt-science\\_center\\_objects=0#qt-science\\_center\\_objects](https://www.usgs.gov/centers/eros/science/usgs-eros-archive-digital-elevation-global-30-arc-second-elevation-gtopo30?qt-science_center_objects=0#qt-science_center_objects). Avattu 9. huhtikuuta 2019. 246

## VW

Peter Vaníček ja Edward Krakiwsky. *Geodesy – The Concepts*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, toinen painos, 1986. ISBN 978-0-4448-6149-8. i, 410

Vasamuseet, Rörelsemätningar. URL

<https://www.vasamuseet.se/forskning/stottning/matningar>. Avattu 2. lokakuuta 2021. 111

Martin Vermeer. A new SEASAT altimetric geoid for the Baltic. Tiedonanto 83:4, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1983. 500

Paul Wessel, W. H. F. Smith, Remco Scharroo, J. Luis ja F. Wobbe. Generic Mapping Tools: Improved Version Released. *EOS Trans. AGU*, 94(45): 409–410, 2013. URL <http://dx.doi.org/10.1002/2013EO450001>. iii

Wikimedia Commons, Decca Navigator Mk 12. URL

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Decca\\_Navigator\\_Mk\\_12.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Decca_Navigator_Mk_12.jpg). © 2005 User:Stahlkocher (GFDL). Avattu 14. huhtikuuta 2019. 279

Wikimedia Commons, Exploration theodolite. URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Exploration\\_theodolite\\_img\\_1660.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Exploration_theodolite_img_1660.jpg). ©

2005 User:Rama (CeCILL). Avattu 14. huhtikuuta 2019. 118

Wikimedia Commons, Kalsiittikide. A calcite crystal displays the double refractive properties while sitting on a sheet of graph paper. URL

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Crystal\\_on\\_graph\\_paper.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Crystal_on_graph_paper.jpg). © 2011 User:APNMJM (CC BY-SA 3.0). Avattu 14. huhtikuuta 2019. 187

Wikimedia Commons, Korkkiruuvi. URL

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Korkenzieher.jpg>. © 2004 Horst Frank (GFDL). Avattu 14. huhtikuuta 2019. 261



- Wikimedia Commons, Mittapöytä ja kiikariviivain. Cut-away view of plane table with alidade. URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plane\\_table\\_cgs00426.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plane_table_cgs00426.jpg). © NOAA. Avattu 13. huhtikuuta 2019. 42
- Wikimedia Commons, Nollameridiaani (Greenwich). URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Prime\\_meridian.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Prime_meridian.jpg). © 2005 User:Prioryman (GFDL). Avattu 14. huhtikuuta 2019. 48
- Wikimedia Commons, Standardimetri Pariisissa. One of the historical (18th century), standard-meters (mètre-étalon) by Chalgrin located at 36, rue de Vaugirard in Paris. URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%A8tre-%C3%A9talon\\_Paris.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%A8tre-%C3%A9talon_Paris.JPG). © 2010 User:LPLT (CC BY-SA 3.0). Avattu 13. huhtikuuta 2019. 24
- Wikipedia, 1462 Zamenhof. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/1462\\_Zamenhof](https://en.wikipedia.org/wiki/1462_Zamenhof). Avattu 26. elokuuta 2019. 447
- Wikipedia, 3D rotation group, Topology. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_rotation\\_group#Topology](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_rotation_group#Topology). Avattu 8. huhtikuuta 2019. 135
- Wikipedia, Alfvén's theorem. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Alfv%C3%A9n's\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Alfv%C3%A9n's_theorem). Avattu 1. syyskuuta 2021. 513
- Wikipedia, The AN/UYK-1 (TRW-130) Computer. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Transit\\_\(satellite\)#The\\_AN/UYK-1\\_\(TRW-130\)\\_Computer](https://en.wikipedia.org/wiki/Transit_(satellite)#The_AN/UYK-1_(TRW-130)_Computer). Avattu 1. heinäkuuta 2019. 281
- Wikipedia, Bonferroni correction. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Bonferroni\\_correction](https://en.wikipedia.org/wiki/Bonferroni_correction). Avattu 10. huhtikuuta 2019. 404
- Wikipedia, Dandelin spheres. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin\\_spheres](https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres). Avattu 12. huhtikuuta 2019. 464
- Wikipedia, Discrete wavelet transform. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\\_wavelet\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_wavelet_transform). Avattu 9. huhtikuuta 2019. 249
- Wikipedia, Earth's internal heat budget. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Earth's\\_internal\\_heat\\_budget](https://en.wikipedia.org/wiki/Earth's_internal_heat_budget). Avattu 12. huhtikuuta 2019. 477
- Wikipedia, Eläinrata. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/El%C3%A4inrata>. Avattu 14. huhtikuuta 2019. 448

Wikipedia, Euler spiral. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_spiral](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_spiral). Avattu 9. huhtikuuta 2019. 236

Wikipedia, Gold code. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Gold\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Gold_code). Avattu 9. huhtikuuta 2019. 287

Wikipedia, Groundwater-related subsidence. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Groundwater-related\\_subsidence](https://en.wikipedia.org/wiki/Groundwater-related_subsidence). Avattu 12. huhtikuuta 2019. 482

Wikipedia, Karkaussekunti. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Karkaussekunti>. Avattu 10. huhtikuuta 2019. 458

Wikipedia, Kelvinin ja Stokesin lause. URL [https://fi.wikipedia.org/wiki/Stokesin\\_lause](https://fi.wikipedia.org/wiki/Stokesin_lause). Avattu 12. huhtikuuta 2019. 512

Wikipedia, Kilobyte. URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Kilobyte>. Avattu 8. huhtikuuta 2019. 25

Wikipedia, The LAGEOS time capsule. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/LAGEOS#Time\\_capsule](https://en.wikipedia.org/wiki/LAGEOS#Time_capsule). Avattu 12. huhtikuuta 2019. 471

Wikipedia, Lisäyksiköitä. URL [https://fi.wikipedia.org/wiki/Kansainv%C3%A4linen\\_yksikk%C3%B6j%C3%A4rjestelm%C3%A4#Lis%C3%A4yksik%C3%B6it%C3%A4](https://fi.wikipedia.org/wiki/Kansainv%C3%A4linen_yksikk%C3%B6j%C3%A4rjestelm%C3%A4#Lis%C3%A4yksik%C3%B6it%C3%A4). Avattu 14. huhtikuuta 2019. 25

Wikipedia, Loksodromi. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Loksodromi>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 54

Wikipedia, Magnetosfääri. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Magnetosf%C3%A4ri>. Avattu 12. huhtikuuta 2019. 463

Wikipedia, Photon polarization. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Photon\\_polarization](https://en.wikipedia.org/wiki/Photon_polarization). Avattu 8. huhtikuuta 2019. 187

Wikipedia, Planimetri. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Planimetri>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 253

Wikipedia, Poolisuus. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Poolisuus>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 199

Wikipedia, Pulsari. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Pulsari>. Avattu 9. huhtikuuta 2019. 513

Wikipedia, Schmidt camera. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Schmidt\\_camera](https://en.wikipedia.org/wiki/Schmidt_camera). Avattu 10. huhtikuuta 2019. 452





Wikipedia, Shoelace formula. URL

[https://en.wikipedia.org/wiki/Shoelace\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula). Avattu 9. huhtikuuta 2019. 252

Wikipedia, Sophie Germain. URL

[https://en.wikipedia.org/wiki/Sophie\\_Germain#Correspondence\\_with\\_Gauss](https://en.wikipedia.org/wiki/Sophie_Germain#Correspondence_with_Gauss). Avattu 24. marraskuuta 2019. 349

Wikipedia, Struven ketju. URL [https://fi.wikipedia.org/wiki/Struven\\_ketju](https://fi.wikipedia.org/wiki/Struven_ketju).

Avattu 17. elokuuta 2019. 8

Wikipedia, Synoptiikka. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Synoptiikka>. Avattu

9. huhtikuuta 2019. 328

Wikipedia, Theorema Egregium. URL

[https://en.wikipedia.org/wiki/Theorema\\_Egregium](https://en.wikipedia.org/wiki/Theorema_Egregium). Avattu 8. huhtikuuta 2019. 54

Wikipedia, Transit 5B-5 — oldest active satellite. URL

[https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Transit\\_\(satellite\)#Transit\\_5B-5\\_-\\_oldest\\_active\\_satellite](https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Transit_(satellite)#Transit_5B-5_-_oldest_active_satellite). Avattu 30. lokakuuta 2019. 277

David Vine. *Island of Shame: The Secret History of the U.S. Military Base on Diego Garcia*. Princeton University Press, tarkistettu painos, 2011. ISBN 978-0-6911-4983-7. URL <https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691149837/island-of-shame>.

Avattu 22. syyskuuta 2021. 294, 296

Lydia E. Winkel ja Hans de Vries. *De ondergrondse pers 1940-1945*. Veen, 6. painos, 1989. URL [http://publications.niod.knaw.nl/publications/WinkelDeVries\\_OndergrondsePers\\_1940-1945.pdf#page=224](http://publications.niod.knaw.nl/publications/WinkelDeVries_OndergrondsePers_1940-1945.pdf#page=224). merkintä 748, © 2014 NIOD (CC BY-SA 3.0). Avattu 5. marraskuuta 2019. 417

Yrjö Väisälä. Maan toinen kuu. *Tähtitaivas*, 6, 1946. 452

Väylä, Radionavigaatiopalvelut. URL

<https://vayla.fi/palveluntuottajat/ammattimerenkulku/liikkuminen-vesivaylilla/radionavigaatiopalvelut>. Avattu 22. syyskuuta 2021. 344

## Y

Ympäristöministeriö, Maankäyttö ja rakentaminen. URL

<https://ym.fi/maankaytto-ja-rakennuslaki>. Avattu 17. syyskuuta 2021. 229



## Ö

Victor Rafael Ölander. Trigonometriset korkeusmittaukset pitkällä välimatkoilla ja niiden tarkkuus. *Maanmittaus*, 1932. 178

# Hakemisto

## ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

### A

aallokko, avomeren, 499  
aaltofunktio, kompleksi, 184  
aaltoliike  
    aallonpituus, 185  
    taajuus, 185  
    vaihe, 184, 185  
aaltoliiketeoria, valon, 184  
aaltopaketti, 299  
Aalto-yliopisto, 14  
Aboa (Dronning Maud Land,  
    Etelämanner), 496  
*accuracy* vastaan *precision*, 28  
*active spare* (GPS), 285  
AGA/Minilir, 241  
Ahvenanmeri, 93  
aika (koordinaatti), 46, 84  
aika (suure), 26, 458  
aika, tarkka, jakelu, 280  
aika-avaruus  
    geometria, 418  
    kaarevuustensori, 418  
aikaeromittaus, 279  
aikavyöhykejärjestelmä, 47, 458  
ajanlasku, kristillisen Euroopan, 1  
ajanmäärittäminen, 451  
Akaiken informaatiokriteeri, 387  
akku, GPS-satelliitin, 283  
akviferi, 482  
Aleksandria (Egypti), 3  
alempi vaippa, 479  
Alfvénin lause, 511  
Alfvén, Hannes, 513  
alhidadi, 122  
alhidaditasain, 125  
    säätö, 125  
alityöntö, 427, 477  
Alkmaar (Alankomaat), 3, 5, 42  
alkuliitossuunta, 171

alkulämpö, Maan, 477  
almanakka, GPS, 285, 287, 321  
*almucantar*, 441  
ambiguiteetti, *katso*  
    kokonaislukutuntematon  
ambiguiteettiongelma, 280, 297  
    etäisyysmittaus, 192  
*The American Practical Navigator*, 153,  
    166  
amplitudimodulaatio, 285  
Amsterdam (Alankomaat), 78, 91  
Andit (vuoristo), 9  
ANNA (satelliitti), 454  
*antenna reference point* (ARP), 292  
antenni (GNSS)  
    *choke-ring* -malli, 292, 293  
    kalibrointi, 292, 293  
    pakkokeskistys, 130  
    sähköinen keskus, 292, 293  
    vaihekeskipisteen vaihtelu, 292  
antikorrelaatio, 36  
apogeum, 515  
apogeumin korkeus, 466  
Apollo-projekti, 470  
APPS (ohjelmisto), 347  
arctan (funktio), 69  
Aries-piste, 449  
arktinen kesä, 495  
arvojoukko, 31  
”*as-built*” -kartoitus, 226, 238  
asemakaava, 229  
asemapiirros, 239  
asematasoitus, 158  
    defekti, 165  
    havaintokirjassa, 158  
    havaintoyhtälöt, 159, 161  
    jäännösvirheet, 162  
    laskenta, 160  
    pohja, 165

rakennematriisi, 159  
 redundanssi, 159  
 siirtosuure ( $\mathcal{E}$ ), 163  
 vapausasteiden lukumäärä, 159, 166  
 virhemall, 163  
 yhteenveto, 163  
 asennusmittaus, 111, 239, 240  
 asfaltti, kuuma, refraktio, 175  
 asfalttityö, 241  
 Ashtech Z-12 (GPS-vastaanotin), 292  
 Assuan (Egypti), 3  
 astatisointi, jousigravimetrin, 419  
 aste (kulmayksikkö), 26  
 asteikkomikroskooppi, 120, 136  
 astemittaus  
     Eratostheneen, 2  
     kaaren pituus, 2  
     Lapissa, 7–9, 42, 181  
     luotiviivojen suuntaero, 2, 3, 5, 8  
     Perussa, 8  
     Snelliuksen, 3–5, 42  
     Struven, 8  
 astenosfääri, 479, 481  
 astigmatismi, 98  
 astrolabi, 441, 442  
     Danjonin, 441  
 atan2 (funktio), 69  
 Atlantin keskieläanne, 475, 477  
 atomiaika (TAI), 458  
 atomikello, suhteellisuusteoria, 93  
 atsimuutti, 65  
     sanan alkuperä, 65  
     geodeettinen, 270  
     mittaus, 377  
     tähtitieteellinen, 270  
 Auringon maksimi, 463  
 auringonpilkku, 462  
 auringonpimennys, täydellinen, 461  
 auringonpurkaus, 462  
 Aurinko  
     konvektio, 460  
     konvektiokerros, 460, 461  
     korona, 460, 461  
         lämpeneminen, 460  
     magneettikenttä, 461, 462  
         topologia, 462  
         voimaviivat, 462  
     plasma, 461  
     röntgensäteily, 460  
     ydinenergia, 460  
     ytimen lämpöenergia, 460  
 aurinkosynkrooni rata, 467  
 aurinkotuuli, 461  
 aurinkovarjo, 122  
 AUSPOS (ohjelmisto), 347

automaattinen kohdetunnistus (ATR),  
     147, 150  
 automatisointi, mittauksen, 104  
 avaruusgeodesia, 84, 259  
 avaruuskulma-alkio, 429  
 avaruuslohko (GPS), 283  
 avaruusmittamerkki (fotogrammetria), 43  
 avaruusplasma, 511  
 avaruussää, 463  
 avskärning, 154

## B

Baarda, Willem, 395  
 Baeyer, Johann Jacob, 10  
 Baker, James, 454  
 Baker-Nunn-kamera, 454  
 barometrinen korkeudenmäärittäminen, 93  
 barysentriset koordinaatit, 63  
 BeiDou (paikannusjärjestelmä), 277, 336  
 Bergen op Zoom (Alankomaat), 3, 5, 42  
 Bergensbanen (Norja), 229  
 Bergstrand, Erik Ö., 181  
 BGI, Kansainvälinen gravimetrinen  
     toimisto, 439  
 BIFROST-projekti, 481  
 Birmingham (Englanti), 197  
 GPS Block I, II, IIA, IIR, IIR-M, IIF, 283  
 GPS Block I, 285  
 GPS Block IIIA, 283  
 blokkisignaali, 149  
 Boller and Chivens, 454  
 Bomford, Guy, 271  
 Bonferronin korjaus, 404  
 Bonsdorff, Ilmari, 205  
 Bouguer, Pierre, 9, 440  
 Bouguer-anomalia, 439  
     Etelä-Suomi, 439  
     laskenta, 439  
 Bouguer-laatta, 440  
 Bowditch, Nathaniel, 153, 166  
 ”The Bowditch”, 153, 166  
 Bowditchin menetelmä, 166, 171, 174  
 Box, George E. P., 55  
 broadcast ephemeris, 285, 320  
     käyttö, 320  
     laatu, 333  
     lataus, 284  
 Bromarvin saaristosatama, 51  
 Broom Bridge (Dublin), 259  
 Bruns, Ernst Heinrich, 425  
 Brunsin yhtälö, 424, 425  
 Buys Ballot, Christoph, 497  
 Buys Ballot’n laki, 497



## C

C/A-koodi, 286, 287, 290  
     mittaustarkkuus, 290  
     modulaatiotila, 290  
 CAD, *computer-aided design*, 54, 249  
 Caracas (Venezuela), 482  
 Carloforte (Italia), 456  
 Carringtonin tapahtuma, 468  
 Cassini, Jean Dominique, 7  
 Cayenne (Ranskan Guyana), 13  
 CDMA, *katso* koodijakokanavointi  
 celsiusaste, 25  
 cesiumkello, 26  
     GPS-satelliitti, 281  
     GPS-vastaanotin, 284  
 CHAMP (satelliitti), 485, 492  
     GPS-vastaanotin, 485  
     kiihtyvyyssmittari, 485  
 Chandler, Seth Carlo, 455  
 Chandlerin huojuunta, 455  
 Chardzhui (Turkestan, Venäjä), 456  
 chip rate, 291  
     C/A-koodi, 290  
     P-koodi, 291  
 choke-ring -antenni, 292, 293  
 Choleskyn hajotelma, 390  
 Cincinnati (Ohio, Yhdysvallat), 456  
 Cinemascope (filmiformaatti), 454  
 Clairaut, Alexis, 13  
 Clairaut'n lause, 13  
 Clapeyron, Emile, 490  
 Clausiuksen ja Clapeyronin yhtälö, 490  
 Clausius, Rudolf, 490  
 Colorado Springs (Yhdysvallat), 283  
 "computer" (ihminen), 354  
 Conventional International Origin (CIO), 458  
 co-ordinate reference frame, 77  
 co-ordinate reference system, 77  
 Coriolis, Gaspard-Gustave de, 497  
 coriolisvoima, 497  
 Croll, James, 493

## D

Dandelinin pallot, 464  
 data snooping, 397  
 datumi, 77, 79  
     geodeettinen, 77  
 datumiero (korkeusdatumi), 80  
 datumimuunnos, 77  
     kahden ellipsoidin välillä, 266, 269  
     korkeus, 80  
     pienet muunnosparametrit, 82  
     tasossa, 81  
 datumipiste  
     käsite, 77

läheisyys, 78

valinta, 80, 81

Decca, 45

*järjestelmä*, 278, 279

asema, 278

hyperbeli, 279, 280

kuja, 280

vastaanotin, 279

dekliinaatio, 449, 450

Delaunay, Boris, 63

Delaunay, Vadim, 63

Delaunay'n kolmiointi, 63, 249

dendrokronologia, 189, 288

Descartes, René, 262

determinantti, 508

antisymmetrisyys, 509

häviäminen, 508

laskeminen, 508

tulkinta, 366

deuterium, 494

DGPS, *katso* differentiaalinen GPS

Diego Garcia (saari, Intian valtameri), 294, 296

differentiaalinen GPS (DGPS), 337–339

erotushavainto, 338

Digges, Leonard, 117

digitaalinen korkeusmalli (DEM), 250

digitaalinen korkeusmalli (DHM), 245

digitaalinen maastomalli (DTM), 250

*termi*, 245

määrälaskenta, 254

tilavuuslaskenta, 257

visualisointi, 249

*dilution of precision* (DOP), 307, 311, 326

*kuvaus*, 306

atsimuuttisymmetrinen, 314

esimerkki, 315, 316

laskenta, 309

laskentaskripti, 325

variantit, 307

dimensio, 23

diskreetti aallokemuunnos (DWT, *discrete wavelet transform*), 249

dispersio ionosfäärissä, 300

Distomat (etäisyysmittari), 191

div (operaattori), 512

DNA (molekyyli), 185

DOP-ellipsoidi, 309, 310

*kuva*, 310

pääakselit, 310

Doppler-paikannusjärjestelmä, *katso* Navy Navigation Satellite System

DORIS

*kuvaus*, 473

majakka, 473

Dronning Maud Land (Etelämanner), 496



dynamo, luonnollinen, 461, 475, 511

## E

*easting*, 59, 65

ED50, 10, 271

tarkkuus, 274

efemeridiaika (ET), 458

EGM2008, 115, 431

EGNOS, 343

eheyden valvonta (GPS), 343

Eiffel-torni, 72 nimeä, 190, 321, 354, 445, 490, 497

Einstein, Albert, 185, 418

ekliptika, 448

eksentrinen anomalia, 516

eksteriööri, 217

elastisuus, 479

*electrical resistivity tomography*, 242

eliminointi ja takaisinsijoitus, 361

elintila, ihmiskunnan, 214

ellipsi

määritelmä, 464

polttopiste, 464

eLoran (navigointijärjestelmä), 278

eläinrata, 448

elämän kemia, 185

energeettinen oikeellisuus, 438

energia-liikemäärätensori, 418

epäeuklidinen geometria, 350

epäkeskisyyys, korkeussuuntainen, 178

epäkeskisyyysparametri,  $\chi^2$ -jakauman, 396

epäkeskisyyysvirhe, 139

epävarmuus, 30

tyyppi A, 30

tyyppi B, 30

epävarmuusellipsi, *katso* virhe-ellipsi

Eratosthenes, 1–3

*Erdmessung*, 15

erehdys, inhimillinen, 29

eromuunnos (Helmert), 74, 75

erotus, kokonaislukutuntemattomien, 330

erotushavainto, 328, 329, 332

kaksois-, 328, 331–334

kolminkertainen, 328, 331, 332

vaikutus virheisiin, 330

yksinkertainen, 328, 332

erotuskyky, testin, 403

esivahvistin, GPS-antennin, 287, 291

eteenpäin leikkaus, 154, 155

Etelämanner, 496

ETOPO1 (maastomalli), 246

ETOPO2 (maastomalli), 247

ETRS89, 57, 273

ETRS-GK $n$ , 61

ETRS-TM35FIN, 61

etäisyys

geometrinen, 296, 303

mannertenvälinen, 45

etäisyysmittari, 44, 190

kalibrointi, 195

kojevirheet, 194

käsitteellinen, 193

käynti, 196

rakenne, 190

taajuuskalibrointi, 195

taajuusvirhe, 195, 196

määrittäminen taajuusstandardilla, 196

vakiovirhe, 195, 196

vaurio, 122

etäisyysmittaus

elektroninen, 44, 191

hohtodiode (LED), 44, 191

infrapuna valo, 44

kaarevuuskorjaukset, 199

korkeusreduktio, 201

laittekorjaus, 196

laservalo, 44, 191

maastokorjaus, 201

mekaaninen, 43, 181

mikroaallot, 44, 191

modulaatio, 191

näkyvä valo, 44

reduktio vertaustasoon, 201, 202

refraktiokorjaus, 199

satunnaisvirhe, 197

sähköoptinen, 44

teräsnauha, 181

toinen nopeuskorjaus, 200

valkoinen valo, 191

Euler, Leonhard, 236, 456

Eulerin notaatio, 420, 442

Eulerin spiraali, 236

Eulerin vapaa notaatio, 456

Euraasian laatta

liike, 275

merenpohja, 476

EUREF, Reference Frame Subcommittee for Europe, 57

EUREF89, 57, 274

EUREF-FIN, 273, 274

karttaprojektio, 61

luonti, 57

määrittäminen, 211

tiheys, 210, 211

EUREF:n datakeskus, 85

Everest, George, 9, 440

Everest, Mount, 9, 214

eötvös (yksikkö), 445

Eötvös, Loránd, 418, 444

Eötvös tensori, 444

Maan pinnalla, 445

mittaus, 444



**F**

Falklandin saaret (Etelä-Atlantti), 487  
 Fennoskandia  
   maankuoren liikkeet, 481  
   maannousu, 84, 479  
   kuvio, 480  
   poikkileikkaus, 480  
 FIN2000 (geoidimalli), 92  
 FIN2005N00 (geoidimalli), 273  
 FinnRef, 210  
*fix*-ratkaisu (RTK), 341  
 Fizeau, Hippolyte, 190  
 Fizeaun menetelmä, 191  
*float*-ratkaisu (RTK), 341  
 fluxion, 318  
 fokusointi, 97  
*footprint*, satelliitti-altimetrin, 496  
 fotogrammetria  
   kuvaus, 43  
   maastomalli, 248  
   määrälaskenta, 254  
 fotoni, 185  
 fotosfääri, 460  
 Fresnel, Augustin-Jean, 185  
 Frisius, Gemma, 3  
 ”frozen-in”-magneettikenttä, 461, 511, 512  
 Fuglenes (Norja), 10  
 funktiomalli, 389  
   mallivirhe, 394, 396  
   vinoetäisyys, 377  
 fysikaalinen geodesia, 14, 46  
   määritelmä, 87  
 fysikaalisen geodesian perusyhtälö, 427, 429

**G**

Gaithersburg (Maryland, Yhdysvallat), 456  
 Galilei, Galileo, 190, 417  
 Galileo (paikannusjärjestelmä), 277, 336  
 Gascoigne, William, 97  
 Gauss, Carl Friedrich, 349, 351, 354, 427  
 Gaussin jakauma, *katso* normaalijakauma  
 Gauss-Krüger-karttaprojektio, 59, 61  
   kaistanjako, 59  
   konformisuus, 63  
   mittakaavavääristymä, 62  
 GDGPS, Global Differential GPS, 345  
 Geneve (Sveitsi), 111  
 GeoBasic (Leica), 152  
 GeoCOM (Leica), 152  
 geodeettinen käänteistehtävä (GKT), 69  
 geodeettinen päätehtävä (GPT)  
   määritelmä, 67  
   tasossa, 68  
   virheiden kasautuminen, 370

yleisesti, 67  
 geodeettinen verkko  
   eurooppalainen, 10  
   GPS, 334  
   kolmiulotteinen, 212  
   luotettavuus, 387  
   suuntaus, 269  
   terrestrinen, 214  
 geodeettinen viiva, 11, 12  
   mittausviiva, 12  
 geodesia, määritelmä, 14, 15  
 Geodimeter (etäisyysmittari), 44, 181  
 geodynamiikka, 14, 84, 324, 469  
   eksoottiset menetelmät, 470  
   paikallinen, 482  
 geofysikaalinen tutkimus, 483, 495  
 geoidi  
   määritelmä, 13, 87  
   eurooppalainen, 10  
   maailmanlaajuinen, 430  
   määrittäminen, 250, 427  
   termi, 10, 15  
 geoidikartta  
   GOCE, 487  
   maailmanlaajuinen, 485, 487  
 geoidimalli, 83  
   Bomfordin, 271  
   FIN2000, 92  
   FIN2005N00, 273  
 geoidin korkeus, 425, 431  
   laskenta, 429  
   lähialue, 430  
   vaihtelu, 428  
 geoidin undulaatio, 425  
 Geoinformatiikan sanasto, 207  
 geologinen kello, 476  
*geomensuration*, 14  
 geopotentiaali, 88, 424  
   energia, 431  
   ero, 45, 435  
   gradientti, 421  
   hienorakenne, 485  
   koordinaattina, 46, 88  
   mittayksikkö, 433  
   vaihtelu, 428  
   visualisointi, 421  
 geopotentiaaliluku, 435, 438  
   määritelmä, 433  
 geopotentiaalimalli, 93  
   globaalinen, 430, 485  
 geopotentiaalipöytä, 421  
 geopotentiaaliyksikkö (GPU), 433  
 geosentrisyys, 47, 56, 57  
 geostrofien virtaus, 498  
 geostrofiset yhtälöt, 498  
 Geotrim Oy, 344



- Germain, Marie-Sophie, 349  
*glacial isostatic adjustment* (GIA), 84, 478, 480, 499  
 Global Navigation Satellite Systems, *katso* GNSS  
 Global Positioning System, *katso* GPS  
 GLOBE (maastomalli), 246  
 GLONASS (paikannusjärjestelmä), 277, 311  
     RTK, 342  
     SP3-c (*precise ephemeris*), 323  
     taajuudet, 336  
 GLONASS-K, 336  
 GNSS, 45, 194  
     määritelmä, 278  
     geodynamiikka, 469  
     geosentrisyys, 47  
     *limbsounding*, 492  
     Maan pyörähdysliikkeen seuranta, 457  
     mannerjäätutkimus, 496  
     runkomittaus, 214  
     samanpaikkaisuus, 499  
     troposfäärin tutkimus, 491  
     vuorovesikuormitus, 483  
 GNSS-poiju, 501  
 GNSS-radio-okkultaatio, 492  
 GNSS-seuranta, 483  
     maannousu, 482  
 GNSS-vastaanotin  
     ohjelmistopohjainen, 294, 336  
     satelliitissa, 492, 497, 499  
 GNSS-verkko  
     jatkuvasti toimiva, 210  
     maailmanlaajuinen, 493  
 GOCE (satelliitti), 93, 487  
     nimi, 488  
     gravitaatiogradiometri, 487, 488  
     ilmastotutkimus, 498  
     kiihtyvyyssmittari, 487  
     meritopografia, 489  
 Google Earth, 56, 249  
 Google Maps, 114, 115  
 Google Street View, 216  
 gooni (kulmayksikkö), 26, 27  
 GPS, 45, 277  
 GPS/MET (satelliitti), 492  
 GPS-aika, 458  
 GPS-jälkilaskenta, 336, 345  
 GPS-järjestelmä, 277  
     alkuperäinen, 278  
     kehitys, 283  
     modernisointi, 285  
 GPS-konstellaatio, alkuperäinen, 284, 286  
 GPS-mittaus  
     geometria, 301, 304  
     hyvyys, 303, 311  
     toisto, 285  
     havaintosuure, 290, 294, 332  
     pseudoetäisyys, 290, 303  
     relatiivinen, 312, 334  
     staattinen, 312  
     vektori, 332, 334  
     vesihöyryn vaikutus, 199  
 GPS-paikanmäärittäminen, geodeettinen, 297, 346  
 GPS-paikannus, 278  
     geometria, 302, 311, 312  
     tehtävä, 302  
     tosiaikaisuus, 337  
 GPS-satelliitti, 281  
     atomikello, 281  
     aurinkopaneelit, 283  
     dopplersiirtymä, 321  
     elinaika, suunniteltu, 283  
     kellokorjaus, 283, 284, 320  
     kellopoikkeama, 296, 331  
     kiertoaika, 285  
     kolmiakselistabilointi, 283  
     komponentit, 281  
     lähetysteho, 282  
     radiolähetin, 282  
     rakettimoottori, 283  
     rata, 317, 319  
     rata-alkiot, 318  
     ratahäiriö, 283  
     ratataso, 285, 318  
     ratatason inkлинаatio, 285, 317  
     ratatiedot, 283  
     sormenjälki, 287  
     taajuudet, 282  
     terveystiedot, 283, 320  
     tietoliikennekanava, 282  
 GPS-signaali, 285, 286  
     aallonpituus, tehollinen, 289  
     kaistaleveys, 286  
     kantoaallon vaihe, 291, 297, 299, 332  
     raaka, 298  
     kantoaaltotaajuudet, 298  
     korrelaatio, 290  
     *lock-on*, 287, 320  
     modulaatio, 286  
     replika, 288, 290  
 GPS-vastaanotin  
     geodeettinen, 294  
     kaksitaajuuskoje, 291, 297  
     kellokorjaus, 296  
     kellopoikkeama, 296, 297, 303, 330  
     vastaanotettu signaali, 287  
 GRACE (satelliittipari), 485, 486  
     kiihtyvyyssmittari, 487  
     mannerjäätutkimus, 495





mikroaaltolinkki, 487  
 GRACE Follow-On (GRACE-FO), 487  
 grad (kulmayksikkö), *katso* gon  
 grad (operaattori), 442  
 gradientti, 420  
 gradienttivektori, 420  
 gravimetri, 418, 419  
     käynti, 419  
 gravimetria, 418  
 gravitaatio, 417  
 gravitaatiogradienttitensori, 443  
 gravitaatiogradiometri, 487, 488  
 gravitaatiolaki, universaalinen, 5  
 gravitaation gradientti, 443  
 gravitaativakio, universaalinen, 6  
 Gray, Frank, 146  
 Gray-koodi, 146  
*Greenwich Apparent Sidereal Time*  
     (GAST), 449  
*Greenwich Mean Time* (GMT), 47  
 Greenwichin meridiaani  
     kuva, 48  
     meridiaanisopimus, 47  
     suunta, 260  
     taso, 47  
 Greenwichin observatorio, 47  
     ohikulkukone, 457  
 Greenwichin paradoksi, 275  
 Greenwichin tähtiaika, 449, 450  
 Groningen (Alankomaat), 482  
*ground-penetrating radar*, 242  
 GRS80-vertausellipsoidi, 48  
 Grönlanti, 474  
 GSI (Leica), 152  
 GTOPO30 (maastomalli), 246  
 gyroskooppi, 459  
 gyroskooppi-ilmio, 4

## H

haja-asutusalue, 230  
 hajapistemenetelmä, 247  
 Hamilton, Sir William Rowan, 259  
 hammaspyörä (modulaattori), 190  
 Hannover (Saksa), 354  
 harmonisointi, merkitsevyystasojen, 405  
 harppu, foinikalainen, 420  
 Hatanaka-kompressio, 346  
 hattutyylä, 354  
 havaintoasemien katalogi, 451  
 havaintofunktio, 367  
 havaintovirheiden vektori, 388, 390  
 havaintoyhtälö, 355, 390  
     asemasoitus, 159, 160  
     atsimuutti, 378  
     ei-lineaarinen, 367  
 GNSS, 490

Helmertin muunnos, 381–383  
 kantoaallon vaihe, 298, 330  
 keskiarvon laskenta, 358  
 linearisointi, 367  
 linearisoitu, 368, 374  
 muodostus, 355  
 pseudoetäisyys, 296, 303, 306  
 redundanssi, 355  
 standardimuoto, 358  
 takymetrimittaus, 380  
 vaakasuunta, 378  
 vinoetäisyys, 376  
 VLBI, 472  
 zeniittikulma, 380  
 Hayfordin ellipsoidi, 59  
 Heaviside, Oliver, 511  
 heijastin, 193  
     nollapistevirhe, 196  
 heijastuspaneeli Kuussa, 470  
 heilurikello, 13  
 heilurikompensoattori, 103  
     toimintaperiaate, 103, 104  
     magneettisuus, 104  
 Heiskanen, Veikko A., 16  
 helium-neonlaser, 26, 198  
 helleenit, 1  
 Helmert, Friedrich Robert, 71  
 Helmertin muunnos, 71  
     avoin jono, 169  
     jäännösvirheet, 383, 385  
     kaksiulotteinen, 264  
     kiertokulma, 72, 73  
     kolmiulotteinen, 264  
     mittakaavasuhde, 72  
     mittakaavavääritysmä, 75, 265  
     painopistekoordinaatit, 383  
     parametrien varianssit, 383  
     ”pieni”, 266  
     siirtoparametrit, 72, 75  
     siirtovektori, 73, 74  
     skaalaus, 73  
     tasossa, 72, 73, 75, 381  
     vaiheet, 72  
     vapaa asemapiste, 222  
     yhtälöt, 75  
 Helmholtz, Hermann von, 106  
 Helmholtzin kirkkausharha, 106  
 Helsingin keskimerenpinta, 78, 90  
 Helsingin tähtitorni, 77, 457  
 Helsingin yliopisto, 14  
 Helsinki, 79, 328  
 herkkyys, havaintojen, 303, 305  
 herkkyys, tasaimen, 100  
 herkkyysanalyysi, 304  
 hermiittinen varianssimatriisi, 412  
 Hermite, Charles, 412



hermitointi, 412  
 Hexagon Oy, 345  
 hidas massa, 417, 418  
 Himalaja, 9  
 Hipparkhos, 459  
 hissikoe, Einsteinin, 418  
 hissipuhe, 276  
 histogrammi, 32  
 hiukkastörmäytin LHC, 111  
 hiusviivaristikko  
   historia, 97  
   parempi, 134  
   säätöruuvi, 101  
   vaurio, 122  
 Holmes, Arthur, 476  
 horisonttipiirros, 311  
 horisonttitaso, 117  
*hot spot*, 478  
 Huygens, Christiaan, 185  
   Maan litistyneisyys, 7, 13  
   polarisaatio, 185  
   valon luonne, 184  
 hygrometri, 491  
 hylkäys, hypoteesin, 401  
 hylkäysraja, 402  
   normaalijakauma, 403  
   kaksipuolinen, 397  
   valinta, 401  
 hyperbeli (Decca), 279, 280  
 hyperbolinen paikannusjärjestelmä, 45, 279  
 hypoteekki, 16  
 hypoteesivapaus, 436, 438  
 hyrrä, 459  
 häiriö vastaanottimen paikassa, 303  
 häiriöpotentiaali, 422, 424  
 hämähäkinseitti, 97  
 Härkä (Taurus), 449  
 Härmälä, Seppo, 16  
 hävittäjälentokone, 250

## I

IAG  
   EUREF-alakomissio, 275  
   historia, 10  
   International Earth Rotation and Reference Systems Service, 456  
   International GNSS Service, 324  
   Kansainvälinen gravimetrinen toimisto (BGI), 439  
 IJsselmeer (Alankomaat), 92  
 ilma-anomalia, 427  
   Etelä-Suomi, 439  
 ilmakehä  
   kerrostuneisuus, 311  
   kulkuviive, 302

lämpötila, 489  
 pyörähdysmomentti, 456  
 ilmakehän inversio, 175  
 ilmakolmiointi, 43  
 ilmakehä karttoitusmittauksessa, 222  
 ilmalaserkeilaus (ALS), 246, 248  
 ilmanpaine  
   GNSS-asemalla, 490  
   vaihtelu, 483, 497  
 ilmastolämpeneminen, 492, 495, 500  
 ilmastomalli, 492  
 ilmastotutkimus, 301  
 ilmatorjuntakranaatti, 452  
 ilmavoimat, Yhdysvaltojen, 283  
 indeksivirhe, 144  
   määritelmä, 143  
   kenttätarkistus, 145  
   poisto, 145  
*independent, identically distributed (i.i.d.)*, 356  
 inertia, 417  
 inertiamittausyksikkö, 216  
 infrastruktuuri, 230  
   rakentaminen, 16, 230, 241  
   suunnittelu, 16, 17, 113, 230  
 inkrementaalinen mittaustapa, 280  
*in-phase* (modulaatio), 291  
 InSAR, 484, 485  
 insinöörigeodesia, 111, 240  
 insinöörimittaus, 240  
*inskränning*, 154  
 insolaatio  
   kesän, 494  
   mannerjäätikön reunalla, 493  
 INSPIRE (EU:n direktiivi), 246  
 interferenssi, valoaaltojen, 184  
 interferenssimittaus (Väisälä), 189  
 interferenssirengas (SAR), 484, 485  
 International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS), 456, 458  
 International GNSS Service (IGS)  
   kuvaus, 324  
   Central Bureau, 324  
   ionosfäärin mallinnus, 493  
   precise ephemeris, 323  
   seuranta-asemat, 323  
 International Latitude Service, 456  
 International Polar Motion Service, 456  
*intersection*, 154  
 Intian valtameren keskiläänne, 477  
 intrinsinen pyörähdysmomentti (*spin*), 187  
 invar (seos), 44, 181  
 invariantti, pistevarianssimatriisin, 374  
 invarlatta, 106



inversio, matemaattinen, 488

*inverted barometer* (IB), 497

ioni, 511

ionimoottori (GOCE), 487

ionosfääri

dispersio, 300

elektronitiheys, 300, 493

kulkuviive, 296, 298, 300

luotaus, 493

*total electron content* (TEC), 493

tutkimus, 301

ionosfäärimalli, 493

ionosfäärivapaa lineaariyhdistelmä (GPS), 301

Ionosphere Map Exchange Format (IONEX), 493

islanninsälpä, 185

Ison-Beltin silta (Tanska), 241

isostaattinen kompensatio, 440

isostaattinen sopeutuminen, 479

isoterminen pinta, 201

isotooppi

deuterium, 494

radioaktiivinen, 476

ITRS, International Terrestrial Reference System, 266

itselaskeva latta, 106

Itämeri

mareografit, 500

meritopografia, 498

Itä-Schelden myrskyvuoksisuoja (Alankomaat), 241

Izmit (Turkki), 484

## J

dynaaminen litistyneisyys ( $J_2$ ), 466

Jaava (Hollannin Itä-Intia, Indonesia), 427

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 365

Jacobin matriisi, 365

jakauma, *katso*

todennäköisyytiheysjakauma

jakokehä

epäkeskisyydevirhe, 119

lukeminen, 137, 138

valmistus, 135

jalkaruuvi, 122

jalustan pöytälevy, keskusreikä, 126

jaotus, latta-asteikon, 107

E-, 106

shakkilauta-, 106

viiva-, 106

viivakoodi-, 106

jaotuskone, 135

jaotusvirhe, 139

Jason (satelliitti), 498

jatkuva jakauma, 32

jatkuvuusehto, siirtymäkaaren, 238

Jeffreys, Harold, 387

Jet Propulsion Laboratory (JPL)

APPS, 347

GDGPS, 345

International GNSS Service, 324

JHS-suositus

ETRS89, 207

EUREF-FIN, 207

kaavan pohjakartta, 207

kiintopistemittaus, 207

kuntaGML, 207

N2000, 207

johto, maanalainen, 242

johtojen näyttöpalvelu, 242

johtokartoitusmenetelmät, 242

johtokartta, 242

jonomittaus, 166, 209

jonopiste, 167

jonovaaitus, 93, 108, 109

journalisti, 276

Jousimies (Sagittarius), 449

jousivaaka, 418

Joutsen (Cygnus), 448

JPEG 2000, 249

JUHTA, 207

julkinen keskustelu, 250

juomaveden pumppaus, 111, 482

Jupiterin litistyneisyys, 13

juuri, vuoriston, 440, 441

Juutinrauman silta (Tanska), 241

Jyväskylä, 78

jäljitettävyy (metrologia), 181, 182, 240

järjestelmäkaliointi, 105, 108

jääkuormitus, 410

jäännösvirhe  $\neq$  virhe, 352

jäännösvirheet, 389

aliavaruus, 356

ensimmäiset, 164

laadunvalvonnassa, 390

lopulliset, 164

ominaisuudet, 390

painotetut, 397

suuruus, 390

jäävuoren poikastuminen, 495

## K

K XVIII (sukellusvene), 417

kaakelointi, kuvien, 249

kaarevuuskorjaus

Maan pinta, 200

mittaussäde, 199

kaava, 16

laskenta, 231, 232

rajat, 231



- kaavan muodot, 229  
 kaavan pohjakartta, 207  
 kaavoitus, 16  
 Kaavoitusmittausohjeet, 207  
     maastoon merkintä, 230  
     maastotiedon luokitus, 226  
     uudet (2014), 229  
 kahtaistaittavuus, 185  
 kaivosmittaus, 166, 206, 240  
 kaivuutyö, vaurio, 242  
 Kakkuri, Juhani, 201  
 kaksoiserotus (RTK), 339  
 kaksoispentagonprisma, 217  
 Kalat (Pisces), 449  
 kalibrointi (metrologia), 240  
 kalium–argon, 476  
 kallistusmittari, digitaalinen, 145  
 kalsiitti, 185  
 kaltevuusprosentti, 184  
 kaltevuusreduktio, 183, 201  
     säteittäinen kartoitus, 219  
 Kanada  
     maannousu, 84, 480  
     magneettinen napa, 475  
 Kansainvälinen avaruusasema, 468  
 Kansainvälinen ellipsoidi 1924, 59  
 Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio,  
     *katso* IAG  
 Kansainvälinen gravimetrinen toimisto  
     (BGI), 439  
 kansainvälinen yhteistyö, 430  
 kantoaallon aallonpituus, 297  
 karakteristinen polynomi, 373  
 karkaussekunti, 458  
 kartan mittakaava, 18, 61  
     keskimeridiaanilla, 62  
     nimellinen, 62  
 kartan mittakaavaluku, 61  
 Kartastokoordinaattijärjestelmä, *katso*  
     KKJ  
 kartioleikkaus, 464  
 kartografia, 46, 53  
 kartoitusmittaus  
     *määritelmä*, 216  
     käyttötarkoitus, 222  
     laitteisto ja ohjelmisto, 223  
     mitattavat tiedot, 222  
     RTK, 216  
     suoritustapa, 222  
     työskentely, 222, 224  
 kartta, 216  
     käyttötarkoitus, 18  
     legenda, 18  
 kartta-algebra, 227  
 Karttakomitea, 205  
 karttakoordinaatit, 55, 215  
 karttalehti ( $x, y$ ), 46  
 karttalehtijako, 61  
 karttapohjoinen, 175  
 karttaprojektio, 53  
     ekvidistantti, etäisyystarkka, 54  
     ekvivalentti, oikeapintainen,  
         pinta-alatarkka, 54  
     gnomoninen, 55  
     konforminen, oikeakulmainen,  
         kulmatarkka, 54, 215  
     käyttötarkoitus, 54, 55  
     mittakaavareduktio, 202  
     toteutus, 214  
     valinta, 215  
     vääristymä, 55  
 karttaprojektiokaista, 58, 62  
     KKJ, 58  
     kunta, 61  
 karttaprojektiokoordinaatit, 46, 47  
 karttaprojektio-oppi, 54  
 karttaprojektiotaso laskentapintana, 214  
 kasautumislaki  
     odotusarvojen, 369  
     varianssien, 38, 41, 369  
     virheiden, 37, 38  
     yleinen varianssien, 370  
 kasteluveden pumppaus, 111, 410, 482  
 kastepiste, 491  
 katasterijärjestelmä, 16  
 katkaistut koordinaatit, 60, 66  
 katukanjoni, 166, 216  
 kaukonäköisyys, 98  
 kaukoputki  
     *kuvaus*, 96  
     keksintö, 117  
 kaupunkimaisema, 154, 166  
 Kauris (Capricornus), 449  
 kellokäyrä, *katso* normaalijakauma  
 kellopoikkeama (GPS), 329  
 kellotuntematon (GPS), 297  
 keltainen lehdistö, 275  
 kelvin (lämpöasteikko), 25  
 Kelvin, lordi (Sir William Thomson), 512  
 Kelvinin ja Stokesin lause, 512  
 kengännauhakaavat, 252  
 kenkälaatikkomalli, 82, 83, 87  
 kenttägravimetri, 418, 419  
 kenttäyhtälöt  
     Einsteinin, 418  
     Maxwellin, 511  
 Kepler, Johannes, 463  
 Keplerin kolmas laki, 466  
 Keplerin lait, 463, 464  
 Keplerin pintalaki, 464  
 Keplerin rata-alkiot, 319  
     *kuvaus*, 515



GPS, 320  
 kuva, 465  
 Kern (laitevalmistaja), 44, 127  
 keskianomalia, 516  
 keskiarvo, 352  
     keskivirhe, 352  
     tasointus, 358  
 keskikorkeus, satelliitin, 515  
 keskimerenpinta  
     geopotentialiaali, 433  
     maailmanlaajuinen, 430, 499  
 keskistys, teodoliitin, 125, 129  
     miksi, 123  
     karkea, 125  
     tarkka, 126  
 keskivirhe, 28  
 kesäpäivänseisaus, 449  
 ketjukäyrä, 183  
 Kevo, 78  
 kevätpäiväntasauspiste, 260, 449  
 $\chi^2$ -jakauma, 394, 395  
     epäkeskinen, 395  
     MATLAB, 394  
     testi, 394, 396  
     vapausasteet, 394  
 $\chi^2_3$ -jakauma, 399  
 kiertoaika, satelliitin, 464, 466  
 kiihtyvyys, GPS-mittauksista, 485  
 kiikariviivain, 42, 43  
 kiila (latanalusta), 108  
 kiinteistö  
     omistajan oikeusturva, 16  
     rahallinen arvo, 16  
 kiinteistönmuodostus, 230  
 kiinteä Maa  
     elastisuus, 483  
     liikkeet, 324  
     massajakauma, 464  
     vuorovesi, 84  
 kiintopiste (kuva), 129  
 kiintopisteistö, 205  
     laatu, 208  
     vaatimukset, 208  
 kilokalori, 25  
 kilpikonna (latanalusta), 108  
 kinemaattinen mittaus, 280  
 kiraalisuus, elämän, 185  
 kirjoitusvirhe havaintokirjassa, 29  
 Kitab (Uzbekistan, Neuvostoliitto), 456  
 kiusaparametri, 160  
 kivijalka, rakennuksen, 240  
 KKK, 56, 57  
     kaistan geometria, 60  
     peruskoordinaatisto, 59  
     yhtenäiskoordinaatisto (YKJ), 61  
 klassinen mekaniikka, 5

klotoidi, 236, 238  
     periaate, 237  
     parametri, 237  
     yhtälö, 237  
 KM2 (maastomalli), 246  
 KM10 (maastomalli), 246  
 koaksiaalinen ratkaisu, 191  
 kofaktori, 509  
 kohdistusmikroskooppi, 121  
 kohdistustasain, 99, 100  
 koherenssipituus  
     valkoinen valo, 188  
     VLBI, 472  
 koje, terrestrinen mittaus-, 44  
 kojeasento I/II, 134  
     virheiden eliminointi, 157  
 kojekoordinaatit, 50, 117, 262, 263  
 kojekorkeus, 179  
 kokonaislukutuntematon  
     erotus, 330  
     etäisyysmittaus, 192  
     GPS, 299, 334  
     pyörivä koodauskehä, 149  
 kokonaislukutuntemattomien ratkaisu  
     etäisyysmittaus, 192, 193  
     GPS, 335  
     yksiulotteinen, 334  
 kokonaisvalidointi, 393  
 kolikko, rehellinen, 32  
 kolikonheitto, 30  
 kollimaatioakseli, *katso* tähtäysakseli  
 kollimaatiovirhe, 139  
     määritelmä, 119  
     havaintokirjasta, 141  
     kenttätarkistus, 141  
     korjaus, 141  
     määrittäminen, 140  
 kolmen sigman sääntö, 29, 36, 403  
 kolmiakselistabilointi, 283  
 kolmioehto, 29, 350  
 kolmiointi-esitystapa, 248, 249  
 kolmioittain affiinen muunnos, 63, 64  
 kolmiomittaus, 3  
     periaate, 3  
     alemmen luokan, 209  
     ensimmäisen luokan, 209  
     menetelmä, 42  
     Snelliuksen, 3  
     vaakakulmamittaus, 153  
     valtakunnallinen, 57  
 kolmiomittausverkko  
     kolmio, 350  
     mannerlaajuinen, 11  
     mannertenvälinen, 455  
     pääsivu, 181  
     tasointus, 42

- komeetan rata, 354  
 komparaattori (pituuskalibrointi), 182  
 kompassisuunta, 54  
 komponentit, paikkavektorin, 302  
 konservatiivinen kenttä, 432  
 kontrolli redundanssin avulla, 406  
 konvektio  
   Auringossa, 460, 461  
   Maan ulkoytimessä, 475  
   Maan vaipassa, 476, 477  
 koodauskehä, 147  
   absoluuttinen, 146  
   inkrementaalinen, 147  
 koodijakokanavointi (CDMA), 287  
   GLONASS-K, 336  
 koordinaatisto, 55, 56, 77  
   geosentrinen, 263  
   kansallinen, 205  
   oikeakätinen, 260, 261  
   toposentrinen, 263  
 koordinaatit, 348  
   2D+1D, 82, 271  
   ellipsoidiset, 261  
   geodeettiset, 47, 261  
     kuva, 49  
     konstruktio, 48  
     miksi käyttää, 49  
     termi, 49  
   geodesiassa, 45  
   geosentriset, 260  
     notaatio, 259  
   karteesiset, 262  
   karttaprojektio-, 46, 47  
   KKJ, 271  
   kolmiulotteiset, 46, 47  
     suorakulmaiset, 48  
   maantieteelliset, 47, 261  
   (N, E, U), 267, 268  
   paikalliset, 66  
     yhteys valtakunnalliseen  
       koordinaatistoon, 66  
   pallo-, 261  
   projektikohtaiset, 67  
   suorakulmaiset, 47, 262  
     kuva, 49  
     miksi käyttää, 49  
   tilapäiset, 67  
   toposentriset, 47, 49, 262  
     notaatio, 263  
     suorakulmaiset, 263  
 koordinaattien korjaus (Helmert), 266  
 koordinaattien likiarvot, 81  
 koordinaattijärjestelmä, 77  
   geosentrinen, 47, 259  
   inertiaalinen eli tähtitieteellinen,  
     259, 260  
   kaksiulotteinen, 46  
   kolmiulotteinen, 46  
   terrestrinen (ECEF), 260  
 koordinaattikonversio, 49, 83  
 koordinaattimuunnos, 55, 56  
 korikäyrä, 235  
   maastoon merkintä, 236  
 korjausten jakelu  
   mobiili Internet, 343  
   tietoliikennesatelliitti, 342, 343  
   vaihtoehdot, 342  
 korkeudenmäärittäminen, 88  
   barometrinen, 93  
 korkeus  
   määritelmä, 87  
   dynaaminen, 437  
   käsitteet, 91  
   merenpinnan yläpuolella, 88, 89, 93  
   metrinen, 88, 433, 437, 438  
   normaali-, 436, 437  
     määritelmä, 437  
   ortometrinen, 87, 89, 90, 434–436  
     määritelmä, 436  
   liikarvo, 436  
   vaatuksesta, 14  
   vertausellipsoidista, 14, 48, 89, 261  
 korkeusanomalia, 424  
 korkeusasema, rakennuksen, 239, 240  
 korkeusdatumi, 79  
 korkeusdeformaatio  
   analyysi, 410  
   seuranta, 411  
   siirtosuure ( $\mathcal{E}$ ), 411  
   siirtymä, 411  
 korkeusjärjestelmä, 14, 93, 94  
   ortometrinen, 90  
 korkeuskäyrä, 420  
   laskenta, 250  
   maastokartalla, 94  
   määrälaskenta, 254  
 korkeusperuspiste, 240  
 korkeustyyppi, 89, 438  
   ominaisuudet, 438  
 korkkiruuvi, 260, 261  
 korrelaatio, 41  
   määritelmä, 36  
   esimerkkejä, 37  
   ilmakuvien, 248  
   ja syy-seuraussuhde, 39  
   täydellinen, 36  
   VLBI-signaalien, 471  
   vuosirenkaiden, 288  
 korrelaatiomenetelmä (GPS), 288  
 korrelaattori, optinen (Väisälä), 188  
 kosinissäntö, pallon, 85  
   puolikulmaversio, 86



kosteuden vaikutus vaaituslattaan, 106  
 kosteus, suhteellinen, 489, 491  
 Kotka (Aquila), 448  
 kovalevy pakka, 471  
 kovarianssi, 36  
 Kozai, Yoshihide, 320  
 Krasovskin ellipsoidi, 266  
 kriittinen inkлинаatio, 467  
 kuivan ilman osapaine, 489  
 kuja (Decca), 280  
 Kukkamäen menetelmä, 100  
 Kukkamäki, T. J., 100  
 kulkuaika (GPS-signaali), 288  
 kulkuviiveen mallinnus, ilmakehän, 343  
 kulmaetäisyys, geosentrinen, 429, 430  
 laskentayhtälö, 430  
 kulmamittaus, 117  
 digitaalinen, 135  
 kulmamuuunnos, 160  
 suuntatuntemattoman, 161  
 kulmien pyöritys, 233, 235  
 korikäyrä, 235  
 ympyrän kaari, 234  
 kulminaatio, tähden, 450  
 kulttuuritieto, 227  
 kunnallistekniikka, 230  
 kunta  
 maanalaiset johdot, 242  
 paikalliset koordinaatit, 66  
 suunnittelu, 17  
 kuntaGML, 207  
 kuormitus  
 ilmakehän, 483  
 jään, 410  
 meren, 483  
 meren vuoroveden, 483  
 kustannus, virheen, 35, 403  
 Kuu  
 vaiheet, 184  
 vetovoima, 459  
 kuulasertutka, 470  
 kuunpimennys, 2  
 kuutioprisma, 193, 194  
 kuvaajaellipsi, pistevarianssimatriisiin, 372, 373  
 kuvaajaellipsoidi, gravitaatiogradientti-tensorin, 443  
 kuvalevy, valokuvaus, 453  
 kuvankäsittely, 249  
 kvadrantti, tason, 65, 66, 69  
 kvadratuuri (modulaatio), 291  
 kvanttiteoria, 185  
 kvartsimitta, 188  
 kvartsioskillaattorin käynti, 330  
 kvasaari, 470, 472  
 kvasi-geoidi, 437

kvasi-kaksiulotteinen verkkogeometria, 212  
 kvaternio, 259  
 kyllästymisen (vesihöyry), 490  
 kyllästymisospaine, 490, 491  
 kytkeä merkitsevyystasojen välillä, 403  
 kytkeävaaitus, mareografin, 501  
 käsi-GNSS, 124  
 käsilaskija, 354  
 käynti  
 etäisyysmittarin, 196  
 gravimetrin, 419  
 kvartsioskillaattorin, 330  
 käyttäjälohko (GPS), 284  
 käyttöpiste, 239  
 käänteinen ongelma, 156  
 käänteiskuvaus, 366  
 käänteismatriisi, 506–508  
 kääntölatte, 106  
 kääntöpiiri, 449

## L

$L_1, L_2$ , GPS-taajuudet, 282, 285, 287, 298, 300  
 $L_5$ , GPS-taajuus, 285  
 laatat, sivuuttavat, 482  
 laattatekniikka, 84, 473, 477  
 mekanismit, 478  
 laatu  
 broadcast-ratojen, 333  
 kartoitusmittauksen, 222  
 kiintopisteistön, 208  
 mittauksien, 28, 146  
 precise-ratojen, 333  
 LAGEOS (satelliitti), 471  
 Lagrange, Joseph-Louis, 321  
 Lagrangen interpolointi, 321  
 Langmuir, Irving, 513  
 Laplace, Pierre-Simon, 445  
 Laplacen atsimuutti-ilmiö, 272  
 Laplacen atsimuuttiyhtälö, 270  
 Laplacen kenttäyhtälö, 429, 445  
 Lappi, 7  
 Larmorin prekessio, 459  
 laserasemaverkko, maailmanlaajuinen, 470  
 laserkeilaus  
 ilmasta, 246, 248  
 määrälaskenta, 254  
 terrestrinen, 216  
 laserluoti, 122, 132, 151  
 lasertaso  
 toimintaperiaate, 112, 113  
 määrälaskenta, 253  
 pystytaso, 113  
 lasikuula, 421



laskettelurinne, 250  
 latanalusta, 108  
 latta, vaaitus-, katso vaaituslatta  
 lattakalibrointi, 105  
 Lattamiehentie, Vantaa, Joensuu, 87  
 lattayksikkö, 106  
 Laurentian maannousualue, 480  
 legenda, kartan, 225  
 Legendre, Adrien-Marie, 354  
 lehtitaikina (vertauskuva), 511  
 Leica (laitevalmistaja), 150, 152  
 Leiden (Alankomaat), 3  
 lentosimulaattori, 250  
 leveysaste  
     geodeettinen, 48, 261, 262  
     geosentrinen, 261, 262  
     tähtitieteellinen, 4, 441  
     vaihtelu, 456, 457  
 leveäkujaamenetelmä (*wide laning*), 335, 342  
 levitaatio, magneettinen, 513  
 levykoordinaatit, 453  
 liikenneväylän suunnittelu, 88, 250  
 liikkuvan vastaanottimen sijainti (RTK), 340  
 liitospiste, 218  
 likiarvo (linearisointi), 363  
 likiarvojen vektori, 365  
 likinäköisyys, 98  
 lineaarinen regressio, 353  
     esimerkki, 361, 362  
     havaintoyhtälöt, 360  
     keskiarvojen avulla, 354  
     määritelmät, 353  
     rakennematriisi, 360  
     siirtosuure ( $\mathcal{E}$ ), 398, 400  
     simuloitu virhe, 401, 402  
     tasointi, 360  
     testaus, 398, 400  
 linearisointi, 363  
     pseudoetäisyys, 305, 306  
     vektorikuvaus, 366  
     yksiulotteinen, 364  
 linearisoitu suure, 364, 368  
 linjaseiväs, 217  
 linjavaaitus, 93, 108, 109  
 Lippershey, Hans, 117  
 Listing, Johann Benedict, 10  
 litosfääri, 479  
 litteän Maan approksimaatio, 14, 87  
*Local Apparent Sidereal Time* (LAST), 449  
 logaritminen asteikko, 26  
 loksodromi (kompassiviiva), 54  
 loppuliitossuunta, 171  
 Loran-C (navigointijärjestelmä), 278  
 lukemalaite, jakokehän, 120, 135

lukemamikroskooppi, 135, 136, 139  
     okulaari, 120  
 Lunohod (kuuajokki), 470  
 luonnollinen anomalia, 516  
 luontotieto, 227  
 luotettavuus, 387, 390, 404  
     esimerkki, 405, 406  
     sisäinen, 395, 408  
     ulkoinen, 395, 408  
 luotettavuus ja tarkkuus, 406, 409  
 luoti  
     optinen, 122, 127–129, 132  
     erillinen, 130  
     indeksi, 127  
     sääto, 132  
     tarkistus, 132, 133  
     riippu-, 122, 126, 127  
     sauva-, 126, 127  
     tarkkuus, 126  
 luotiviiva  
     määritelmä, 118  
     kaarevuus, 118  
 luotiviivan poikkeama  
     määritelmä, 270  
     kuva, 270  
     vaikutus atsimuuttiin, 272  
     yhtälöt, 268  
 luotiviivan suunta  
     tähtitieteellinen määrittely, 10, 269, 440  
     vaihtelu, 440  
 lyijymönjä, 124  
 Lyyra (Lyra), 448  
 lähestymiskartta, 124  
 lämpölaajenemiskerroin  
     invar, 44, 106, 181  
     teräs, 182  
 lämpösäteilyn spektri, mustan kappaleen, 185  
 Länsi-Siperian maannousualue, 481  
 läpikulku, meridiaanin, 441, 451, 457

## M

### Maa

gravitaatiokenttä, 6  
     määrittely, 486, 488  
 kaarevuussäde, 5  
 keskimääräinen tiheys, 7  
 keskisäde, 85  
 lämpöenergia, 477  
 magneettikenttä, 463, 474, 475  
 magneettiset navat, 475  
 massajakaumamalli, 6  
 massakeskipiste, 47, 57, 259  
 poikittaiskaarevuussäde, 261, 262  
 pyörähdysaika, 285





pyörähdysnopeus, 13  
 päärynän muoto, 11  
 sisäinen rakenne, 475  
 säde, 3  
 vaipan tiheys, 7  
 vaipan viskositeetti, 479  
 ytimen lämpö, 477  
 ytimen tiheys, 7  
 maaellipsoidin parametrit, 7  
 maailmanmalli, naiivi, 1  
 maakaasun pumppaus, 111, 410, 482  
 Maan asentoparametrit (EOP), 84, 324, 458  
 Maan kiertorata, 447, 448  
     eksentrisyys, 495  
     isoakseli, 494  
 maan käyttötarkoitus, 16  
 Maan litistyneisyys, 6–8, 13  
 Maan muoto, 15, 466  
     fyysinen, 6, 15  
     matemaattinen, 10, 15, 427  
     todellinen, 8  
 Maan pyörähdysakseli  
     hetkellinen, 455, 458  
     kaltevuus, 493  
     liike, 459, 460  
     suunta, 4, 47, 57, 259  
     VLBI, 472  
 Maan pyörähdysliike, 447, 469  
     coriolisvoima, 497  
     keskipakoisvoima, 421, 445  
     nopeus, 457  
     seuranta, 451, 473  
     vaihtelu, 84, 455, 456, 458  
 ”Maan toinen kuu” (artikkeli), 452  
 maan vajoaminen  
     antropogeeninen, 111  
     raaka-aineen pumppaus, 410, 482  
     veden pumppaus, 482  
 maanjärityksille altis alue, 483  
 maanjäritys  
     Izmit (Turkki), 484  
     Sendai (Japani), 483  
     sivuuttavat laatat, 482  
 maankuoren liike  
     antropogeeninen, 482  
     seuranta, 482  
 maankuoren tiheys, 7  
 Maankäyttö- ja rakennuslaki 1999/132, 229  
 maankäytön suunnittelu, 17  
 maanmittaus, tavallinen, 15  
 Maanmittauslaitoksen Paikkatietokeskus  
     FinnRef, 210  
     GNSS-palvelu, 345  
 Maanmittauslaitos

koordinaattimuunnospalvelu, 85, 86  
 maastomallit, 246  
 vaaitus, 93  
 maanmittaustiede, 15  
 maannousu, postglasiaalinen, 111, 456, 469  
     fysikaalinen luonne, 479  
     mittaus, 481  
     vaakaliikkeet, 481  
 maanpinnan muodot, 245  
 maastoesitys, 249  
 maastokorjaus (etäisyysmittaus), 201  
 maastokorjaus (painovoima), 250  
 maastomalli  
     esitystapa, 248  
     mittausgeometria, 247  
     mittausteknologia, 248  
     sovellukset, 249  
 maastomerkkityypin valinta, 123  
 maastomittaus, 16, 18, 19, 21  
     laskenta, 223  
     lopputuotteet, 18  
         kartta, 18  
     maastomalli, 248  
     metatieto, 224  
     ohjelmisto, 223  
     osaaminen, 17  
     tehtävät, 17  
     tiedot, 224  
     työn määrä, 17  
     yhdyskuntasuunnittelussa, 17  
*Maastomittaus ja kartoitus* (kirjanen), 16  
 maaston vetovoima, 439  
 maastoon merkintä, 230  
     kaava, 230  
     prosessikuvaus, 231  
     rakennuksen paikka, 239  
     säteittäinen kartoitus, 231, 232  
     vertauspiste, 239  
 maastotieto  
     katalogi, 225  
     koodaus, 225, 226  
     luokitus, 227  
 maastotietojärjestelmä, 223  
     kansallinen, 223  
 maatutka, 242  
 magma, 475, 477  
 magneettikuvaus (MRI), 459  
 magneettinen pullo (säteilyvyöhykkeet), 463  
 magneettinen vuo, 513  
 magneettisuus, heilurikompensoittorin, 104  
 magnetisointijuova (merenpohja), 474  
 magnetohydrodynamiikka (MHD), 461, 513

- magnetosfääri, 463  
 mahdollisuus, tilastollinen, 33  
 maiseman visualisointi, 250  
 mallivirhe, 390  
 mannerjäätikkö  
     Fennoskandian, 479  
     massan muutos, 495  
     on jäätikkö, 495  
     paksuus, 495  
 mareografi, 14, 481  
     kuvaus, 499  
     samanpaikkaisuus, 499  
     spatiaalinen otanta, 499  
 mareografipilari, 501  
 Mariaanien hauta, 214  
 Mars, Olympus Mons, 214  
 Martikainen, Martti, 18  
 Masala, Kirkkonummi, 210  
 massavirtaus, maankuoren alla, 482  
 Master Control Station (GPS), 283  
 MATLAB (ohjelmisto), 36, 507  
     tilastollinen testaus, 394  
 matriisi  
     määritelmä, 503  
     kertolasku, 503, 505  
     kertominen vakion kanssa, 504  
     kääntäminen, 507  
     ortogonaalinen, 267  
     päälävistäjä, 506  
     rivi, 505, 506  
     sarake, 505, 506  
     singulaarisuus, 508  
     transpoosi, 506  
     yhteen- ja vähennyslasku, 503  
 Maupertuis, Pierre L. M. de, 1, 8, 181  
 Maxwell, James Clerk, 184, 185  
 Maxwellin ja Faradayn yhtälö, 512  
 mehiläiskennokuvio, 249  
 mekaniikka, klassinen, 5  
 Mekometer (etäisyysmittari), 44, 191  
 Mercator (karttaprojektio), 54, 215  
 Merenkurkku (Itämeri), 480  
 merenpinnan nousu, 499  
 merenpinta  
     seuranta, 481  
     vaihtelu, 483  
 merenpohjan kartoitus, 14  
 merenpohjan leveneminen, 476  
 merenpohjan paine, 486  
 meridiaanin läpikulku, 441, 451, 457  
 meritopografia, 488, 498  
     määritelmä, 14  
     GOCE, 489  
     havaittu, 498  
     suuruus, 498  
     syyt, 497  
     teoria, 497  
 merivirtaus  
     geofysikaalinen mallinnus, 93  
     kartta, 488  
     lämpöenergian kuljetus, 498  
     nopeusvektori, 498  
     poikittaiskallistus, 498  
 merkitsemismitta  
     esilaskettu, 230  
     pinta-alan laskenta, 250  
     suora viiva, 233  
     säteittäinen kartoitus, 231  
 merkitsevyystaso, 402  
     kytkentä, harmonisointi, 403, 405  
     normaalijakauma, 403  
         kaksipuolinen, 397  
 metalli-ilmais, 242  
 metatieto, 123  
     määritelmä, 18  
     käsite, 224  
     tallennus, 225  
     teodoliittimittauksen, 146  
 meteorihavainto, 55  
 metri, 181  
     julkinen, Pariisi, 24  
     SI-määritelmä, 26  
 metrinen oikeellisuus, 438  
 metrologia, 23, 240  
 Metsähovin radioteleskooppi, 473  
 Metsähovin tutkimusasema, 78, 85, 346  
     EUREF-FIN-koordinaatit, 48  
     ilmakuva, 114  
     kiintopiste, 78  
     koordinaatit, 49, 114  
     VLBI, 473  
 mikroaallot ja vesihöyry, 198  
 mikrogal ( $\mu\text{Gal}$ ), 418  
 mikrometri, optinen, 120, 121, 136, 137  
     vaaitus-, 96, 106, 107  
 Milanković, Milutin, 493  
 Milankovićin hypoteesi, 493  
 Milankovićin sykli, 494  
 milligal (mGal), 418  
 minuutti (kulmayksikkö), 26  
 minuuttiteodoliitti, 135  
 Misuzawa (Japani), 456  
 mitta (matematiikka), 34  
 mittakaavamalli, verkon, 3  
 mittakaavareduktio  
     Gauss-Krüger-karttaprojektio, 202  
     UTM (karttaprojektio), 203  
 mittalanka, tarkkuus-, 44  
 mittanauha, 124  
     kalibrointi, 182  
     lämpötilakorjaus, 182  
     painuma, 182, 183



teräksinen, 43  
mittapöytä, 42  
mittasauva (GPS), 291  
mittasuure, 23, 24  
mittausarvo, 28  
mittauskaukoputki, 96, 98  
tehtävät, 97  
teodoliitti, 120  
vaaituskoje, 95  
säätöruuvi, 101  
mittausluokka (kaavoitus), 229, 230  
mittausperusta, projektin, 239  
mittaussarja, vaakasuuntien, 159  
mittaussuunnitelma, 18, 21  
mittausten suunnittelu, 393  
mittausvirhe, 28  
mittayksikkö, 23, 24  
*Mitteleuropäische Gradmessung*, 10  
*mitä jos...* (luotettavuus), 406  
mobiilikartoitussjärjestelmä, 216  
Moby (muusikko), 229  
monikulmiojono  
*määritelmä*, 166  
alkupiste, 166  
avoin, 166–168  
koordinaattien tasoitus, 172  
laskenta, 166, 168  
laskentataulukko, 174  
liitospisteet, 166  
loppupiste, 166  
lähtösuunta, 167  
painotus, 173  
pienimmän neliösumman tasoitus, 174  
suljettu, 166, 167, 170  
suora, 174  
suuntien tasoitus, 171  
tasolaskenta, 174  
vaakakulmamittaus, 153  
vaillinaisesti suljettu, 167  
monitie (*multipath*), 292, 312  
Mont Valérien (Suresnes, Ranska), 191  
Montmartre (Pariisi), 191  
moottoritie  
asfalttityö, 241  
suunnittelu, 238  
MSAS, 343  
Munk, Walter, 469  
muodonmuutoksen toteaminen, 483  
muodonmuutosmittaus, 111, 240  
muodonmuutosten analyysi, 387  
aika, 410  
datumipiste, 410, 412  
hypoteesit, 409  
muodonmuutosten seuranta, 240, 483  
murtovyöhyke, geologinen, 482, 484

musta aukko, 470  
musta kappale, lämpösäteilyn spektri, 185  
muukalainen (LAGEOS), 471  
muunnoskaava, paikallinen (RTK), 342  
muunnosparametrit  
EUREF89:stä ED50:een, 274  
Helmertin muunnos, 73, 381  
ITRF2005:stä ETRF2005:een, 275  
Mylar (PAGEOS), 454  
”mäyräkoira” (VLBI), 471  
määrälaskenta, maamassojen, 113, 238, 253  
N  
N60, 90  
datumipiste, 77  
N2000, 273  
kuvaus, 91  
datumipiste, 78  
pääkiintopiste, 78  
nabla, 420  
naiivi maailmanmalli, 1  
nanogal (nGal), 418  
NAP (korkeusjärjestelmä), 78, 91  
napakoordinaatit, 65  
napaliike, 455–457  
Chandlerin huojunta, 455, 456  
seuranta, 456, 473  
vuosittainen, 455  
napaplanimetri  
toimintaperiaate, 253  
kuva, 253  
NASA (Yhdysvallat), 455  
National Geodetic Survey (NGS, Yhdysvallat), 321  
geodeettinen käänteistehtävä, 85  
geodeettinen päätehtävä, 67  
National Geospatial-Intelligence Agency (NGA, Yhdysvallat), 431  
National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA, Yhdysvallat), 246  
natrium, viskositeetti, 479  
nauhakorjaus, 182  
navan vaellus, 455  
navigointi, 54, 336  
navigointiviesti, GPS, 285–287, 319, 320, 459  
Navy Navigation Satellite System (NNSS, ”Transit”), 45, 280, 281  
kuvaus, 278  
dopplersiirtymä, 280  
sukellusveneen tietokone, 281  
neliparametrinen muunnos, katso  
Helmertin muunnos tasossa  
neliöiden summa

jäännösvirheiden, 390  
 luotiviivan poikkeamien, 270  
 neliöinti  
   Simpsonin sääntö, 254  
   vaihtoehdot, 256  
 nestekompensaattori (korkeusindeksi), 145  
 nestepinta vertaustasona, 91  
 Newton, Sir Isaac, 5  
   gravitaatio, 417  
   Maan litistyneisyys, 13  
   pistenotaatio, 274  
   *Principia*, 5  
   valon luonne, 184  
 Nivavaara, 1, 9  
 nolla-alkio, lukujoukon, 504  
 nollahypoteesi, 392, 401  
 nollavirhe, tasaimen, 125  
 noonio (*nonius*), 136  
 nopeuskorjaus, toinen, 200  
 nopeusvektori, satelliitin, 319, 321  
 noppa, 30  
   heitto, 30, 31  
   rehellinen, 31  
 normaalijakauma, 34  
   kaksipuolinen testi, 397  
   kaksiulotteinen, 39  
   keskivirhe, 34, 35  
   moni-, 388  
   odotusarvo, 34  
   ominaisuudet, 34  
   taivutus pisteet, 35  
   tilastollinen testaus, 397, 402, 403  
   todennäköisyyksiä, 35  
 normaalileikkaus, 12  
 normaalimatriisi, 358  
   atsimuuttisymmetrinen, 312  
   Helmertin muunnos, 382  
   keskiarvon laskenta, 359  
   lineaarinen regressio, 360  
   esimerkki, 362  
   pseudoetäisyys, 308  
 normaalipainovoima, 422  
   GRS80, 423  
   laskenta, 422  
   luotiviivan keski-, 437  
   pystygradientti, 443  
   GRS80, 423  
   vahvuus (skalaari), 422  
 normaalipainovoimakenttä, 422, 423  
 normaalipainovoimavektori, 422, 426  
 normaalipotentiaali, 422, 424  
   GRS80, 423  
 normaaliyhtälö, 356  
   nimi, 356  
   ratkaisu, 356

yhtälöryhmänä, 357  
 Norsk Rikskringkasting, 229  
*nothing*, 59, 65  
*no-shadow*-rata, 467  
 nostoruuvi, 95, 101  
 nousevan solmun rektaskensio, 515  
 numeerinen sääennustus (NWP), 250, 456  
 Nummela, 189  
 Nummelan perusviiva, 181, 189  
 Núñez, Pedro, 136  
 Nunn, Joseph, 454  
 nutaatio, 459  
 NUVEL (laattatektoniikan malli), 477  
 näkyvyys  
   GPS-satelliittien, 278  
   maastossa, 250  
   vapaa asemapiste, 220  
 näkyvyys ehdot, kiintopisteiden, 206  
 näkyvän valon luonne, 184  
 O  
 octave (ohjelmisto), 385, 507  
 odotusarvo  
   diskreetin suureen, 31  
   jatkuvan suureen, 34  
   kolikonheiton, 32  
   nopanheiton, 32  
 odotusarvo (operaattori), 35, 352  
 ohikulkukone, 441, 451, 457  
   jakokehä, 451  
   refraktiokorjaus, 451  
 ohjeistus, geodeettisten töiden, 207  
 oikaisu, ilmakuvan, 249  
 oikea arvo, 28, 35  
   havaitun suureen, 34, 388  
 oikean puolen vektori  
   keskiarvon laskenta, 359  
   lineaarinen regressio, 360  
 oikokulma, 26  
 Oinas (Aries), 449  
 ”*The Old Survey*”, laulu, 117  
 Ollikainen, Matti, 273  
 Olympus Mons (Mars), 214  
 Omega (navigointijärjestelmä), 278  
 ominaisarvotehtävä, 372, 373  
 ominaisuustieto, 227  
 ongelmatilanne, kenttätö, 130  
*on-the-fly* (RTK), 340, 341  
 optinen aktiivisuus, 185  
 optinen hilakello, 93  
 orientaatiotuntematon, 159  
 Orion, 448  
 ortogonaalisuus, pseudosatunnaiskoodien, 288  
 ortokuvakartta, 250  
 ortonormaali kanta, 509

osa-arvo, tasaimen, 100  
 osittaisderivaatta (linearisointi), 305  
 otos, 35  
 otoskeskiarvo, 35  
 otoskeskivirhe, 352  
 otosvarianssi, 35  
 otsonikerros, 492

## P

paalutus, 230  
 PAGEOS (satelliitti), 454, 455  
 paikanmäärittäminen, 451  
   tähtitieteellinen, 3, 440, 441  
 paikannusvirhe, 333  
 paikkatieto, 18  
   yhteiskäyttö, 226  
 paikkatietojärjestelmä (GIS), 21, 226  
 paikkatietotekniikka, 226  
 paikkavektori  
   havaintoaseman, 301, 302  
   satelliitin, 301–303, 319, 321  
   vastaanottimen, 303  
 painava massa, 417, 418  
 painokerroinmatriisi, 368  
   havaintojen, 388  
   jäännösvirheiden, 392  
   pseudoetäisyyksien, 308  
   tuntemattomien, 358  
 painomatriisi, tuntemattomien, *katso*  
   normaalimatriisi  
 painovoima  
   määritelmä, 418  
   keskipakovoima, 421  
   luotiviivalla, 435, 436  
   luotiviivan keski-, 435, 436  
   Maan pinnalla, 418  
   muutos, maannousu, 481  
   seuranta, 481, 483  
   vahvuus (skalaari), 422  
   vaihtelu, 428  
 painovoima-anomalia  
   määritelmä, 426  
   ja häiriöpotentiaali, 427  
   ja korkeus, 426  
   laskenta mittauksista, 427  
   vaihtelu, 427  
 painovoimagradienttitensori, 442  
 painovoimahäiriö, 425  
 painovoimakenttä, 421  
   ajalliset muutokset, 485, 486  
   hienorakenne, 485  
   on konservatiivinen, 432  
 painovoimalitistyneisyys, 13  
 painovoimapisteen korkeus, 426  
 painovoimavektori, 421, 426, 431  
   määritelmä, 422, 432

geopotentiaalilin gradienttina, 442  
 ominaisuudet, 432  
 suunta, 440  
 painoyksikön keskivirhe, 310, 368  
   asematasoitus, 163  
   pseudoetäisyys, 308  
 painoyksikön varianssi  
   *a posteriori*, 394  
   pseudoetäisyys, 308  
 painumakorjaus, mittanauhan, 182, 183  
 pakkokeskistys  
   periaate, 131  
   sovellus, 131  
 pakkokeskistyslaite, 129  
   kiinnitys jalustaan, 122  
   kuva, 123  
   yhdensuuntaissiirto, 128  
 paleomagnetismi, 476  
 pallofunktiokerroin, 466  
 palloylijäämä, 350  
*Pantometria* (kirja), 117  
 paperi, painetut kartat, 46  
 paperikone, 240  
 parallaksi, mittauskaukoputken, 98, 99  
 Pasteur, Louis, 185  
 patologinen funktio, 256  
 pekkanska (henkilönostin), 254  
 pentagonprisma, 113  
 perigeum, 515  
 perigeumin argumentti, 515  
 perigeumin korkeus, 466  
 periglasiaalinen pullistuma, 478, 499  
 Peru, 8  
 peruspiste, 239  
 perusviiva  
   Lapin, 42  
   Nummelan, 181, 189  
   Snelliuksen, 3  
 pienimmän neliösumman menetelmä, 387  
   keksintö, 354  
   nimi, 352  
 pienimmän neliösumman ratkaisu, 356  
   painotettu, 388  
   tarkkuus, 357  
 piikki (mittaus), 109  
 piilokarsastus, 98  
 pikavalmistuskieki, 326  
 piki, viskositeetti, 479  
 pikkuplaneetan rata, 354  
 pikseligrafiikka, 249  
 pilari, koje-, 126  
 pimennys, 449  
 pinta-ala  
   laskenta, 250  
   koordinaateilla, 251, 252  
   merkitsemismitoilla, 250, 251

- mittaus planimetrilla, 253
- pintavaaitus
- selostus*, 110
  - kontrolli, 111
  - määrälaskenta, 253
  - tulos, 111
- Pisan torni, 111
- pistehila-esitystapa, 248, 249
- pistekeskivirhe, 309, 374
- pistekortti, 124
- pistenumero, 124
- pistepilvi, 248
- pistetarkkuus, 374
- pistevarianssi, 374
- Pittakos, 23
- pituus (suure), 26, 181
- pituusaste
- geodeettinen, 48, 261
  - geosentrinen, 261
  - tähtitieteellinen, 450
- pituusasteen määrittäminen, 451
- P-koodi, 286, 287, 290
- aallonpituus, tehollinen, 291
  - mittaustarkkuus, 291
  - salaus, 291
- Planck, Max, 185
- Planckin vakio, 185
- plane surveying*, 15
- planimetriyhtälö, 253, 254
- plankartta, 53, 83
- plasma, 511
- nimi, 513
- plasmataajuus, 300
- plastisuus, 479
- Plesetsk (Venäjä), 485, 487
- Poder, Knud, 57
- Pohjantähti, 4, 459
- pohjavesivaranto, 482
- pohjoismaiset painovoimaprofiilit, 481
- poikastuminen, jäävuoren, 495
- poikittainen aaltoliike, 474
- poikkeavien arvojen löytäminen ("outlier detection"), 387, 396, 398
- poikkileikkausmittaus, 112, 113
- Poincaré-Prey-reduktio, 436
- polar amplification*, 495
- polarimetri, 185
- polarisaatio, 185, 187
- kuva*, 187
  - elliptinen, 187
  - ja elämä, 185
  - ympyrä-, 293
- poolisuus, vesimolekyylin, 199
- Porvoo, 384
- potentiaalienergia, 88, 431
- Pothenot, Laurent, 156
- PP2000 (kiintopiste), 78
- kuva*, 78
- PPP, *precise point positioning*, 345
- precise ephemeris*, 321–323
- laatu, 333
- precision* vastaan *accuracy*, 28
- prekessio, 459
- apsidi-, 494
  - klimatologinen, 495
  - Larmorin, 459
  - päiväntasausten, 449, 459, 460
  - satelliitin ratatason, 11, 466
  - tähtitieteellinen, 494
- primordial heat*, 477
- Principia*, 5
- Maan litistyneisyys, 6
- prismalasit, 98
- Procyon (tähti), 448
- profilimittaus, 112, 113
- projektio
- karttatasolle, 215
  - vertausellipsoidin pinnalle, 215
- projektiokoordinaatisto, 58
- projektiomittaus (Väisälä), 189
- proksi, 288
- pseudoetäisyys, 290, 296, 303, 332
- havainto, 290, 297
  - linearisointi, 305, 306
  - vastaava, 298, 299
- pseudoetäisyyspoikkeama, 337
- pseudohavainto, 165
- pseudosatunnaiskoodi, 285, 287
- pulsari, 513
- pulssin muoto (satelliittialtimetria), 497
- puolikulmakaava (arctangentti), 69, 70
- puolikulmakaava (pallon kosinisääntö), 86
- puolustusministeriö, Yhdysvaltojen, 283
- putkitasain
- kuva*, 99
  - horisontti, 95, 98
  - rakenne, 98
  - säätöruuvi, 98, 101
  - tehtävä, 99
- puun iänmäärittäminen (vuosirenkaat), 189
- puuraja, 288
- pystyakseli (teodoliitti), 119
- pystykehän indeksi, 143
- automaattinen, 145
- pystykulma, *katso* zeniittikulma
- pyörästysjäännös, 141
- pyörivä koodauskehä, 148, 149
- pyörähdysellipsoidi, 6, 7, 48
- geodeettinen viiva, 12
  - Maan muotona, 13
- pyörähdyshyperboloidi, 339



## Q

$Q_{\ell\ell}$ -metriikka, 390, 394, 397

## R

R (ohjelmisto), 36

radanmäärittäminen, 354

radiaani, 26, 27

radioaktiivisuus, 476, 477

radioliikennehäiriö, 463

radiometrinen iänmäärittäminen, 476

radionavigointi, 278

raidekenkä, 108

raja-alue, GNSS-havaintojen,  
285, 292

rakennematriisi

määrittäminen, 368

asemasuunnitus, 159

atsimuutti, 377

Helmertin muunnos, 381, 382

lineaarinen regressio, 360

pseudoetäisyys, 307

vinoetäisyys, 375, 376

rakennettu ympäristö, 17, 245

rakennuksen paikan merkintä, 239

rakennuslupa, 239

rakennusmittaus, 239

rakennustoiminta, kiintopistetarve, 208

Ranskan tiedeakatemia, 7–9

ranta-alue, 230

ranta-asemakaava-alue, 230

*rapid orbits*, 323

Rapu (Cancer), 449

rataellipsi

eksentrisyys, 515

isoakselin puolikas, 464, 466, 515

pikkuakselin puolikas, 515

polttopiste, 463

ratatason inkliinaatio, 515

kartoitusalue, 465

kriittinen, 467

ratkaisuväri, 356

rautamalmihiukkanen, 475

rautatie

keskipakovoima, 238

suunnittelunopeus, 238

rautatieväestö, 109

reaaliluku 1, 506

reaaliluvut, tietokoneen, 32, 294

*reconnection* (magnetismi), 462

reduktio vertauspintaan, 12, 213

reduktio, havaintojen, 29

redundanssi, 349, 390

merkitys, 409

redundanssiaste, 409

redundanssimatriisi, 407

refraktiokerroin  $k$ , 175, 199

refraktiomallinnus, ilmakehän, 177

rekka, täysperävaunullinen, 237

rekognosointi, 206

rektaskensio, 449, 450

määrittäminen, 451

*resection*, 154

revontuli, 463

Richer, Jean, 13

riippuluoti, 122, 126, 127

riippuvuus, tilastollinen, 39–41

RINEX, Receiver-Independent Exchange

Format, 294, 296, 345

risteilyohjus, 250

ristidipoliantenni, 294

ristimitta, 240

rivivektori, 504

*roede* (pituusyksikkö), 3, 4

rot (operaattori), 512

rouva, 124, 126

RTK, 339

*toimintaperiaate*, 340

kartoitusmittaus, 222

olemus, 341

runkomittaus, 211

rubidiumkello, 281

rugbypallo (Maan muoto), 7

runkomittaus, 208

käyttötarkoitus, 206

menetelmät, 206, 208

tehtävä, 205

runkoverkko

alemman luokan, 211

ensimmäisen luokan, 135

mittausteknologia, 206

ruostesuojamaali, 124

ruuvikierre, geodeettinen standardi-, 122,  
291

ryhmänopeus, 299, 300

ryhmätaitekerroin

informaatiosisältö, 198

ionosfääri, 300

kuiva ilma, 198

## S

S-aallot, 474

*Safety of Life* (SoL), 285, 343

Sagan, Carl, 471

Sagittarius A\*, 470

San Andreas -murtovyöhyke (Kalifornia,  
Yhdysvallat), 482

sanastotyö, 207

sarakevektori, 504

paperinsäästö, 506

sarjahavaintomenetelmä, 135, 157, 158

fokusointi, 133

virheiden vähennys, 157



- sarjakeskiarvo, 159, 164  
 satamalogistiikka, 241  
 satelliitin rataliike, 463  
 satelliittialtimetria, 487, 496  
     *menetelmä*, 496  
     GNSS satelliitissa, 499  
     mannerjää, 495  
     mittausgeometria, 496  
 satelliittigeodesia, 259  
     geopotentiaalimalli, 430  
     koordinaattijärjestelmä, 259  
     kuvia (NASA), 455  
     paikannus, 44  
     ratahäiriöt, 464  
 satelliittilasertutka (SLR), 45, 470  
 satelliittipaikannus  
     geodynamiikka, 469  
     merenpinnan paikka, 501  
     runkomittaus, 206, 208  
     yleistyminen, 57  
 satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät  
     (SBAS), 343, 344  
 satelliittiradan valinta, 465  
*satellite-to-satellite tracking* (SST), 486  
 satulapiste, 420  
 sauvaluoti, 126, 127  
 SBAS-differentiaalikorjaus, 343  
 Schmidt, Bernhard, 453  
 Schmidt-kamera, 454  
 Schmidt-Väisälä-teleskooppi, 452  
 scilab (ohjelmisto), 507  
 Seasat (satelliitti), 500  
 seinämitta, 239, 240  
 sekunti (aikayksikkö), 26  
     SI-määritelmä, 26  
 sekunti (kulmayksikkö), 26  
 sekuntiteodoliitti, 135  
*selective availability* (SA), 337  
 selänne, valtameren keski-, 474, 477, 482  
 Sendai (Japani), 483  
 seurantamittaus, 240  
 seutukaava, 229  
 SFS 3161, johtokarttastandardi, 242  
 Shuttle Radar Topography Mission  
     (SRTM), 246  
 sidoslinjamittaus, 218  
     tarkistus, 218, 219  
 sidosmittaus, profiilin, 113  
 siirtosuure ( $\mathcal{E}$ )  
     *termi*, 395  
     odotusarvo  
         nollahypoteesi, 395  
         vaihtoehtoinen hypoteesi, 396  
 siirtymäkaari, 236  
 sijaintikatselmus, 240  
 sijaintitieto, 227  
 SI-järjestelmä, 24  
     etuliite, mittayksikön, 24, 25  
     johdannaisyksikkö, 24  
     lisäyksikkö, 25  
     perusyksikkö, 24  
     yksiköiden symbolit, 23  
 silikoniöljy kompensattorissa, 145  
 silmälasit, havaitsijan, 97, 98  
 Simpson, Thomas, 254  
 Simpsonin sääntö, 254, 256  
     Kepler, 245, 254  
     tilavuuslaskenta, 255  
     todistus, 254  
 singulaarisuus  
     kuvauksen, 367  
     taaksepäin leikkauksen, 156  
 sininen kalvo, 486  
 Sirius (tähti), 448  
 sisäänmenopupilli (aukko), 96  
 siviiliaika, 451, 457  
 siviilivuorokausi, 447  
 sivuttaisrefraktio, 30  
 SI-yksikkö  
     geopotentiaalilin, 433  
     pituuden, 181  
 Sjököulla (Kirkkonummi), 473  
 skaalakorkeus, 493  
 skalaaritulo, 509  
*sky plot*, 307  
*sky survey*, 454  
 S-käyrä, 236  
 SmartNet (Hexagon Oy), 345  
 Snell van Rooyen, Willebrord (Snellius), 3, 156  
 Sodankylä, 328  
 Sodankylän geofysikaalinen observatorio, 85, 346  
 SP3 (ratatietojen formaatti), 321, 322  
 spatiaalikorrelaatio, 328  
*spin*, hiukkasen, 187  
 Sputnik 1 (satelliitti), 11  
 staattinen runkomittaus, 211  
*stadium* (pituusyksikkö), 3  
 standardi  
     geodeetisten töiden, 207  
     rakennusmittausten, 239  
 standardiellipsi, katso virhe-ellipsi  
 standardiepävarmuus, 28  
 standardipoikkeama, 28  
 steradiaani, 26  
 stereomallirestituutio, 43, 44  
 stokastinen suure, 30  
     kaksiulotteinen, 33  
     lineaariyhdistelmä, 37  
     moniulotteinen, 39, 40  
     reaaliarvoinen, 32





realisointi, 30, 31  
 Stokes, George Gabriel, 429  
 Stokesin funktio, 429  
 Stokesin silmukkaintegraalilause, 512  
 Stokesin ydin, 429  
 Stokesin yhtälö, 429  
   integrointipiste, 430  
   laskentapiste, 430  
 stratosfääri, 492  
 Struve, Georg Wilhelm von, 8  
 Struven ketju, 8, 10  
 suhteellisuusteoria  
   erityinen, 300  
   yleinen, 93, 418  
 sulkuvirhe  
   kolmio, 350, 351  
   koordinaatit, 169, 173  
   suunta, 172  
   tarkistus, 390  
 Sundan syvänmeren hauta, 427  
 suora kulma, 26, 27  
 suora merkitsemistapa, 233  
 suora vaihe (modulaatio), 291  
 suora viiva  
   maastoon merkintä, 233  
   sovitus, 353, 360  
 suorakulmainen kartoitus, 217, 218  
   apuvälineet, 217  
   maastoon merkintä, 233  
   tarkistus, 217  
 suorakulmiosisäntö (neliöinti), 256  
 suprajohdin, 512  
 suprajohdavuus, 461, 511  
*Survey of India*, 9  
 suunnikas, 366  
 suunnittelu  
   GPS-mittausten, 306, 307, 326  
   infrastruktuurin, 17  
   maankäytön, 17  
   mittausverkkojen, 406  
   rakennetun ympäristön, 17  
   teiden ja rautateiden, 236  
   tekninen, 17  
 suunnittelu- ja mittausprosessi, 393  
 suunnittelunopeus, 238  
 suuntaissärmiö, 367  
 suuntakosini (linearisointi), 305  
 suuntavektori  
   kvasaariin, 472  
   satelliittiin, 302, 304  
 suurennus, kaukoputken, 96  
 suurennusverkko, 4  
 suuresta pieneen -työskentely, 208  
 suurten lukujen laki, 31, 35  
 Syene (Egypti), 3  
 sylinterilasit, 98

symmetrinen GPS-mittausgeometria, 309  
 synoptinen skaala, 328  
 synteettisen aukon tutka (SAR), 485, 495  
   maastomalli, 246  
 syvänmeren hauta, 427, 477  
 syy-seuraussuhde, 36, 39  
 sähkömagneettinen aalto, 184  
 sähkömagneettinen kenttä, 185  
 sähkömagneettinen säteily, 184  
   ilmassa, 197  
   kvantisointi, 185  
   polarisaatio, 187  
   spektri, 186  
 sähkömagnetismin kenttäteoria, 184  
 säteilyvyöhyke, 283, 463  
 säteittäinen kartoitus, 218–220  
   kuva, 220  
   kaltevuusreduktio, 219  
   maastoon merkintä, 231, 232  
   metatieto, 220  
   numeerisena kartoitusmenetelmänä, 220  
   vaakakulmamittaus, 154  
 säähavainnot, edustavuus, 200, 201  
 säätiede, 301

## T

taajuusjakokanavointi (FDMA), 336  
 taajuuskalibrointi, 196  
 taajuusmittaus, 45  
 taajuusmodulaatio, 285  
 taaksepäin leikkaus, 154–156  
   kolmiulotteinen, 315  
 tabletti (tietokone) kartoitusmittauksessa, 223  
 taitekerroin, 197  
   edustavuus, 200, 201  
   ilma, 199  
   ilma, mikroaallot, 198, 301, 488  
   ilma, näkyvä valo, 197  
   kuiva ilma, 197  
   lasi, 136  
 taiteviiva maastossa, 248  
 taivaanmekaniikka, 5  
 taivaannapa  
   korkeuskulma, 5  
   liike, 460  
   suunnan projektio vaakatasoon, 271  
 taivaanpallo, 448, 450  
 takymetri  
   termi, 44  
   automaattinen, 483  
   elektroninen, 44  
   havaintoyhtälöt, 380  
 talvipäivänseisaus, 449  
 tappikaltevuus, 142



- määritelmä, 119  
 määrittäminen, 142  
 tarkistusmitta, 240  
 tarkkavaaaitus  
   määritelmä, 96  
   Suomen ensimmäinen, 108  
   Suomen toinen, 108  
   toistettu, 481  
   valtakunnallinen, 78  
 tarkkavaaaituslatta  
   invarlatta, 106  
   jousi, 106  
   lattayksikkö, 106  
 tarkkavaaaitusverkko, valtakunnallinen,  
   93, 109, 501  
 tarkkuuden laimennus (DOP), *katso*  
   *dilution of precision*  
 tarkkuuskäyttäytyminen, verkon, 80  
 tarkkuusteodoliitti, 135  
 tarra, heijastava, 194  
 tasa-arvokäyrä, 420  
 tasain, vaaituskojeessa, 95  
 tasapotentiaalipinta, 424  
   kuvaus, 88  
   geopotentialin, 425  
   kaarevuudet, 443  
   kaarevuussäteet, 444  
   keskinäinen väli, 434  
   normaalipotentialin, 422, 425  
 tasaus, teodoliitin, 125, 129  
   karkea, 125  
   tarkka, 125, 126  
 Tasmania, magneettinen napa, 475  
 tasodatumi, 77, 80, 81  
 tasodeformaatio  
   analyysi, 411  
   koordinaattisiirtymä, 414  
   painokerroinmatriisi, 415  
   painoyksikön keskivirhe, 415  
   seuranta, 413  
   siirtosuure ( $\mathcal{E}$ ), 412, 415  
   siirtymävektori, 412  
 tasoitus  
   keskiarvo, 358  
   korjaus, 390  
   lineaarinen regressio, 360  
   paino ja korjaus, 351  
   painokerroin, 351  
   painotus, 351  
   projektiona, 391  
   tulokset, 28  
 tasoituslasku, 28  
   karkeat virheet, 392  
 tasoitusmenetelmä  
   ehtotasoitus, 388  
   parametrinen, 355, 388  
 tasokoordinaatit, 46  
   geodesiassa, 65  
   kompleksilukuina, 411  
   suorakulmaiset, 65  
 tasokoordinaattijärjestelmä, 46  
 Taylorin sarjakehitelmä (linearisointi),  
   305, 363, 367  
 TCA2003 (teodoliitti), 150, 151  
   automaattinen kohdetunnistus  
     (ATR), 150  
   datanvaihto, 152  
   etäisyysreduktio, 151  
   itsekalibrointi, 150  
   laserluoti, 151  
   seurantamittaus, 151  
   tasain, elektroninen, 151  
 tektoniikka, 410  
   laatan sisäinen, 483  
 telakka, 240  
 Tellurometer (etäisyysmittari), 44  
 teodoliitti  
   kuva, 118  
   akselit, 119, 120, 124  
   akselivirheet, 139  
   elektroninen, 146–149  
   gyro-, 263, 378  
   kalibrointi, 139  
   kantokotelo, 122  
   kartoituksessa, 43  
   kehät, 119, 120  
   keksintö, 117  
   kojevirheet  
     vaakakulmamittaus, 139  
     zeniittikulmamittaus, 145  
   käsittely, 122  
   luokitus, 135  
   mittaus, 117  
   rakenne, 121  
   runko, 122  
   tähtäys ja kohdistus, 132  
 teollisuusmittaus, 240  
 termodynamiikka, ajan nuoli, 300  
 teräsverkkomasto, 115  
 testaus, tilastollinen, 28, 29, 392  
   hypoteesit, 392  
   karkeat virheet, 392  
   muodonmuutos, 411, 483  
   normaalijakautuma, 402  
   poikkeavien arvojen löytäminen, 387  
 testausstrategia, 403  
 tie  
   kaarevuus, 236, 237  
   kaarevuussäde, 237, 238  
   keskipakoisvoima, 237  
   keskiviiva, 236  
   poikittaishallitus, 237, 238

rakenteet, 238  
 tielinja  
   laskeminen, 238  
   maastoon merkintä, 238  
 tiesuunnitelma, 238  
 tietekniikka, 238  
 tietokerros, 227  
 tietokone, sukellusveneeseen, 281  
 tilavuuslaskenta  
   maastomalli, 257  
   Simpsonin sääntö, 254  
 Tobler, Waldo R., 327  
 todennäköisyys  
   arvovälin, 33  
   nopanheiton tuloksen, 31  
 todennäköisyystiheysjakauma, 32  
   histogrammien limiittinä, 33  
   kaksiulotteinen, 39  
   kolmiulotteinen, 40  
 toimintahäiriö, laitteen, 29  
*toise* (pituusyksikkö), 8  
 Tom ja Jerry, *katso* GRACE  
 tonttijako, sitova, 229  
 tonttiraja, 239  
 TOPEX/Poseidon (satelliitti), 469, 498, 499  
   ratatason inkliinaatio, 499  
 topografian vetovoima, 439  
 Torge, Wolfgang, 14  
 Tornionjoki, 42, 181  
 Tornionlaakso, 8, 77  
 torsiovaaka, 444  
 tosiaikainen kinemaattinen mittaus, *katso*  
   RTK  
 tosiaikainen paikannus, 336  
 tosiaikaisuus, 336  
*total precipitable water-vapour content*,  
   490  
*total station*, 44  
 totuus, muodollinen (datumi), 81  
 Transit 5B-5, 277  
 Transit-paikannusjärjestelmä, *katso* Navy  
   Navigation Satellite System  
 transpoosi, 506  
   paperinsäästö, 41, 506  
   vektorin, 506  
 trapetsoidisääntö (neliöinti), 256  
 trendi ajassa, 39  
*triangulated irregular network* (TIN), 249  
 trigonometrinen korkeusmittaus, 176  
   perusyhtälö, 177  
   zeniittikulma, 176, 177  
 Trimble AB, 44  
 Trimnet VRS, 344  
 tropopaussi, 492  
 troposfäärin kulkuviive, 296, 298, 301  
 troposfääritutkimus, 301

tukiasema  
   DGPS, 337  
   virtuaalinen, 343  
 tukiasemaverkko  
   DGPS, 342  
   RTK, 342  
 tukipiste (GCP), 248  
 tulivuoritoiminta, 478  
 tulvaturvallisuus, 240  
 tunnelimitaus, 154, 166, 206, 240  
 tunneliverkosto (vertauskuva), 90  
 tuntikulma, 450  
 Tuorlan taikuri, *katso* Yrjö Väisälä  
 Turku, 78, 79, 452  
 Turun tuomiokirkko, 79  
 tuulen vastus, 497  
 Tuusula, 57  
 Tyynenmeren keskiselänne, 477  
 työ, 45  
   polkuintegraali, 432, 433  
 työkoneohjaus, 240, 241  
 tähtiaika, 448, 450  
   Greenwichin, 260  
 tähtikatalogi, 451  
 tähtikello, 448  
 tähtikolmiomittaus, 43, 452  
   korkea tähys, 452  
   laitteisto, 452  
   levyreduktio, 453  
   mittausgeometria, 453, 454  
   satelliittien käyttö, 454  
   sääpallo, 452  
   verkkotasointus, 454  
   välähdysvalo, 452, 454  
 tähti ohjelma, 441  
 Tähtitorninmäki, Helsinki, 78  
 tähtivuorokausi, 447  
 tähtäys akseli  
   realisointi, 139  
   sääto, 140  
   teodoliitti, 119  
   vaaituskoje, 95, 98  
 tähtäys satsimuutti, 269  
 tähtäys suunnan projektio vaakatasoon,  
   271  
 tähtäysväli (vaaitus), 104, 109  
 tähyksen korkeus, 179  
 tähys  
   hyvä, 134  
   prismalla varustettu, 194, 195  
   pulma, 133  
 täsmäviljely, 241  
 U  
 UDP/IP-protokolla (VLBI), 471  
 Ukiah (Kalifornia, Yhdysvallat), 456

- ulostulopupilli, 96
- ultra-rapid orbits*, 323
- ultraviolettisäteily (PAGEOS), 454
- UNAVCO
  - geoidimalli, 115
  - laattaliikkeen laskin, 478
- Universal Time Co-ordinated (UTC), 458
- uraani-lyijy, 476
- uraani, köyhdytetty, 470
- US Geological Survey (USGS, Yhdysvallat), 246
- UTM (karttaprojektio), 61
  - kuvaus*, 62
  - konformisuus, 63
  - mittakaavavääritysmä, 62
- uusaste, uusminuutti, uussekunti, 27
- VW**
  - vaaitus, 45, 93
    - geometria, 94
    - geometrinen, 95
    - hydrostaattinen, 91
    - trigonometrinen, 177, 178
    - turvallisuus, 109
    - tähtäysväli, 104, 109
  - vaaituskoje, 95, 96
    - automaatti-, 103
    - digitaalinen, 104
    - horisontin säätö, 101, 102
    - itsetasaava, 103, 104
    - kenttätarkistus, 100, 101
    - käyttötarkoitus, 96
    - luokitus, 96
    - perinteinen, 95
    - rakenne, 96
    - tarkkuus, 96
  - vaaituslatta
    - kuvaus*, 105
    - itselaskeva, 110
    - käyttötarkoitus, 106
    - lukeminen lehvistön läpi, 105
    - luokitus, 107
    - rasiatasain, 106
    - valinta, 96
  - vaaitusverkko, 45, 93
    - silmukka, 45
    - suunnittelu, 109
  - vaaka-akseli (teodoliitti), 119
  - vaakakehä
    - elektroninen lukeminen, 148
    - jaotusvirheen minimointi, 157
    - lukitus, 157
  - vaakakulma, 118
    - määritelmä*, 118
    - kuva, 119
    - mittaus, 153, 154, 378
  - vaakasuunta, 65, 221
  - Vaakitsijantie, Oulu, 87
  - vaarallinen ympyrä
    - GPS, 315
    - taaksepäin leikkaus, 156
  - WAAS, 343
  - vahvuus, verkon, 404
  - vaihekatko, 330, 332
  - vaihekvadratuuri, 291
  - vaihemittaus, elektroninen, 192, 297
  - vaihemodulaatio, 285, 287
  - vaihenopeus, 299, 300
  - vaihetatekerroin
    - ionosfääri, 300
    - kuiva ilma, 198
  - vaihtoehtoinen hypoteesi, 392, 402
  - valaistusjärjestelmä (teodoliitti), 139
  - vale-itä, 60
  - valituskeino (kaavoitus), 16
  - valkoinen kohina (VLBI), 472
  - valodiodi, 146
  - valon luonne, 184
  - valon nopeus, 185, 197
    - määritelmä*, 190
    - määrittely, 190
  - valtatievaaitus, 109
  - valvontalohko (GPS), 283, 320
  - Vanguard 1 (satelliitti), 11
  - Vanha valtion järjestelmä (VVJ), 57
    - karttaprojektio, 61
  - Vantaa, 344
  - vapaa nutaatio, Eulerin, 456
  - vapaan asemapisteen menetelmä, 220–222
    - kuva*, 221
    - maastoon merkintä, 233
    - takymetrilla, 221
  - vapaan putoamisen kiihtyvyys, 417
  - varianssi, 35, 369
  - varianssimatriisi, 40, 368
    - määritelmä*, 40
    - GPS-ratkaisun, 308
    - havaintojen, 357, 389
    - koordinaattien, 309
    - koordinaattisiirtymien, 415
    - ratkaisun, 389
  - varmuus, tilastollinen, 33, 34
  - Vasa-laiva, 111
  - Washington DC (Yhdysvallat), meridiaanisopimus, 47
  - vasteaika, 336
  - Vega (tähti), 459
  - Wegener, Alfred, 473
  - Wegenerin mannerliiketeoria, 474
  - vektorigrafiikka, 249
  - vektorikuvaus, 365, 366

vektoritulo, 509  
 Venetsia (Italia), 111  
 Venezuela, 482  
 Vening Meinesz, Felix A., 417, 427  
 verkkohierarkia  
   *käsite*, 208  
   GNSS, 206  
   merkitys, 209  
   runkomittaus, 205  
   vaaitus, 93, 109  
 verkko-RTK-arkistopalvelu, 345  
 verkkotasoitus, 350, 351, 354  
   karttakoordinaateissa, 215  
   karttatasossa, 215, 216  
   kolmiulotteinen, 212  
   yhteiseurooppalainen, 10  
 verkkotihennys, 109, 208  
 vernier, 136  
 Vernier, Pierre, 137  
 vertausellipsoidi, 48, 83  
   approksimaation hyvyys, 214  
   keskipisteen siirto, 266, 269  
   laskentapintana, 213, 214  
   pinnan normaali, 48  
   tasapotentiaalipintana, 422  
   valinta, 270  
 vertausjärjestelmä, 55  
   realisointi, 77  
 vertauskehys, 55, 77  
 vertauspallo, approksimaation hyvyys,  
   214  
 vertauspinta, 91, 213  
   laskennallinen, 178  
 vertaussekvenssi (vuosirenkaat), 288  
 vesialtaan pato (seismiikka), 482  
 vesiasteikko, *katso* mareografi  
 vesiasteikko, sisävesillä, 92  
 vesihöyry  
   ilman sisältö, 301  
   integroitu, 490  
   osapaine, 301, 489, 491  
   stratosfäärissä, 493  
 vesimolekyylä, poolisuus, 199  
 vetovoima (Newton), 5  
 vetymaserkello, 281  
 WGS84, 58  
*wide-area differential GPS* (WADGPS),  
   343  
 videonauha (VLBI), 471  
 videopeli, 250  
 viemäri, toimivuus, 111, 240  
 viinihappo, eloperäinen, 185  
 viinitynnyrikaava, 245  
 viivakoodilatta, 104, 105  
 viivamikroskooppi, 135, 136  
 vinoetäisyysmittaus, 374–377

virhe  
   ensimmäisen lajin, 401  
   esimerkkejä, 30  
   karkea, 29, 393, 402  
     simuloitu, 400  
   satunnainen, 29  
   systemaattinen, 29  
     eliminointi, 135  
   toisen lajin, 402, 403  
 virhe-ellipsi, 39, 40, 372  
   akselien puolikkaat, 373  
   akselien suunnat, 373  
   akselit, 40  
   ja varianssimatriisi, 41  
   keskipiste, 40  
 virhe-ellipsoidi, 40, 308–310  
   atsimuuttisymmetrinen, 313  
 virheiden kasautuminen, 37  
   geodeettinen päätehtävä (GPT), 370  
 virheyhtälö, 355  
 virtuaalinen vertausasema (RTK), 344  
 viskositeetti, 479  
   natrium, 479  
   piki, 479  
   vesi, 479  
 visualisointi, paikkatiedon, 227  
 W-koodi, 286, 291  
 VLBI  
   *kuvaus*, 470  
   havaintokampanja, 470  
   havaintosuure, 471  
   Maan pyörähdysliikkeen seuranta,  
     457  
   Mark II, 471  
   mittausgeometria, 472  
   toimintaperiaate, 472  
   vektoriratkaisu, 472  
 voimaviiva, 424  
   Auringon magneettikentän, 462  
   normaalipainovoiman, 422  
   painovoiman, 421  
 VRS-RTK, 344  
 vuorokauden pituus (LoD), 456  
   seuranta, 456, 473  
 vuoroveden voimakenttä, 443, 445  
 vuorovesikuormitus, 483  
 vuosirengas (vuosilusto), 287, 288  
   korrelaatio, 288  
 Väisälä, Yrjö, 43, 187, 447  
 Väisälän interferenssimenetelmä, 188,  
   189  
 väreily (vaaitus), 109  
 värähdysaika, Cs-atomin, 26  
 Väyläviraston DGPS-palvelu, 344

**Y**

yhdenmuotoisuusmuunnos, *katso*  
Helmertin muunnos  
yhdensuuntaissiirto,  
pakkokeskistyslaitteen, 128  
yhdyskuntarakentaminen, 19  
yhdyskuntasuunnittelu, 17  
määritelmä, 17  
kuva, 19  
maastomittaus, 17  
”yhteinen virhe” -olettaus, 327, 328  
Y-koodi, 286  
yksikköalkio, lukujoukon, 504  
yksikkömatriisi, 504, 506  
yleinen virtausmalli (GCM), 250  
yleiskaava, 229  
yleistys, kartan, 18  
ylikuuluminen, 287  
ylimääräisyys, havaintojen, 390  
ylösalainen ilmapuntari (IB), 497  
ympyrän kaari, 234  
maastoon merkintä, 234  
ympyräsingulaarisuus (GPS), 315  
Young, Thomas, 185

**Z**

1462 Zamenhof, 447  
Zamenhof, L. L., 447  
Zeiss (Trimble) DiNi12 (vaaituskoje), 105  
zeniitin kulkuviive, 490  
zeniittikulma, 118  
määritelmä, 118  
kuva, 119  
mittaus, 143, 379  
refraktio, 175, 176  
zeniittiputki, 441, 457

**Ö**

Ölander, Victor Rafael, 177  
öljyn pumppaus, 111, 410, 482  
Ørsted (satelliitti), 492



